Vorlesung 10a

Markovketten

Teil 1

Treffwahrscheinlichkeiten

In V9b4 hatten wir eine Markovkette $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

in Gedanken laufen lassen bis zu einem festen Zeitpunkt n

und nach dem ersten Schritt zerlegt.

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie

erstmals eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von

Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P.

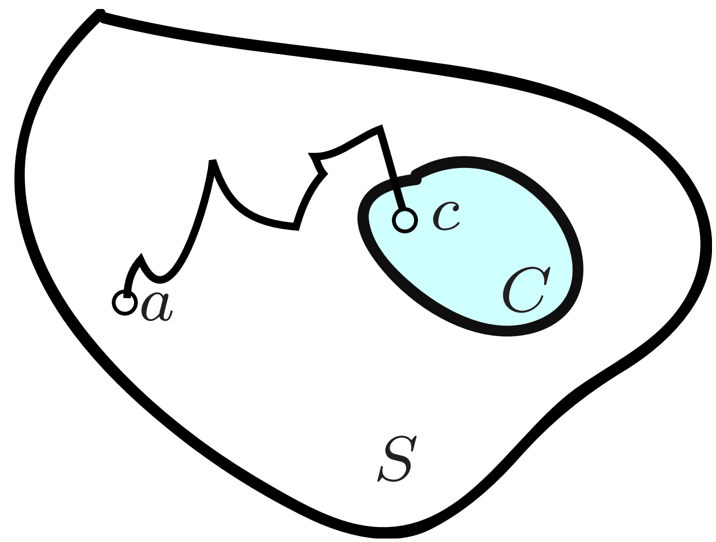
$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass der in $a \in S$ startende Pfad

die Menge C erstmals

im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

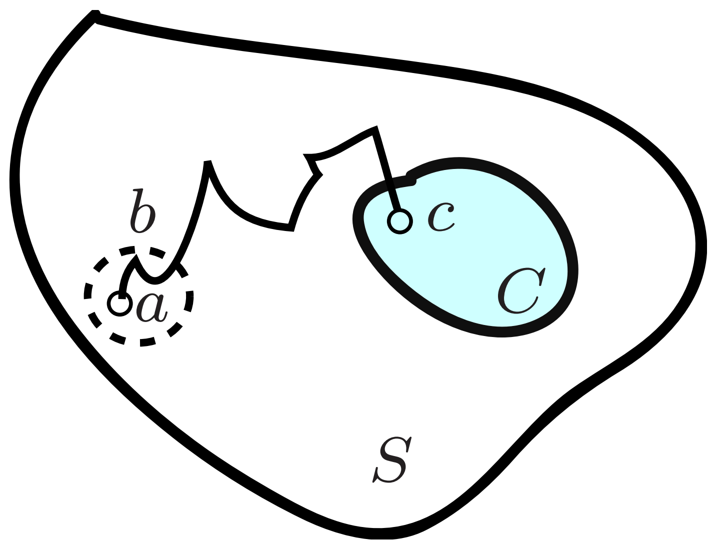
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$w(a) = \sum_{b \in S} P(a,b) w(b)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

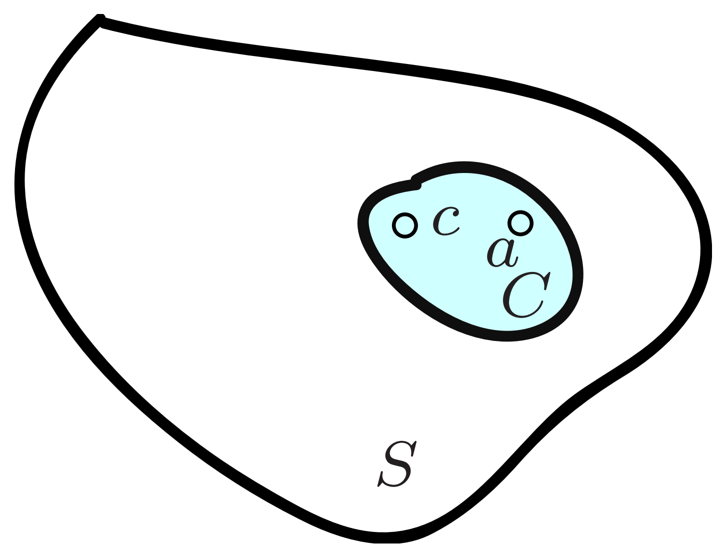
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$w(a) = \sum_{b \in S} P(a,b) w(b)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



Wir wenden uns jetzt

dem Beweis dieser Aussage zu.

