

# Vorlesung 6a

## Zufallsvariable mit Dichten

### Teil 2

Exponentialverteilung, Normalverteilung auf  $\mathbb{R}^1$

# 1. Exponentialverteilte Zufallsvariable

Definition:

Eine  $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable  $X$  heißt

**standard-exponentialverteilt,**

falls

$$\mathbf{P}(X > t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Äquivalent dazu sind:

(i)  $X$  ist Zufallsvariable mit Dichte  $e^{-a} da$ ,  $a \geq 0$

(ii)  $X$  ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ 1 - e^{-a} & \text{für } a \geq 0 \end{cases}$$

$Y$  heißt **exponentialverteilt** mit Parameter  $\lambda$ ,  
kurz  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt, falls

$$\mathbf{P}(Y > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Es ergibt sich sofort:

Ist  $X$  standard-exponentialverteilt, dann ist  $\frac{X}{\lambda}$   $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt.

Ist  $Y$   $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt, dann ist  $\lambda Y$   $\text{Exp}(1)$ -verteilt.

Die Verteilungsfunktion von  $Y$  ist

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Die Dichte von  $Y$  ist

$$f(a) = \lambda e^{-\lambda a} da, \quad a \geq 0.$$

## 2. Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen mit Dichten

Im Diskreten hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten  $\rho(a)$  entspricht die Dichte  $f(a) da$ .

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a f(a) da$$

Im Diskreten hatten wir für  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$   
die Transformationsformel für den Erwartungswert:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a) da$$

## Erwartungswert und Varianz

einer reellwertigen Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f(a) da$ :

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a f(a) da$$

(wobei wir wieder den Fall  $\infty - \infty$  ausschließen)

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a - \mu)^2 f(a) da.$$

**Erwartungswert und Varianz einer  
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen  $X$ :**

Mit partieller Integration

$$\int u v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also:  $\boxed{\mathbf{E}[X] = 1, \text{Var}X = 1.}$

## **Erwartungswert und Varianz einer Exp( $\lambda$ )-verteilten Zufallsvariablen $Y$ :**

Ist  $Y$  Exp( $\lambda$ )-verteilt, dann ist  $\lambda Y$  Exp(1)-verteilt.

Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var} \, Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### 3. Dichten von Vielfachen einer Zufallsvariablen

Sei  $X$  standard-exponentialverteilt und  $\lambda > 0$ .

Dann hat  $Y := \frac{1}{\lambda}X$  die Dichte

$$f(y)dy = \lambda e^{-\lambda y} dy, \quad y \geq 0$$

(denn  $Y$  ist ja  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt)

Allgemeiner gilt:

### Lemma:

Die reellwertige ZV  $X$  habe Dichte  $f(x) dx$ .

Für  $\lambda > 0$  hat dann  $Y := \frac{1}{\lambda}X$  die Dichte  $f(\lambda y) \lambda dy$ .

Beweis:

$$F_Y(d) = \mathbf{P}(Y \leq d) = \mathbf{P}(X \leq \lambda d) = F_X(\lambda d),$$

also

$$F'_Y(y) = \lambda F'_X(\lambda y). \quad \square$$

#### 4. Ein Transformationssatz für Dichten:

$X$  sei eine Zufallsvariable mit Wertebereich  $S = (l, r)$

und Dichte  $f(a) da$ . Die Funktion  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton wachsend und differenzierbar.

Dann hat  $Y := h(X)$  die Dichte

$$g(b) db = f(h^{-1}(b)) \frac{1}{h'(h^{-1}(b))} db.$$

Beweis:

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(h(X) \leq b) = \mathbf{P}(X \leq h^{-1}(b)) = F_X(h^{-1}(b)).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Kettenregel  
und dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.  $\square$

Wie kann man sich diese Formel einprägen?

