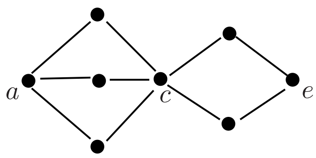
Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 11. Juli 2017, 10:05-10:15, H V

41. *“Kann das Zufall sein?” “Zu welchem p-Wert kann man eine statistische Hypothese ablehnen?”* Aus 100 Losen, unter denen 70 Nieten und 30 Treffer sind, wurden 50 Lose (ohne Zurücklegen) gezogen. Darunter waren gerade einmal 3 Treffer. Wie wahrscheinlich ist ein so extremes Ergebnis unter der Annahme, dass rein zufällig gezogen wurde? Genauer: wie wahrscheinlich ist es in der beschriebenen Situation unter der Hypothese des rein zufälligen Ziehens, eine Trefferanzahl zu erhalten, die mindestens so weit entfernt vom Erwartungswert ist wie die beobachtete Trefferanzahl? Rechnen Sie
a) exakt (mit der hypergeometrischen Verteilung)
b) mit einer Normalapproximation (unter Verwendung der Varianz aus a)).

42 S. a) Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen. Bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarknoten.



(i) Was ist bei Start in c die erwartete Anzahl von Schritten, bis erstmals ein Element der Menge $\{a, e\}$ getroffen wird?
(ii) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung.
b) Es sei (X_n) eine gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie für $0 \le x \le \ell \in \mathbb{N}$: $\mathbf{E}_x[T_{0,\ell}] = x(\ell - x)$.
c) Zwei Spieler mit Vermögen g und h Euro ($g, h \in \mathbb{N}$) spielen Partien mit gleichen Chancen. Der Verlierer zahlt dem Gewinner einen Euro. Das Spiel endet, wenn ein Spieler bankrott ist. Was ist die erwartete Anzahl von Partien?

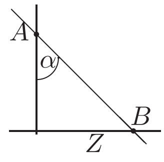
43. S sei eine diskrete Menge, $X = (X_n)_{n\ge 0}$ sei eine Markovkette auf S und π sei Gleichgewichtsverteilung für X.
(i) Zeigen Sie, dass dann für alle $B \subset S$ und $B^c := S \setminus B$ gilt:

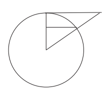
$$(*) \quad \mathbf{P}_\pi(X_0 \in B, X_1 \in B^c) = \mathbf{P}_\pi(X_0 \in B^c, X_1 \in B)$$

(*Hinweis: Wie kommt man von* $(*)$ *zur Gleichheit* $\mathbf{P}_\pi(X_0 \in B) = \mathbf{P}_\pi(X_1 \in B)$ *?*)
(ii) Gilt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus der Gültigkeit von $(*)$ für alle $B \subset S$, dass π Gleichgewichtsverteilung für X ist?

43Z Zusatzaufgabe für Bonuspunkte. Es seien g, n und w natürliche Zahlen mit $w, n < g$.
a) Insgesamt g Kugeln, von denen w weiß sind, sind auf zwei Urnen verteilt. Dabei sind stets n Kugeln in der linken und $g - n$ Kugeln in der rechten Urne. In jedem Schritt wird rein zufällig eine Kugel aus der linken und eine aus der rechten Urne gewählt und die Kugeln werden in die jeweils andere Urne verfrachtet. Es sei X_m die Anzahl der weißen Kugeln in der linken Urne nach m Schritten und P die zugehörige Übergangsmatrix.
(i) Begründen Sie die Gleichheit $P(k+1, k) = \frac{k+1}{n}\frac{g-n-(w-k-1)}{g-n}$ und finden Sie $P(k, k+1)$.
(ii) Finden Sie die Gleichgewichtsverteilung von (X_m). (*Hinweis: Die Parameterbezeichnung ist mit Blick auf S. 30 im Buch suggestiv, die Reversibilität ist hilfreich. Sie dürfen o. B. verwenden, dass es in der vorliegenden Situation nicht mehr als eine Gleichgewichtsverteilung gibt.)*
b) *(5 € als Preis für die beste schriftliche Lösung)* Es sei $S := \{a \in \{0,1\}^g : a_1 + \cdots + a_g = w\}$. Auf S betrachten wir die folgende stochastische Dynamik: Wähle rein zufällig ein Paar (i, j) mit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{n+1, \ldots, g\}$ und vertausche die i-te und j-te Komponente von a. Zeigen Sie: Die uniforme Verteilung auf S ist Gleichgewichtsverteilung. Lösen Sie damit Teil a) ii) neu.

44. S a) In einem zufälligen rechtwinkligen Dreieck sei die Größe des Winkels α gleichverteilt in $(0, \pi/2)$; die Ankathete von α habe die Länge eins. Welche Verteilungsfunktion und welche Dichte hat die Länge Z der Gegenkathete?





b) (X, Y) seien die Koordinaten eines auf dem Einheitskreis gleichverteilten zufälligen Punktes. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von $\frac{X}{Y}$.
(*Hinweis: Die ganz rechts angegebene Skizze stellte eine Brücke zwischen a) und b) her.*)