Treffereignisse und erste Treffzeit

$E_n :=$ { der zufällige Pfad X

trifft die Menge C

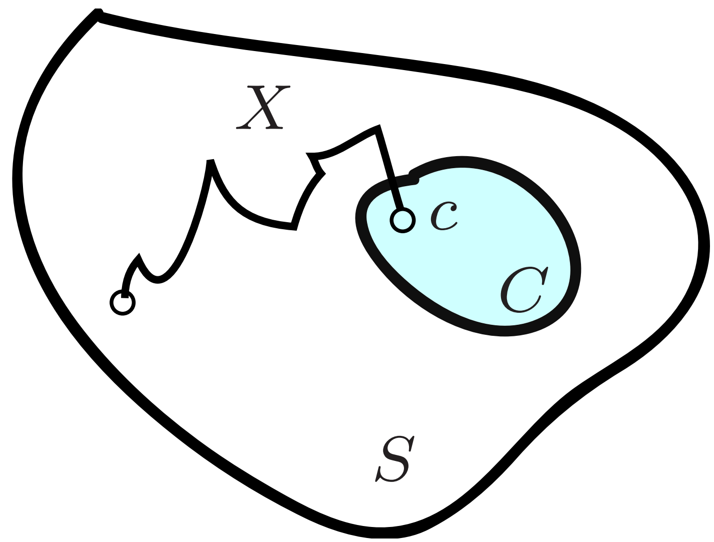
erstmals in n Schritten,

und zwar im Punkt c}

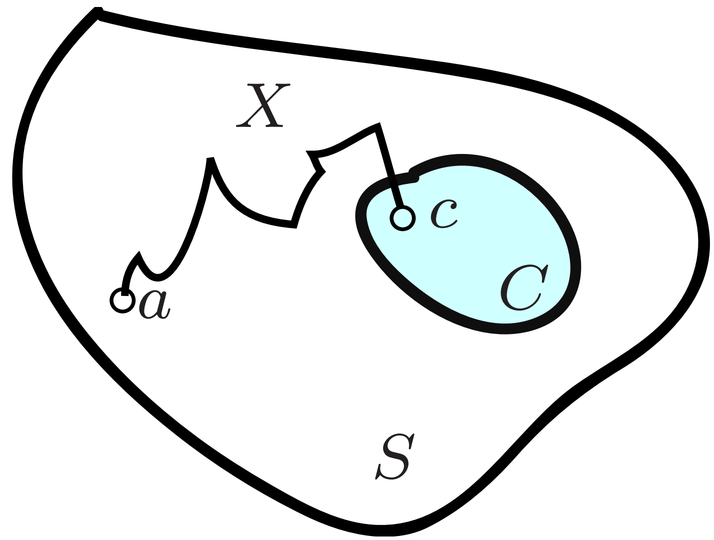
$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$

$E_n = \{T_C = n, X_{T_C} = c\}$

$E_\infty := \{T_C = \infty\}$



Erste Treffzeit:



$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E_n = \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$$

Für $b \in S$ ist

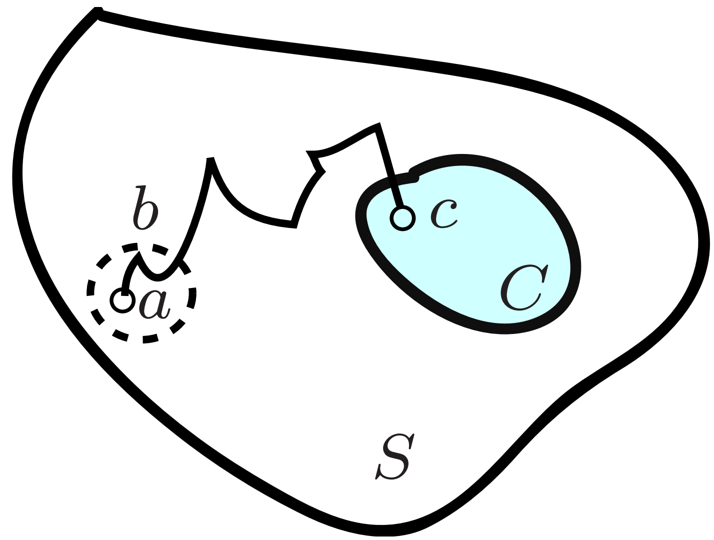
$$\mathbf{P}_b(E_0) = \delta_{bc} := \begin{cases} 1 \text{ für } b = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Für $a \notin C$ ist

$$\mathbf{P}_a(E_1) = P(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E_0)$$

