Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 30. Mai 2017, 10:05-10:15, H V

17. S Für $g \in \mathbb{N}$ sei $(w_1, \dots w_g)$ eine Liste reeller Werte. (Man denke an eine Population bestehend aus g Individuen, die man mit den Zahlen $1, \dots, g$ identifiziert; w_j ist dann der Wert des Individuums j.) Es sei J uniform verteilt auf $\{1, \dots, g\}$. Wir setzten $X := w_J$ und definieren die *Populationsvarianz* als $\sigma^2 := \mathbf{Var}[X]$. Weiter sei $(J_1, \dots, J_g)$ eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, g$; für jedes $n \le g$ ist damit also $(J_1, \dots, J_n)$ eine rein zufällige Stichprobe ohne Zurücklegen aus $\{1, \dots, g\}$. Schließich setzen wir noch $X_i := w_{J_i}$.

a) Bestimmen Sie den numerischen Wert von $\mathbf{Var}[X_1 + \cdots + X_g]$
b) Drücken Sie den Term in a) mittels σ^2 und den Kovarianzen $\mathbf{Cov}[X_i, X_{i'}]$ aus, und bestimmen Sie daraus $\mathbf{Cov}[X_1, X_2]$.
c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von σ^2, n und g die Varianz des Stichprobenmittelwertes $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

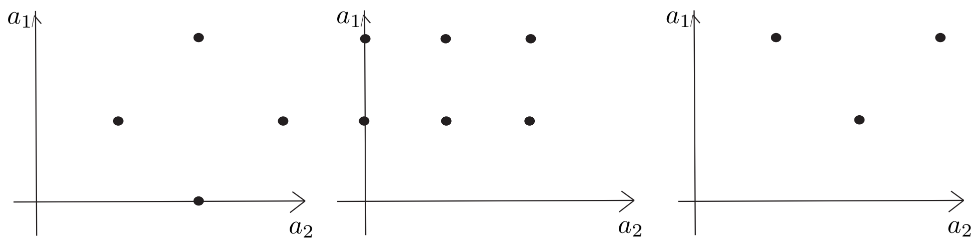
18. S Es sei R der Abstand eines uniform in der Einheitskugel des $\mathbb{R}^3$ verteilten zufälligen Punktes vom Ursprung. (Formaler ausgedrückt geht es um die euklidische Norm einer auf der Menge $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \le 1\}$ uniform verteilten Zufallsvariablen.) Bestimmen Sie (i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte (iii) den Erwartungswert (iv) die Varianz von R.

19. a) $X = (X_1, X_2, \dots)$ sei ein fortgesetzter fairer Münzwurf, d.h. eine Bernoulli-Folge zum Parameter $1/2$. Wie ist $Y := \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$ verteilt? (Hinweis: Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y an dyadisch rationalen Argumenten.)

b) U sei uniform verteilt auf $[0,1]$. Geben Sie eine Abbildung $h = (h_1, h_2, \dots)$ von $[0,1]$ nach $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ an, sodass $h(U)$ einen fortgesetzten fairen Münzwurf ergibt.

20. In den folgenden drei Beispielen ist (X_1, X_2) jeweils uniform verteilt auf der skizzierten (4 bzw. 6 bzw. 3)-elementigen Menge. In welchen der drei Beispiele sind X_1 und X_2

(i) unkorreliert (ii) unabhängig?



Zusatzaufgabe zu Ehren von Pythagoras. (i) Zeigen Sie: Für $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ist $\bar{x}\mathbf{1} := (\bar{x}, \dots, \bar{x})$ die *Orthogonalprojektion* von x auf $D := \{(a, \dots, a) : a \in \mathbb{R}\}$ in dem Sinn, dass das euklidische Skalarprodukt $\langle x - \bar{x}\mathbf{1}, y \rangle$ für alle $y \in D$ verschwindet.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(*) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2.$

(iii) Seien $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$, und sei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ ihr Stichprobenmittel. Zeigen Sie: Die Zufallsvariable

$$\frac{1}{n-1}\big((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\big) \text{ hat Erwartungswert } \sigma^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $(*)$ mit $c := \mu$.