Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 23. Mai 2017, 10:05-10:15, H V

13. Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n eine rein zufällige Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$, und G_n eine rein zufällige bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$. Berechnen Sie
a) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(F_n \text{ hat genau 4 Fixpunkte})$
b) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(G_n \text{ hat genau 4 Fixpunkte})$.
Ein Fixpunkt *von f ist dabei wie üblich ein Element k des Definitionsbereichs von f mit $f(k) = k$. Bei b) ist die Einschluss-Ausschlussregel hilfreich.*

14. S Wir betrachten einen hochfrequenten Münzwurf mit kleiner Erforgswahrscheinlichkeit, mit einem Versuch pro Millisekunde. Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei so, dass die erwartete Anzahl von Erfogen pro Sekunde gleich 3 ist.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Erfolg später als 5 Sekunden, aber nicht später als 10 Sekunden kommt,
i) exakt
ii) näherungsweise unter Verwendung der Exponentialapproximation.
b) Stellen Sie das Ergebnis aus ii) in der Form $\int_5^{10} f(t)\,dt$ dar, mit passender Funktion f.

15. S Es seien X_1 und X_2 diskrete Zufallsvariable mit Werten in S_1 bzw. S_2. Die Verteilung des zufälligen Paares (X_1, X_2) mit Werten in $S_1 \times S_2$ lässt sich dann angeben durch die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$.
a) Wir betrachten vier Beispiele, bei den ersten beiden ist $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{b, c\}$ bei den letzten beiden ist $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{b, c, d\}$.

i)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.15	0.45

ii)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.2	0.4

iii)

	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	12γ	14γ	20γ
3	18γ	21γ	30γ

iv)

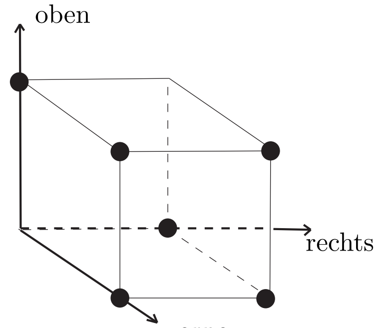
	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	13γ	14γ	20γ
3	17γ	21γ	30γ

jeweils mit $\gamma := \frac{1}{138}$. In welchen Fällen sind X_1 und X_2 unabhängig, und in welchen nicht? Bei (iii) und (iv) ist Teil c) hilfreich.
b) Die gemeinsame Verteilungsgewichte von X_1 und X_2 seien "von Produktgestalt", d.h. von der Form $(*)$ $\quad \rho(a_1, a_2) = \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)$ mit nichtnegativen $\mu_1(a_1)$, $\mu_2(a_2)$. Zeigen Sie, dass dann die Produktformel

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\,\rho_2(a_2), \quad a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2$$

gilt, mit $\rho_1(a_1) := \sum_{a_2'} \rho(a_1, a_2')$ und $\rho_2(a_2) := \sum_{a_1'} \rho(a_1', a_2)$.
Hinweis: Prüfen Sie dazu erst nach, dass $\rho_1(a_1) = \mu_1(a_1)k_2$ mit $k_2 := \sum_{a_2'} \mu_2(a_2')$ gilt, sowie $\rho_2(a_2) = \mu_2(a_2)k_1$ mit $k_1 := \sum_{a_1'} \mu_1(a_1')$. Warum folgt dann aus $(*)$ die Gleichheit $k_1k_2 = 1$?
c) Zeigen Sie: X_1 und X_2 sind genau dann unabhängig, wenn die Zeilen der Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte zueinander proportional sind.

16. X sei eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind "vorne", drei sind "rechts" und drei sind "oben". Wir betrachten die Ereignisse $E_1 := \{X \text{ landet vorne}\}$, $E_2 := \{X \text{ landet rechts}\}$, $E_3 := \{X \text{ landet oben}\}$.



a) Gilt $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \cdot \mathbf{P}(E_3)$?

b) Sind die drei Ereignisse E_1, E_2, E_3 unabhängig? Argumentieren Sie hier sowohl rechnerisch als auch anschaulich.