

Vorlesung 11a

Bayes'sche Anteilschätzung und die Pólya-Urne

Teil 1

“Mit welcher Wahrscheinlichkeit
geht morgen die Sonne auf?”

Buch S. 127

Wohl mit einem Augenzwinkern stellte
Pierre-Simon Laplace (1729-1847) die folgende Frage:

*Stellen wir uns vor, es wird jeden Morgen
mit einer uns unbekannten, konstanten
Erfolgswahrscheinlichkeit p eine Münze geworfen.*

*Bei Erfolg geht die Sonne auf,
bei Misserfolg ist der jüngste Tag gekommen.
Angenommen es ist bisher die Sonne 1 Million mal
aufgegangen. Wie wahrscheinlich ist es,
dass sie auch morgen wieder aufgeht?*

Ein naheliegender Schätzer für die
Erfolgswahrscheinlichkeit p im n -fachen Münzwurf ist
die relative Erfolgshäufigkeit $\hat{p} := \frac{K_n}{n}$
(Anzahl K_n der Erfolge geteilt durch Anzahl n der Versuche).
“ n Erfolge aus n Versuchen” ergäbe damit den Schätzwert 1,
auch schon für $n = 1$ anstelle von $n = 10^6$.

Hmmm...

Das gibt Anlass zum Nachdenken!

Laplace schlug vor,
an ein zweistufiges Zufallsexperiment zu denken.

In der ersten Stufe wird die Erfolgswahrscheinlichkeit P
uniform aus $[0, 1]$ gewählt.

In der zweiten Stufe wird, gegeben $\{P = p\}$,
ein wiederholter p -Münzwurf $(Z_1, Z_2, \dots)$ durchgeführt.

Sei $K_n := Z_1 + \dots + Z_n$
die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Fragen:

1. $P(Z_{n+1} = 1 \mid K_n = k) = ?$
2. $P(P \in (.) \mid K_n = k) = ?$

Mit der Frage 1 hatten wir uns schon in Übungsaufgabe 36 auseinandergesetzt, und die Lösung $\frac{k+1}{n+2}$ gefunden.

Das gibt auch schon die Antwort auf die Frage von Laplace:

$$P(Z_{n+1} = 1 \mid K_n = n) = \frac{n+1}{n+2}.$$