Die Dichtefunktion am Bildpunkt  $b = h(a)$   
ist das Produkt aus  
der Dichtefunktion am Urbildpunkt  $a$   
und dem Reziproken des Streckungsfaktors  $h'(a)$ :

$$f(a) da = f(a) \frac{da}{db} db = f(h^{-1}(b)) \frac{1}{h'(h^{-1}(b))} db.$$

5. Zur Erinnerung:  
Die Exponentialapproximation  
der geometrischen Verteilung

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:  
(Vorlesung 4b und Buch Seite 42):

Ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zufallsvariable  $X_n$  geometrisch verteilt  
mit  $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist  $X$  eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,  
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen  $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

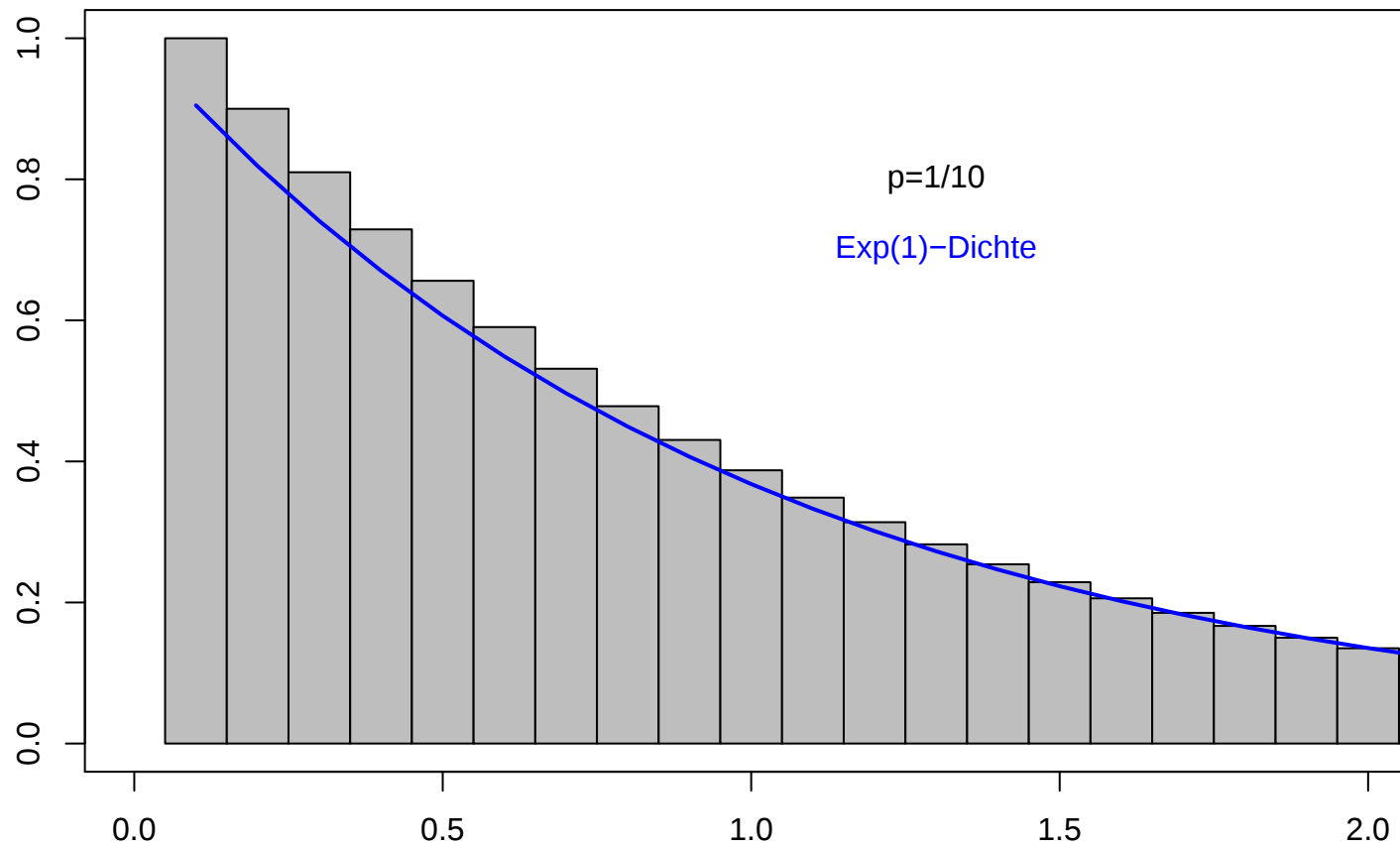
**konvergiert in Verteilung**

gegen die Zufallsvariable  $X$ .

