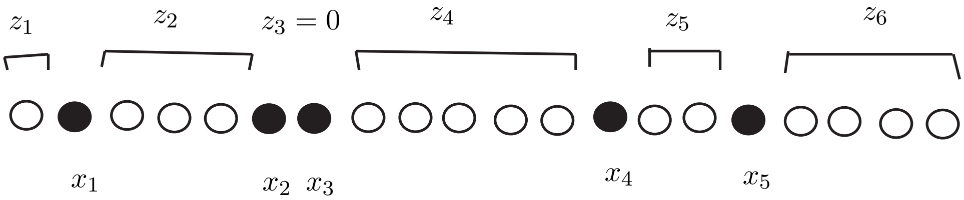
Prof. Dr. A. WAKOLBINGER Übung 3 SoSe 2017

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 15. Mai 2017, 10:05-10:15, H V

9. a) Aus den Zahlen $\{1, 2 \dots, 20\}$ werden rein zufällig fünf verschiedene ausgewählt. Es bezeichne $X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5$ die ausgewählten Zahlen, angeordnet in aufsteigender Reihenfolge. Weiter bezeichne $(Z_1, \dots, Z_6) := (X_1 - 1, X_2 - X_1 - 1, \dots, 20 - X_5)$ die Längen der Zwischenräume (einschließlich derer am Anfang und am Ende, siehe Zeichnung):



In Vorlesung 2a) bemerkten wir, dass $(Z_1, \dots, Z_6)$ uniform verteilt ist auf der Menge $S_{15,6} := \{(k_1, \dots, k_6) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_6 = 15\}$. Verwenden Sie diese Einsicht, um den Erwartungswert von $20 - X_5$ zu berechnen.

b) 20 Karten, von denen genau 5 rot sind, werden perfekt gemischt und der Reihe nach aufgeschlagen. Es bezeichne T die Anzahl der Karten, die aufgeschlagen werden, bis alle 5 roten Karten erschienen sind. (T hat somit den Wertebereich $\{5, \dots, 20\}$.) Berechnen Sie $\mathbf{E}[T]$.

c) Bestimmen Sie in der Situation von b) die Wahrscheinlichkeiten (i) $\mathbf{P}(T = 20)$, (ii) $\mathbf{P}(T = 19)$, (iii) $\mathbf{P}(T = 17)$.

10. Eine aus 210000 Individuen bestehende Population S zerfällt in 21 gleich große Klassen $C_{k,\ell}$, $k = 0, \dots, 6$; $\ell = 1, 2, 3$. Jedem Individuum $a \in C_{k,\ell}$ ist der Wert $h(a) := 10k + \ell$ zugeordnet. Es seien $J_1, J_2, \dots$ die Ergebnisse eines rein zufälligen Zi ehens ohne Zurücklegen aus S. Berechnen Sie den Erwartungswert des Stichprobenmittels $\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} h(J_i)$.

11. S Es sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, 1000$.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Zykeln in X. (*Hinweis: Aufgabe 7 ist hilfreich.*)
b) Für jedes $i = 1, \dots, 995$ bekommen Sie einen Euro, wenn $X_i, \dots, X_{i+5}$ in aufsteigender Reihenfolge ausfällt. Was ist der Erwartungswert Ihrer gesamten Auszahlung?

12. S Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 20-maligen (gewöhnlichen) Würfeln mindestens eine der Augenzahlen 1, 2, 3 kein einziges Mal zu werfen?
Hinweis: Betrachten Sie für $i = 1, 2, 3$ *das Ereignis* E_i*, dass* i *in den 20 Würfen nicht vorkommt, und berechnen Sie* $\mathbf{P}(E_1 \cap \dots \cap E_i)$.