

Vorlesung 11b

Das Starke Gesetz der Großen Zahlen

Teil 1: Die Axiome von Kolmogorov

(vgl. Buch S 57, S 76)

Definition:

Eine Kollektion $\mathcal{E}$ von Ereignissen heißt eine σ -Algebra: $\Longleftrightarrow$

- (i) das sichere Ereignis E_s gehört zu $\mathcal{E}$
- (ii) mit jedem $E \in \mathcal{E}$ gehört auch E^c zu $\mathcal{E}$
- (iii) mit jeder Folge $E_1, E_2, \dots$ gehört auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ zu $\mathcal{E}$

Eine Abbildung $\mathbf{P}$ von einer σ -Algebra $\mathcal{E}$ nach $[0, 1]$
heißt W-Maß auf $\mathcal{E}:\Longleftrightarrow$

$$(1) \mathbf{P}(E_S) = 1$$

(2) (σ -Additivität)

für disjunkte $E_1, E_2, \dots$ in $\mathcal{E}$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(E_n)$$

(1) und (2) zusammen sind die **Axiome von Kolmogorov**.

Meist werden sie im Mengenmodell der Stochastik formuliert
(siehe Folie 5 unten).

Eine unmittelbare Konsequenz aus der σ -Additivität ist die

σ -Subadditivität:

für $E_1, E_2, \dots$ in $\mathcal{E}$ gilt

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(E_n).$$

Insbesondere ist die Vereinigung von abzählbar vielen $\mathbf{P}$ -Nullereignissen wieder ein $\mathbf{P}$ -Nullereignis.

Die σ -Subadditivität wird ein zentraler Baustein im Beweis des Starken Gesetzes der Großen Zahlen (und im Beweis des Borel-Cantelli-Lemmas) sein.

Eine reellwertige Zufallsvariable X
ist messbar bzg. der σ -Algebra $\mathcal{E}$
(kurz: $\mathcal{E}$ -messbar), genau dann wenn
 $\{X \leq b\} \in \mathcal{E}$ für alle $b \in \mathbb{R}$.

Für $\mathcal{E}$ -messbare reellwertige Zufallsvariable $Y, Y_1, Y_2, \dots$
setzen wir

$$\{Y_n \rightarrow Y\} := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq \ell} \{|Y_n - Y| \leq \frac{1}{k}\}$$

und sprechen vom Ereignis Y_n konvergiert gegen Y .

Auch dieses Ereignis gehört dann zu $\mathcal{E}$.

Im Kolmogorov'schen Mengenmodell der Stochastik
(vgl V4a6) ist

$\mathcal{E}$ eine σ -Algebra von Teilmengen
einer nichtleeren Menge Ω , mit $E_S = \Omega$,
und $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein W-Raum.

Die reellwertigen Zufallsvariablen werden dann zu
messbaren Abbildungen von Ω nach $\mathbb{R}$.

Weil uns in den Übungen eine Elefantenherde begleitet hat, kann ich
mir hier das Zitat folgender Passage aus dem hübschen Büchlein *Poisson
Processes* (Clarendon Press, Oxford 1993) des namhaften
zeitgenössischen Stochastikers Sir John Kingman nicht verkneifen:

This section is for the purist, who rightly demands that random variables and probabilities be defined by reference to a proper probability space, and that the measure-theoretic niceties be observed. It may be omitted without loss by the more casual reader.

According to the accepted basis of probability theory, we should first define a triple $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$, where Ω is a set (of ‘elementary outcomes’), $\mathcal{E}$ is a σ -field of subsets of Ω (‘events’) and $\mathbf{P}$ a probability measure assigning a number $[0, 1]$ to every event in $\mathcal{E}$. A real valued random variable is a function X from Ω into $\mathbb{R}$ which is measurable in the sense that $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ belongs to $\mathcal{E}$ for every x . A complex random variable is likewise a measurable function from Ω into $\mathbb{C}$, a random n -vector a function from Ω into $\mathbb{R}^n$, and a random elephant is a function from Ω into a suitable space of elephants. In each case there is a measurability condition to ensure that interesting subsets of Ω belong to $\mathcal{E}$ and so have probabilities.