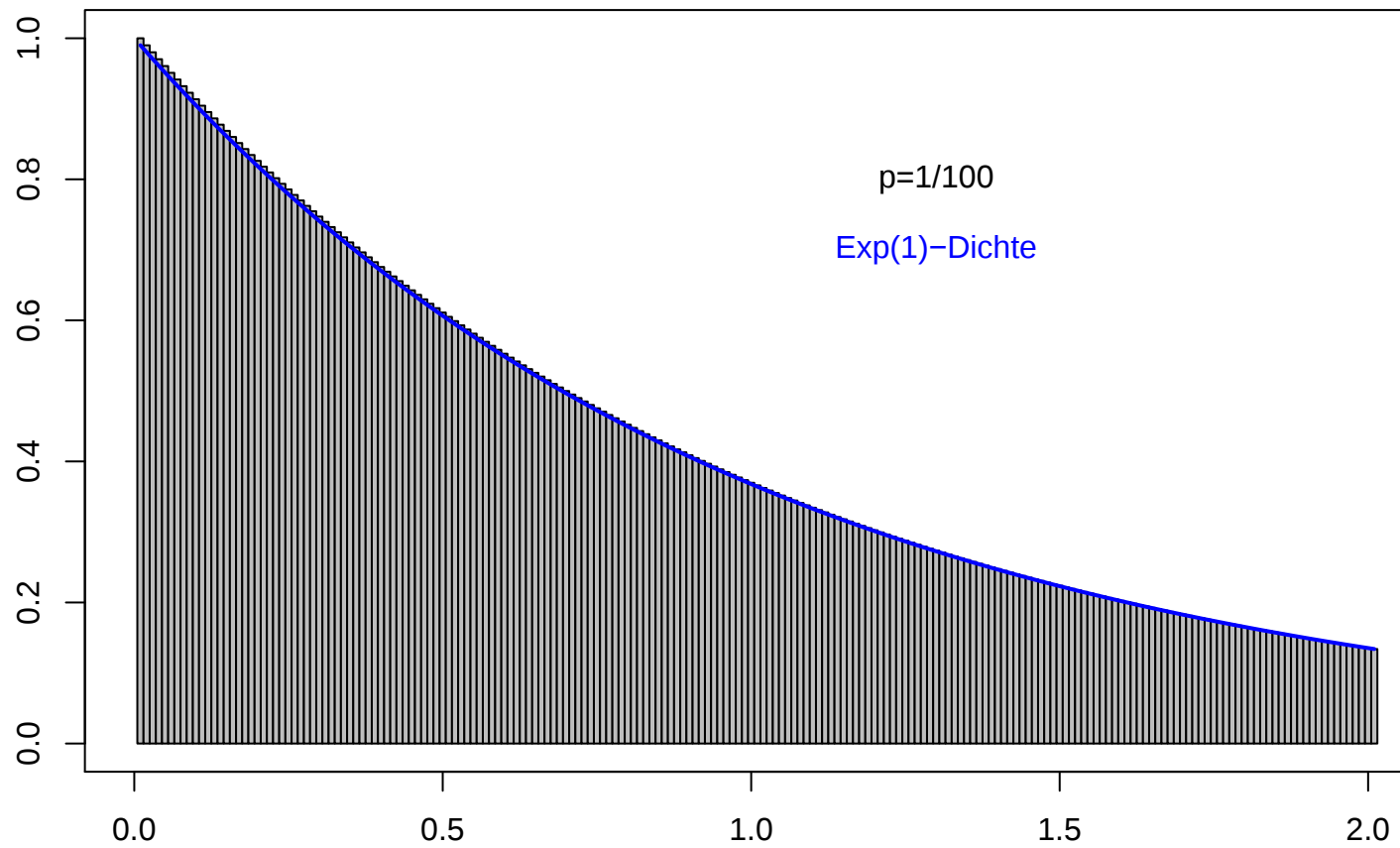
Salopp gesprochen:

Man holt für kleines  $p$   
eine  $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable  $Y$  zurück ins Bild,  
indem man  $pY$  betrachtet.

