# Vorlesung 10b

# Markovketten II

## Teil 1:

## Transport von Erwartungswerten und Verteilungen

(Buch S. 100 und S. 107-108)

## Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^2(a,c) := \mathbf{P}_a(X_2 = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a, c \in S$$

Zerlegungen nach dem Zwischenschritt:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_a(X_1 = b)\mathbf{P}_b(X_1 = c)$$

$$P^2(a,c) := \sum_{b \in S} P(a,b)\, P(b,c)$$

$P^2 = (P^2(a,c))_{a,c \in S}$ lässt sich also auffassen als

Produkt der Matrix $P$ mit sich selbst.

## Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^n(a,c) := \mathbf{P}_a(X_n = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a, c \in S$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$P^n(a,c) = \sum_{b\in S} P(a,b)\, P^{n-1}(b,c)$$

Zerlegung nach dem letzten Schritt:

$$P^n(a,c) = \sum_{b\in S} P^{n-1}(a,b)\, P(b,c)$$

$P^n = (P^n(a,c))_{a,c\in S}$ lässt sich also auffassen als

$n$-te Matrixpotenz von $P$.

Zerlegung der Verteilung von $X_{m+n}$ nach $X_m$:

$$\mathbf{P}_a(X_{m+n} = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_a(X_m = b)\mathbf{P}_b(X_n = c)$$

oder

$$P^{m+n}(a, c) = \sum_{b \in S} P^m(a, b)\, P^n(b, c)$$

In feinen algebraischen Termen: Die Matrixpotenzen $\{P^n : n = 0, 1, \dots\}$
ausgestattet mit der Matrixmultiplikation
sind homomorp zur *Halbgruppe* $(\mathbb{N}_0, +)$.
Das neutrale Element ist auf der einen Seite die *Einheitsmatrix*

$$I := (\delta_{ab})_{a,b \in S} =: P^0$$

und auf der anderen Seite das Element $0 \in \mathbb{N}_0$.

# Transport von Erwartungswerten:

Wir betrachten eine Funktion $h : S \to \mathbb{R}_+$

und interessierten uns für

$$u_n(a) := \mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{c \in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c)\ .$$

$u_n(a)$ lässt sich als Mittelung über die $u_{n-1}(b)$ ausdrücken,

über eine Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\sum_{c \in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{c \in S} h(c) \sum_{b \in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b\in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

ist gleichbedeutend mit

$$u_n(a) = \sum_{b\in S} P(a,b)\,u_{n-1}(b), \quad a \in S.$$

oder in Vektor-Matrixschreibweise, mit $u_n$ als Spaltenvektor und der Anfangsbedingung $\mathbf{E}_a[h(X_0)] = h(a)$

$$\begin{cases} u_n = P\,u_{n-1}\,, & n \geq 1 \\ u_0 = h\,. \end{cases}$$

# Transport von Verteilungen:

$\mathbf{P}_\rho(X_n = c)$ zerlegt nach $X_{n-1}$ ergibt die Rekursion

$$\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b, c)$$

Mit

$$\rho_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

lautet diese Rekursion

$$\rho_n(c) = \sum_{b \in S} \rho_{n-1}(b) P(b, c)\,, \quad n \geq 1$$

mit der Anfangsbedingung $\rho_0(a) = \rho(a)$

$$\rho_n(c) = \sum_{b \in S} \rho_{n-1}(b) P(b,c) \ , \quad n \geq 1$$

mit der Anfangsbedingung $\rho_0(a) = \rho(a)$

oder in Vektor-Matrix-Schreibweise, mit $\rho_n$ als Zeilenvektor:

$$\begin{cases} \rho_n = \rho_{n-1} P \ , \quad n \geq 1 \ , \\ \rho_0 = \rho \ . \end{cases}$$