

Vorlesung 11a

Bayes'sche Anteilsschätzung und die Pólya-Urne

Teil 3

Der Bayes-Schätzer für P

(Buch S. 127)

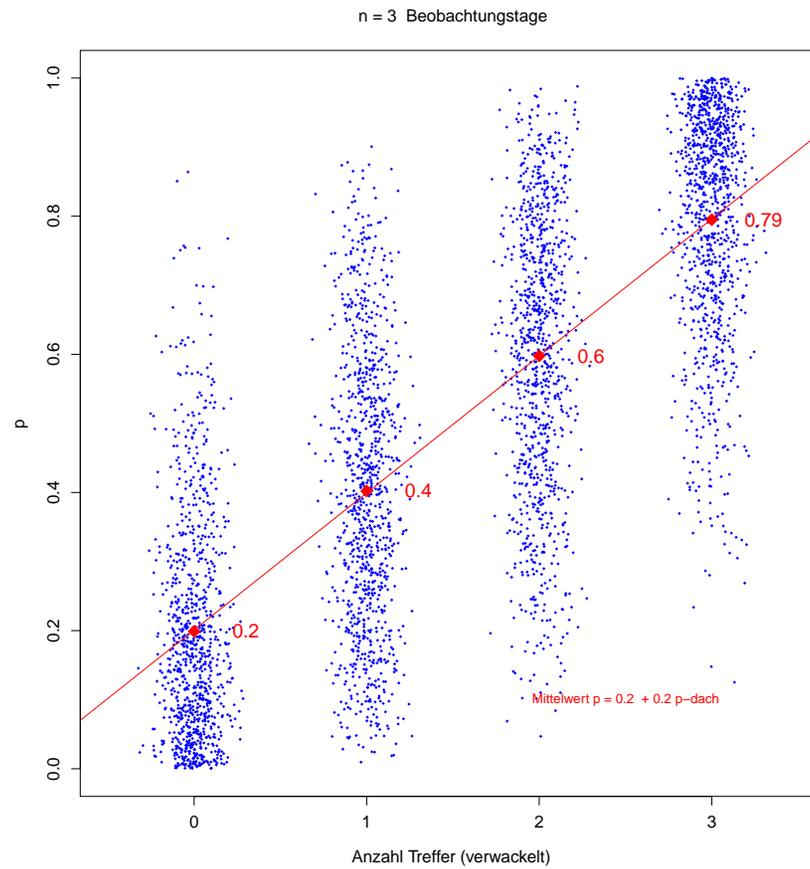
Fragen wir jetzt (in der Situation von Teil 1 und 2)
nach dem bedingten Erwartungswert von P ,
gegeben k Erfolge in n Versuchen:

$$\mathbf{E}[P|K_n = k] = ?$$

Die bedingte Erwartung $\mathbf{E}[P|K_n]$ nennt man auch den
Bayes-Schätzer für die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit P .

Emprischer Befund für $n = 3$:

$$\mathbf{E}[P|K_3 = k], \quad k = 0, 1, 2, 3$$



Vermutung:

$$\mathbf{E}[P|K_n = k] = \frac{k+1}{n+2}.$$

Beweis durch Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P|K_n = k] &= (n+1) \binom{n}{k} \int_0^1 p \cdot p^k (1-p)^{n-k} dp \\ &= (k+1) \binom{n+1}{k+1} \int_0^1 p^{k+1} (1-p)^{n-k} dp \\ &= \frac{k+1}{n+2} (n+2) \binom{n+1}{k+1} \int_0^1 p^{k+1} (1-p)^{n-k} dp \\ &= \frac{k+1}{n+2} \cdot 1 \quad \square.\end{aligned}$$

Wir sehen:

$$\mathbf{E}[P|K_n = k] = \mathbf{P}(Z_{n+1} = 1|K_n = k)$$

Das muss auch so sein,

denn wegen der Zerlegung des (unter K_n bedingten)

Erwartungswerts von Z_{n+1} nach P gilt:

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}|K_n] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Z_{n+1}|P, K_n]|K_n] = \mathbf{E}[P|K_n].$$

Bayes'sche Anteilsschätzung bei einer diskreten à priori Verteilung:

Manchmal hat man Informationen, die es nahelegen, für die Verteilung von P eine andere als die uniforme anzusetzen.

Dazu zitieren wir die Übungsaufgabe A39 aus der "Stochastik für die Informatik", WiSe 19/20, frei nach dem Eingangsbeispiel im 2. Vortrag der Ringvorlesung *Algorithmen, Maschinelles Lernen, Quantencomputing* im WS 18/19:

Jemand führt einen Münzwurf vor. Aus gewissen Gründen kommt nur in Frage, dass er entweder die ganze Zeit eine faire 01-Münze verwendet (d.h. $p = 1/2$) oder eine mit $p = 8/10$.

Bevor er zu werfen beginnt, beginnt, schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er eine faire Münze verwendet, mit 0.9 ein.

Wie aktualisieren Sie *Ihre Einschätzung* der Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine faire Münze handelt, nachdem

(i) beim ersten Wurf eine Eins

(ii) bei den beiden ersten Würfeln jeweils eine Eins

geworfen wurde?

Diese Aufgabe ist ausführlich gelöst auf den Folien 7-10 von

<https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/StofI1920/1920Vorlesung13b>