

Vorlesung 10a

Markovketten

Teil 3

Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S
und Übergangsmatrix P .

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist
$$T_C := \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

die erste Treffzeit von C .

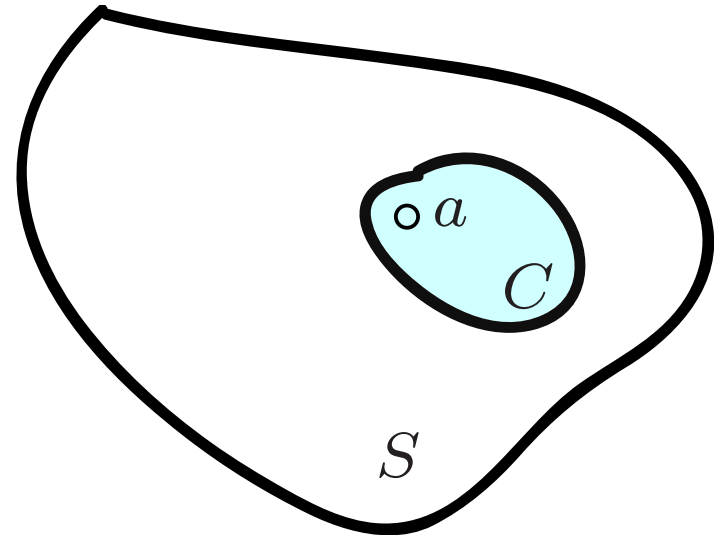
Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \in C$

ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



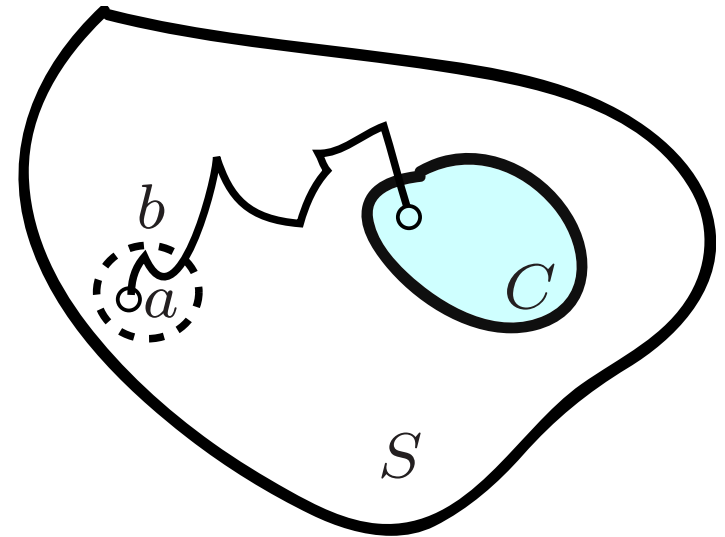
Für $a \notin C$:

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$
nach dem ersten Schritt:

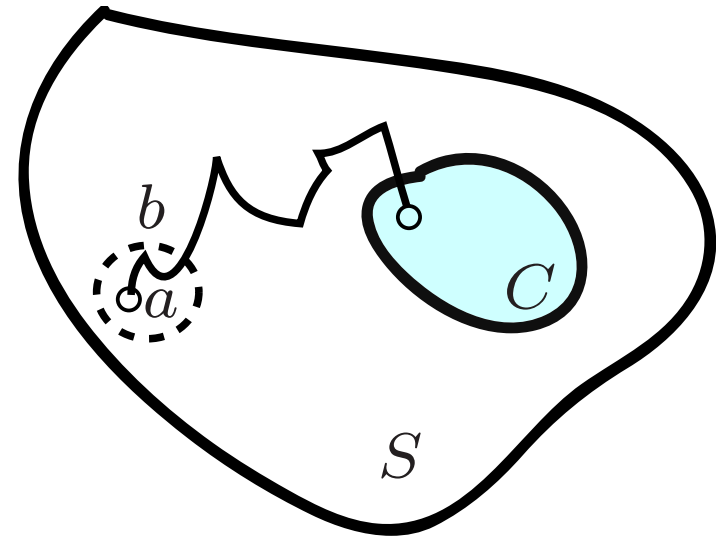
Erst ein Schritt
von a nach b gemäß $P(a, b)$,
dann “Neustart” in b :

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{E}_b[T_C]$$

(Formales Argument hierfür:
siehe Buch Seite 106 oder Vorlesungsnotizen)



Fazit:



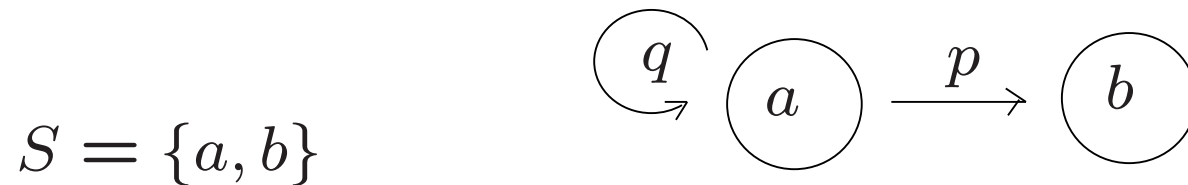
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$e(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a, b) e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$e(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel 1:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1 + q\mathbf{E}_a[T_b] + p\mathbf{E}_b[T_b] .$$

Wegen $\mathbf{E}_b[T_b] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1/p.$$

Beispiel 2:

Einfache Irrfahrt auf den ganzen Zahlen: $\mathbf{E}_0[T_1] = ?$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_{-1}[T_1]$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}_{-1}[T_1] = \mathbf{E}_{-1}[T_0] + \mathbf{E}_0[T_1] = 2\mathbf{E}_0[T_1]$$

Zusammen: $\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \mathbf{E}_0[T_1]$,

mit der Lösung $\mathbf{E}_0[T_1] = \infty$.