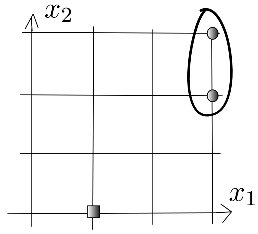
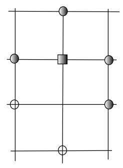
Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

1.S a) (Eine Nordost-Irrfahrt auf den Spuren Pascals.) Ein Wanderer irrt durch $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: er erhöht in jedem Schritt per (fairem) Münzwurf entweder seinen x_1- oder seinen x_2-Wert um 1, d.h. er geht in jedem Schritt mit W'keit 1/2 nach Osten und mit W'keit 1/2 nach Norden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sein Weg, wenn er in $(1,0)$ startet, die Menge $\{(3,2),(3,3)\}$ (d.h. genauer: mindestens ein Element dieser Menge) trifft.



b) (Eine Nordost-Irrfahrt mit Drift nach Norden.) Wie ist die Wahrscheinlichkeit des in a) beschriebenen Ereignisses, wenn der in $(1,0)$ startende Irrfahrer von jedem Punkt aus mit W'keit 1/4 nach Osten und mit W'keit 3/4 nach Norden schreitet?

c) Wir betrachten jetzt eine *gewöhnliche Irrfahrt* auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem aus den vier Nachbarpunkten rein zufällig ausgewählten. Der Startpunkt sei $(1,2)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Irrfahrt die Menge $\{(0,1),(1,0)\}$ vor der Menge $\{(0,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$?



2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X = (X_1, X_2)$ uniform verteilt auf
$S := \{(a_1,a_2) : a_1, a_2 \in \{1,\ldots,n\}, a_1 \neq a_2\}$. Dann sind sowohl X_1 als auch X_2 uniform verteilt auf $\{1,\ldots,n\}$. Beweisen Sie diese Aussage, und begründen Sie sie auch anschaulich.
b) Sie schlagen nacheinander die erste und die zweite Karte eines perfekt gemischten Kartenstapels auf (32 Karten, 8 davon haben die Farbe Herz). Wie wahrscheinlich ist es, dass die zweite aufgeschlagene Karte die Farbe Herz hat?

3. 4 Studierende wählen rein zufällig (und ohne irgendeine gegenseitige Absprache) je eine von 9 möglichen Gruppen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie alle in verschiedenen Gruppen landen? Finden Sie heraus, was
(i) die exakte Berechnung
(ii) die Stirling-Approximation
(iii) die in der Vorlesung diskutierte Näherung $\exp(-\frac{n(n-1)}{2r})$
als Antwort liefern.

4. S Es sei r eine natürliche und c eine positive reelle Zahl. $n = \lfloor cr \rfloor$ Objekte werden rein zufällig auf r Plätze (mit den Nummern $1,2,\ldots$) gesetzt, Mehrfachbelegungen sind erlaubt.
a) Berechnen Sie für $c = 1$ und $r = 5$ die Wahrscheinlichkeit, dass Platz Nr 1. leer bleibt.
b) Berechnen Sie für $r \to \infty$ den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit
i) dass Platz Nr 1 leer bleibt,
ii) dass keine zwei Objekte auf demselben Platz landen.
c) Welchen Wert muss c mindestens haben, damit für großes r die Wahrscheinlichkeit, dass Platz Nr 1 leer bleibt, nicht mehr als 0.01 beträgt?