Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 9. Mai 2017, 10:05-10:15, H V

5. a) Wieviele 0-1 Folgen der Länge $2n$ gibt es mit n Nullen und n Einsen?
b) Ein *gewöhnlicher Irrfahrer* auf $\mathbb{Z}$ setzt Schritte von $+1$ oder -1 nach Manier eines fairen Münzwurfs aneinander. Wie wahrscheinlich ist es, dass er, wenn er im Ursprung startet, nach $2n$ Schritten wieder im Ursprung ist? Approximieren Sie das Resultat mit Stirling.

6. S $Z = (Z_1, \dots, Z_r)$ sei eine uniform verteilte Besetzung von r Plätzen mit n Objekten (vgl. Vl 2a, Abschnitt 3c, oder Buch S. 10).
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
(i) Platz 1 bleibt leer
(ii) keiner der Plätze bleibt leer
(iii) keiner der Plätze wird doppelt besetzt (d.h. “es kommt zu keinen Kollisionen”).
b) Ab welcher Größenordnung von $n = n(r)$ kommt es für große r mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen? Finden Sie dazu ein möglichst großes α, sodass für $r \to \infty$ und $n(r) = o(r^\alpha)$ gilt

$$\mathbf{P}_{r,n(r)}(\text{ es kommt zu Kollisionen }) \to 0.$$

7. S Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die schon an einem Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der Permutation 5 ,2, 7, 3, 1, 4, 6 von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\,5)(2)(3\,7\,6\,4)$.
Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n+1$ aus einer Permutation von $1, \dots, n$, ausgehend von deren Zyklendarstellung:
Das Element $n+1$ wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ auf einen der n Plätze rechts neben $1, 2, \dots, n$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ wird das Elemet in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.

a) Zeichnen Sie (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend vom trivialen Zyklus (1), zu den 6 Permutationen von 1, 2, 3 führen.

b) Begründen Sie induktiv, dass zu jeder der $n!$ Permutationen von $1, 2, \dots, n$ genau ein Pfad (im Sinn von a)) führt.
c) Warum liefert der Algorithmus für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $\{1, \dots, 100\}$
(i) 1, 2 , 3 und 4 (ii) 70, 80, 90 und 100
im selben Zyklus?

8. Für $n \in \mathbb{N}$, $k_1, g \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + g = n$ und $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gilt

$$(*) \qquad \sum_{k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0 : k_2 + k_3 = g} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} = \binom{n}{k_1} p_1^{k_1} (p_2 + p_3)^g.$$

a) Begründen Sie diese Identität
i) rechnerisch
ii) durch ein probabilistsches Argument, indem Sie beim n-maligen Würfeln mit jeweils drei möglichen Ausgängen zwei Ausgänge zu einem zusammenfassen.

b) (X_1, X_2, X_3) sei multinomialverteilt mit Parameter (n, p_1, p_2, p_3). Formulieren Sie $(*)$ als eine Eigenschaft der Verteilung von (X_1, X_2, X_3).