# Gewichte des $p$ -fachen einer Geom( $p$ )-verteilten ZV



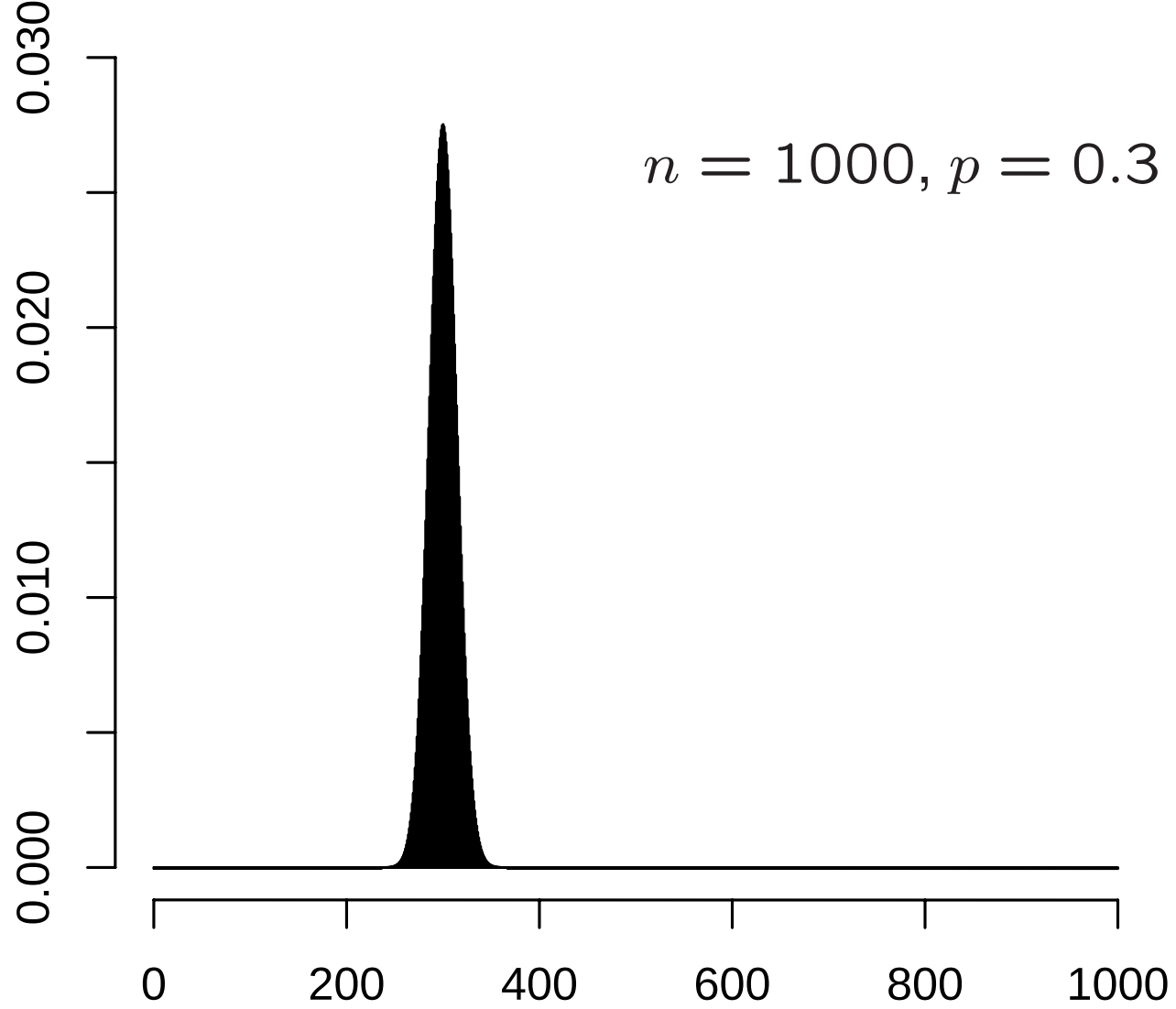
# Gewichte des $p$ -fachen einer Geom( $p$ )-verteilten ZV

