Vorlesung 10b

Markovketten II

Teil 3:

Das Ehrenfest-Modell

(Buch S. 109-110)

veröffentlicht 1909 von Paul und Tatjana Ehrenfest, konzipiert als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:

ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.

In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.

Hat diese Dynamik eine Gleichgewichtsverteilung, und wenn ja, wie sieht sie aus?

Zur Illustration betrachten wir hier nur den Fall $d = 3$. Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind dann (für $\ell = 0, 1, 2, 3$):

$$P(\ell, \ell + 1) = \frac{3 - \ell}{3}\,, \qquad P(\ell, \ell - 1) = \frac{\ell}{3}\,.$$

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden nummeriert mit $1, 2., 3$.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \qquad\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \text{in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Dynamik des Feinmodells:

Eine Nummer $i \in \{1, 2, 3\}$ wird rein zufällig ausgewählt
und das a_i wird “geflippt”
(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).
Das ergibt die Irrfahrt auf der Menge der Würfelecken
$\{0, 1\}^3$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:
die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch
“Zählen der Teilchen links”:

$$h(a) := a_1 + a_2 + a_3.$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)})$ uniform verteilt auf $\{0,1\}^3$, dann ist $Z^{(1)} + Z^{(2)} + Z^{(3)}$ Binomial(3, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial$(3, \frac{1}{2})$-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell

mit $d = 3$ Kugeln:

$$2^{-3}\binom{3}{\ell}\frac{3-\ell}{3} = 2^{-3}\binom{3}{\ell+1}\frac{\ell+1}{3}. \square$$

Was 3 recht ist, ist einem allgemeinen d billig:

Die Binomial$(d, \frac{1}{2})$-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht

für das Ehrenfest-Modell mit d Kugeln.

Dazu werden jetzt die Teilchen durchnummeriert mit $1, \ldots, d$.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \qquad\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \text{in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \{0, 1\}^d.$$

Dynamik des Feinmodells:

Ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ wird rein zufällig ausgewählt

und das a_i wird “geflippt”

(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt die Irrfahrt auf dem Würfel $\{0, 1\}^d$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:

die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$h(a) := \sum_{i=1}^{d} a_i$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$,

dann ist $\sum\limits_{i=1}^{d} Z^{(i)}$ Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell:

$$2^{-d}\binom{d}{\ell}\,\frac{d-\ell}{d} = 2^{-d}\binom{d}{\ell+1}\,\frac{\ell+1}{d}. \;\square$$