Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 27. Juni 2017, 10:05-10:15, H V

33. S Sei $\rho \in (-1, 1)$. Wir betrachten ein zweistufiges Zufallsexperiment: X_1 ist standard-normalverteilt, und gegeben $\{X_1 = a_1\}$ ist $X_2 \sim N(\rho a_1, 1 - \rho^2)$ -verteilt. (Damit ist (X_1, X_2) dann so verteilt wie $(Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2)$, mit unabhängigen standard-normalverteilten Z_1, Z_2 .)

- a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2 an.
 b) Finden Sie (ohne Verwendung von a)) die Dichte von $X_1 + X_2$.

34. a) X_1, X_2 und X_3 seien unabhängig und $\text{Geom}(p)$ -verteilt. Berechnen Sie die Gewichte der bedingten Verteilung von (X_1, X_2) , gegeben $\{X_1 + X_2 + X_3 = a_3\}$, $a_3 = 3, 4, \dots$

b) T_1, T_2 und T_3 seien unabhängig und $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt. Berechnen Sie die bedingte Dichte von (T_1, T_2) , gegeben $\{T_1 + T_2 + T_3 = a_3\}$, $a_3 > 0$.

35. In zwei verschlossenen Schachteln liegen jeweils m bzw. n Euro, wobei man von m und n erst einmal nur weiß, dass es zwei verschiedene natürliche Zahlen sind. Lea behauptet: „Ich kenne eine Methode, mit der ich nach Öffnen einer rein zufällig ausgewählten Schachtel, ohne Öffnen der anderen Schachtel, mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ richtig entscheide, ob das die Schachtel mit dem kleineren Betrag ist.“ Jakob ist bass erstaunt und kann das kaum glauben. Lea wird konkreter. „Sagen wir, in der geöffneten Schachtel sind X Euro. Ich werfe eine faire Münze so oft, bis zum ersten Mal Kopf kommt und wähle V als die Anzahl meiner Würfe. Ist $V > X$, dann sage ich, dass in der gewählten Schachtel der kleinere Betrag ist.“ Hat Lea recht?

Hinweis: Eine Möglichkeit des Vorgehens ist wie folgt: Sei $k := \min(m, n)$. Zeigen Sie für die Ereignisse $E_1 := \{X = k\}$ und $E_2 := \{V > X\}$:

- a) $\mathbf{P}(E_2|E_1) > \mathbf{P}(E_2)$.
 b) Die beiden Indikatorvariablen I_{E_1} und I_{E_2} sind positiv korreliert.
 c) $\mathbf{P}(E_1|E_2) > \mathbf{P}(E_1)$.

Alternativ können Sie die Wahrscheinlichkeit, richtig zu entscheiden, zerlegen nach den Ausgängen von X .

36. S Es sei bekannt, dass in zwei großen Populationen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ die Standardabweichungen eines bestimmten individuellen Merkmals 9 bzw. 16 betragen. Für $i = 1, 2$, sei $\bar{X}_i$ sei der Mittelwert einer Stichprobe des Umfangs n_i aus der Population $\mathcal{P}_i$.

- a) Wie ist $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ approximativ verteilt?
 b) Geben Sie ein aus $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ konstruiertes zufälliges Intervall an, welches die Differenz der beiden Populationsmittelwerte des Merkmals mit Wahrscheinlichkeit (annähernd) 0.95 überdeckt.
 c) Die Stichprobenmittelwerte einer Stichprobe der Größe 300 aus $\mathcal{P}_1$ und einer Stichprobe der Größe 400 aus $\mathcal{P}_2$ betragen 80 bzw 83. Welche statistische Aussage lässt sich (im Licht von Teil b)) über die Differenz der beiden Populationsmittelwerte machen?