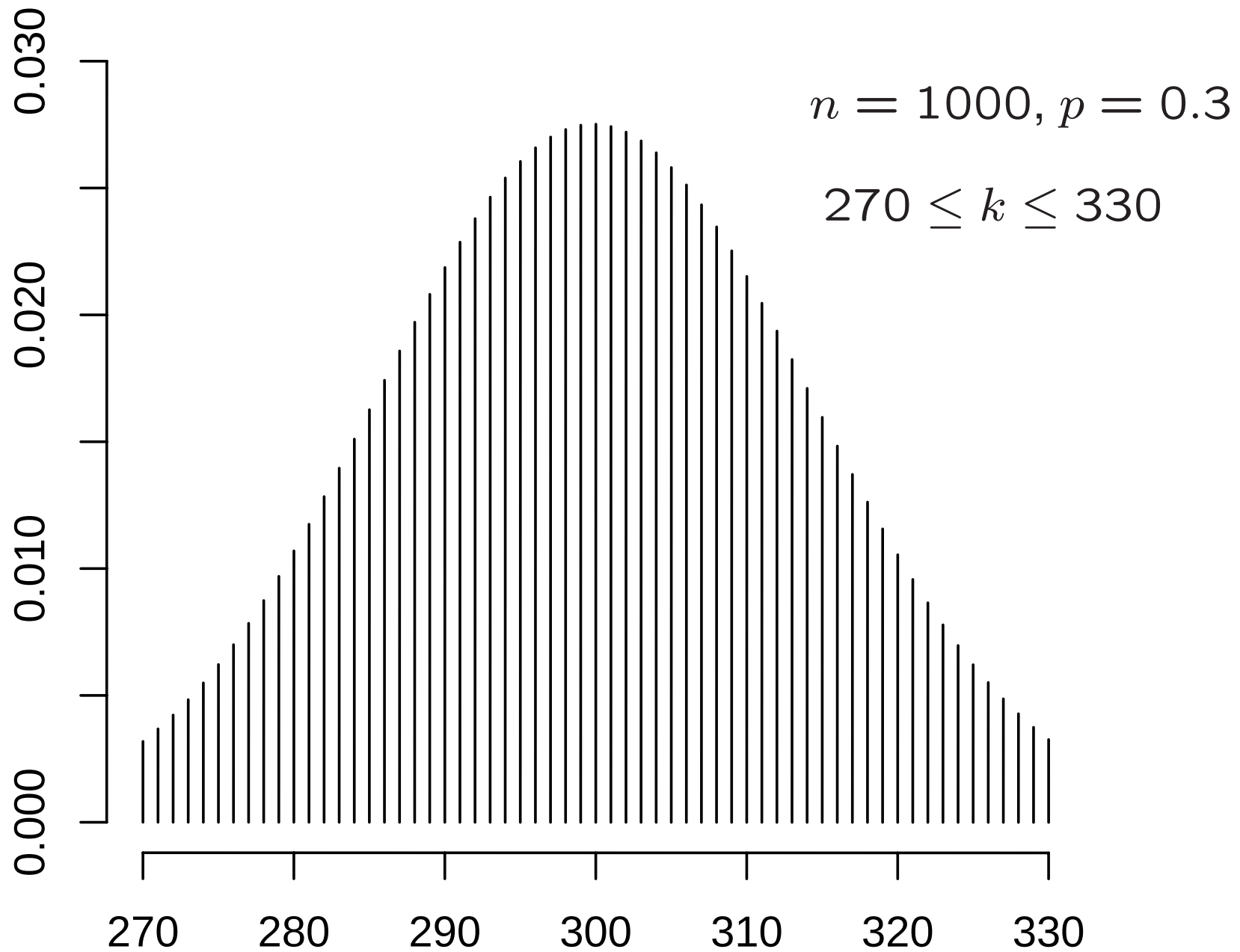


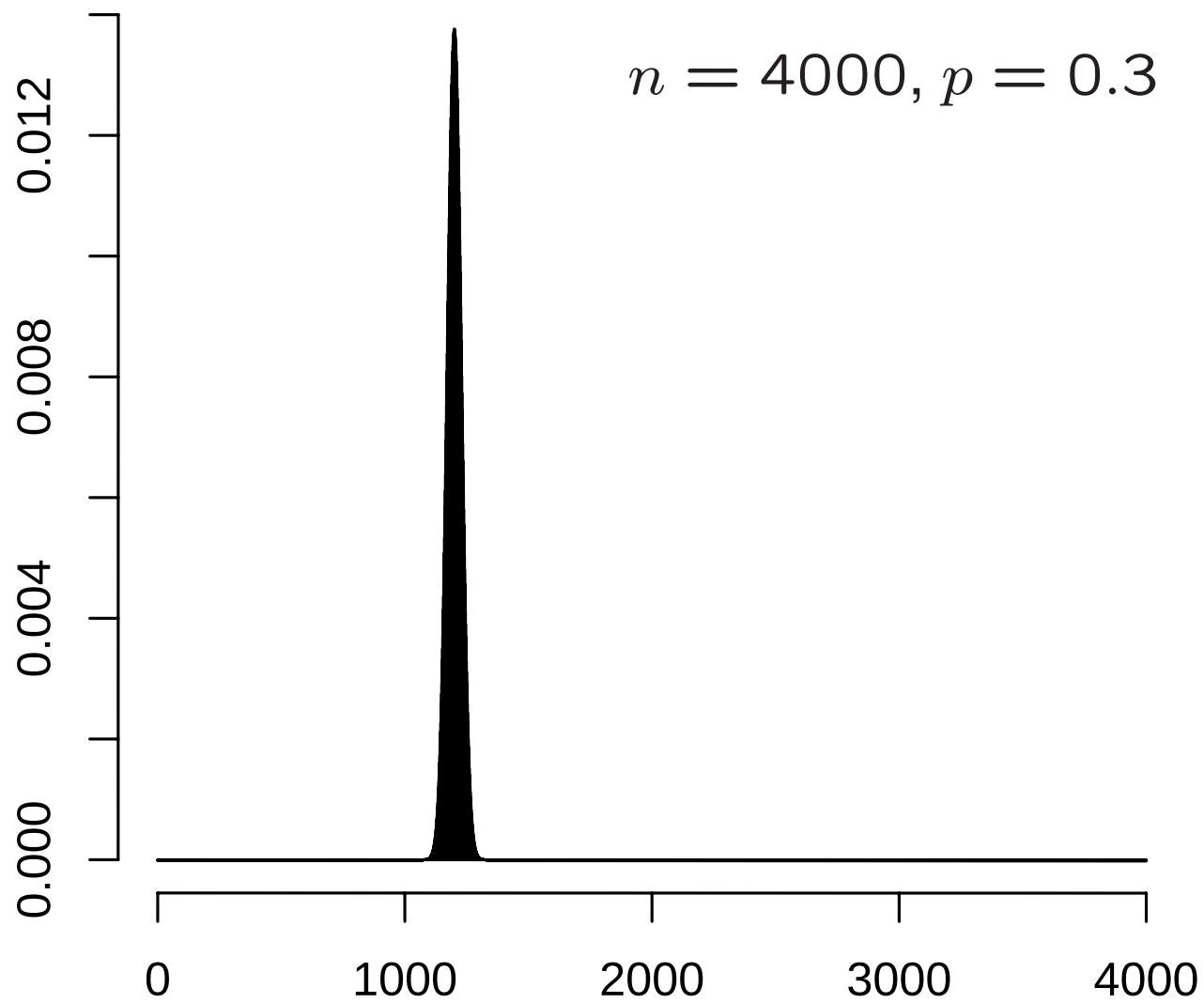
## 6. Binomialverteilungen mit großem Erwartungswert und großer Varianz

