

Vorlesung 10a

Markovketten

Teil 2

Treffwahrscheinlichkeiten:

Beispiele

Beispiel A: Gewinn oder Ruin?

Eine einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,
bevor sie zum Nullpunkt kommt?

“Zerlegung nach dem ersten Schritt” und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a = 1, \dots, c-1,$$
$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

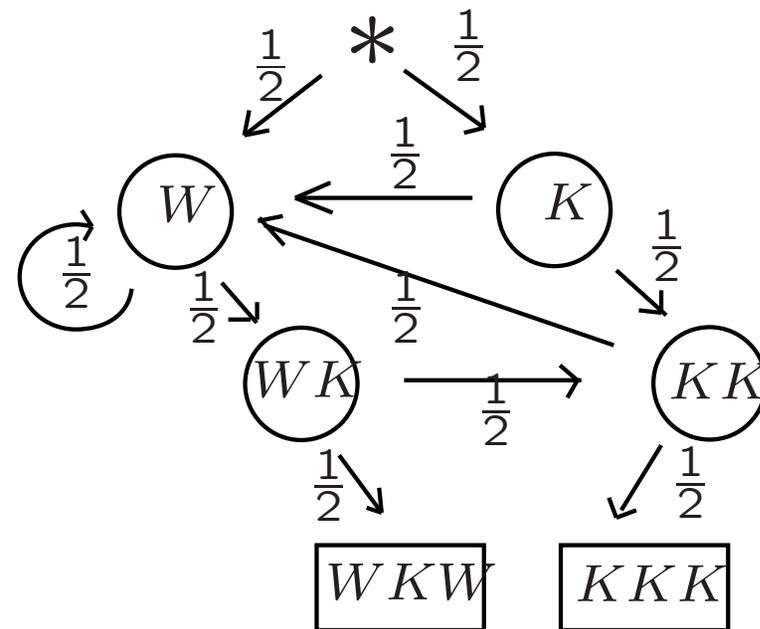
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW ?

Hier ist ein
“reduzierter Graph”
der relevanten
Zustände
und Übergänge:

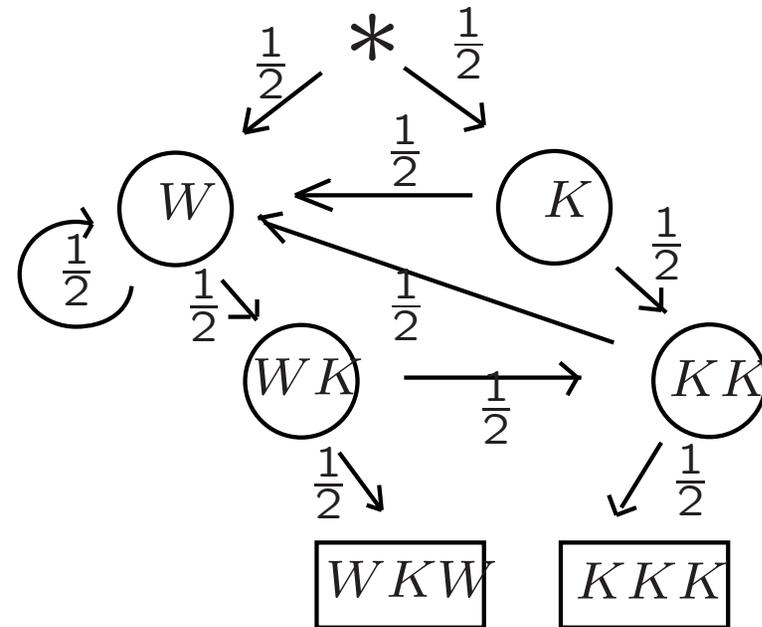


Für $w(a) :=$

$P_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(W), \quad w(WK) = \frac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \frac{1}{2}w(KK) + \frac{1}{2}w(W), \quad w(W) = \frac{1}{2}w(WK) + \frac{1}{2}w(W).$$

und daraus

$$w(W) = \frac{1}{3}, \quad w(K) = \frac{1}{2}, \quad w(*) = \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{2}w(K) = \frac{5}{12}.$$

Beispiel C: **Kommt man je zurück?**

Einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} , $C := \{0\}$, $T_0 := T_C$.

$w_a := \mathbf{P}_a(T_0 < \infty)$ erfüllt

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a \neq 0,$$
$$w(0) = 1$$

Also ist $w(a) \equiv 1$ und

$$\mathbf{P}_0(\text{Rückkehr in endlicher Zeit}) = \frac{1}{2}w(-1) + \frac{1}{2}w(1) = 1.$$