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E_n = \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$$



Für $n \geq 1$, $a \notin C$:

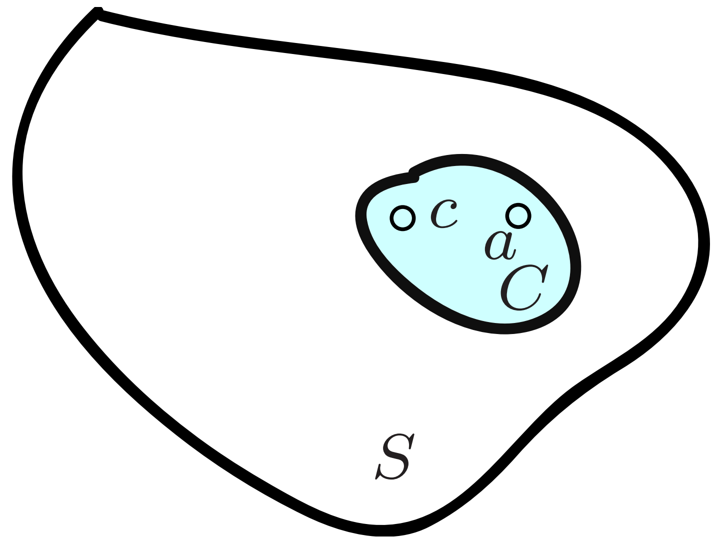
$$\mathbf{P}_a(E_n) = \sum_{b \in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(E_{n-1})$$

Summation über $n \geq 1$, mit $E := \{T_C < \infty,\ X_{T_C} = c\}$:

$$\mathbf{P}_a(E) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E), \quad a \notin C$$

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty,\, X_{T_C} = c\}$$



Bei Start in $a \in C$ ist $T_C = 0$ und $X_{T_C} = a$,

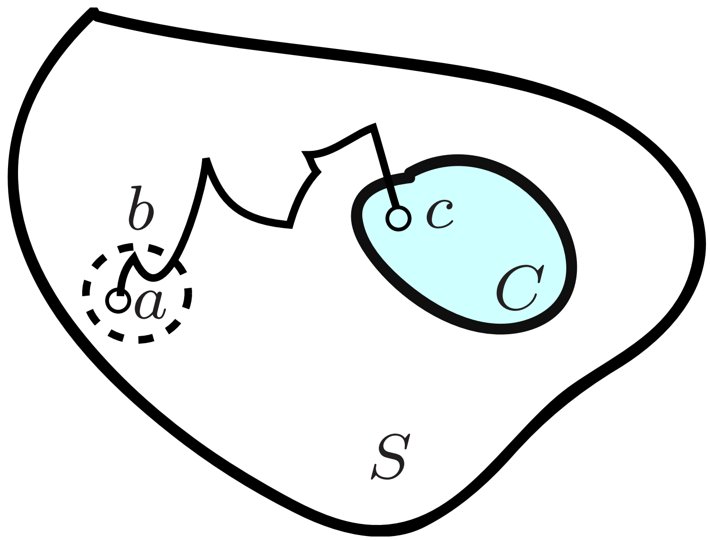
also ist für $a \in C$

$$\mathbf{P}_a(E) = \delta_{ac} = \begin{cases} 1 \text{ für } a = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Treffwahrscheinlichkeiten

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty,\, X_{T_C} = c\}$$



Fazit:

Die Abbildung $w : a \mapsto \mathbf{P}_a(E)$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\sum_{b\in S} P(a,b)w(b) = w(a) \text{ für } a \in S \setminus C\,, \quad w(a) = \delta_{ac} \text{ für } a \in C$$