

Vorlesung 10b

Markovketten II

Teil 2:

Gleichgewichtsverteilungen

(Buch S. 108-109)

Sei P eine Übergangsmatrix auf S
und ρ eine (Start-)Verteilung auf S .

Dann gilt

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a, X_1 = b) = \rho(a)P(a, b), \quad \text{also}$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a) = \rho(a),$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_1 = b) = \sum_{a \in S} \rho(a)P(a, b).$$

Für welche Startverteilung ρ ist X_1 so verteilt wie X_0 ?

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P ,

wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$(G1) \quad \sum_{a \in S} \pi(a)P(a, b) = \pi(b), \quad b \in S.$$

$$(G2) \quad \mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b), \quad b \in S$$

d.h. unter \mathbf{P}_π haben X_0 und X_1 dieselbe Verteilung.

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

Hinreichend für

(G2)

$$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b) , \quad b \in S$$

ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a) , \quad a, b \in S$$

Denn dann ist unter \mathbf{P}_π

das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0) ,

also insbesondere X_0 so verteilt wie X_1 .

Gleichbedeutend mit

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a), \quad a, b \in S$$

ist

$$\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a), \quad a, b \in S.$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P .

**Ein Beispiel einer
nicht reversiblen Gleichgewichtsverteilung:**

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a, b) = P(b, c) = P(c, a) := p,$$

$$P(b, a) = P(c, b) = P(a, c) := 1 - p.$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist Gleichgewichtsverteilung zu P .

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

**Die Gleichgewichtsverteilung der
einfachen Irrfahrt auf dem Würfel $S = \{0, 1\}^3$:**

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

(Zwei Elemente von S heißen *benachbart*,
wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.)

Für benachbarte Knoten a und b ist hier $P(a, b) = 1/3$.

Die uniforme Verteilung auf S
ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Eine wichtige Beispielklasse:

Die einfache Irrfahrt

auf einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

mit endlicher Knotenmenge S

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn:

$$P(a, b) = \frac{1}{g(a)},$$

mit b Nachbar von a , $g(a) := \#$ Nachbarn von a .

Ansatz: $\pi(a) := \frac{1}{c}g(a)$

Diese Verteilung π erfüllt die die Reversibilitätsbedingung (R),

denn für benachbarte Knoten a, b gilt:

$$\frac{1}{c}g(a)\frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c}g(b)\frac{1}{g(b)}$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis): Es gibt (unter den gegebenen Voraussetzungen) nur **eine** Gleichgewichtsverteilung.

**Fazit: Die Gewichte der Knoten
unter der Gleichgewichtsverteilung
sind proportional zur Anzahl der Nachbarn der Knoten.**