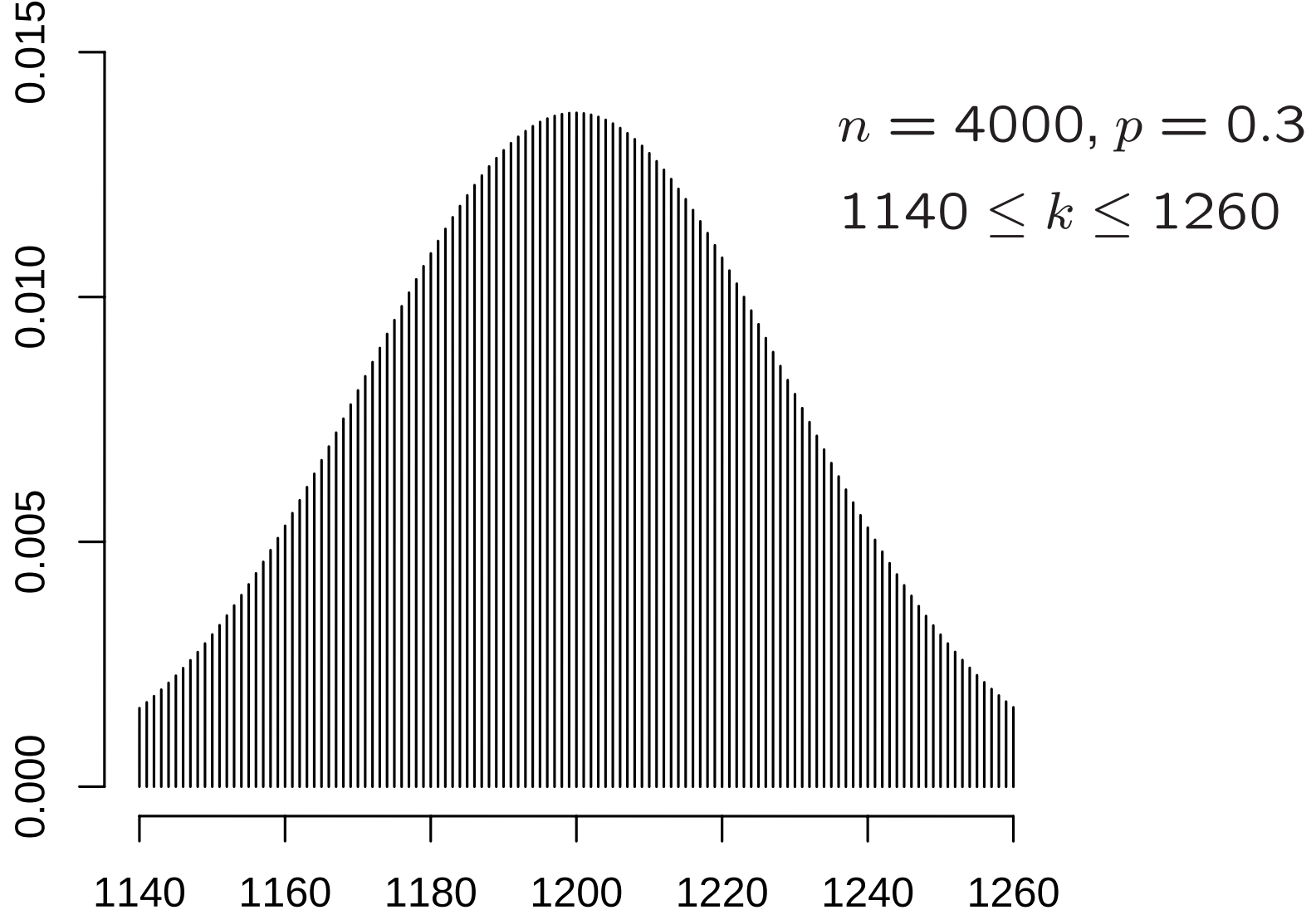
(vgl. Buch S. 27)

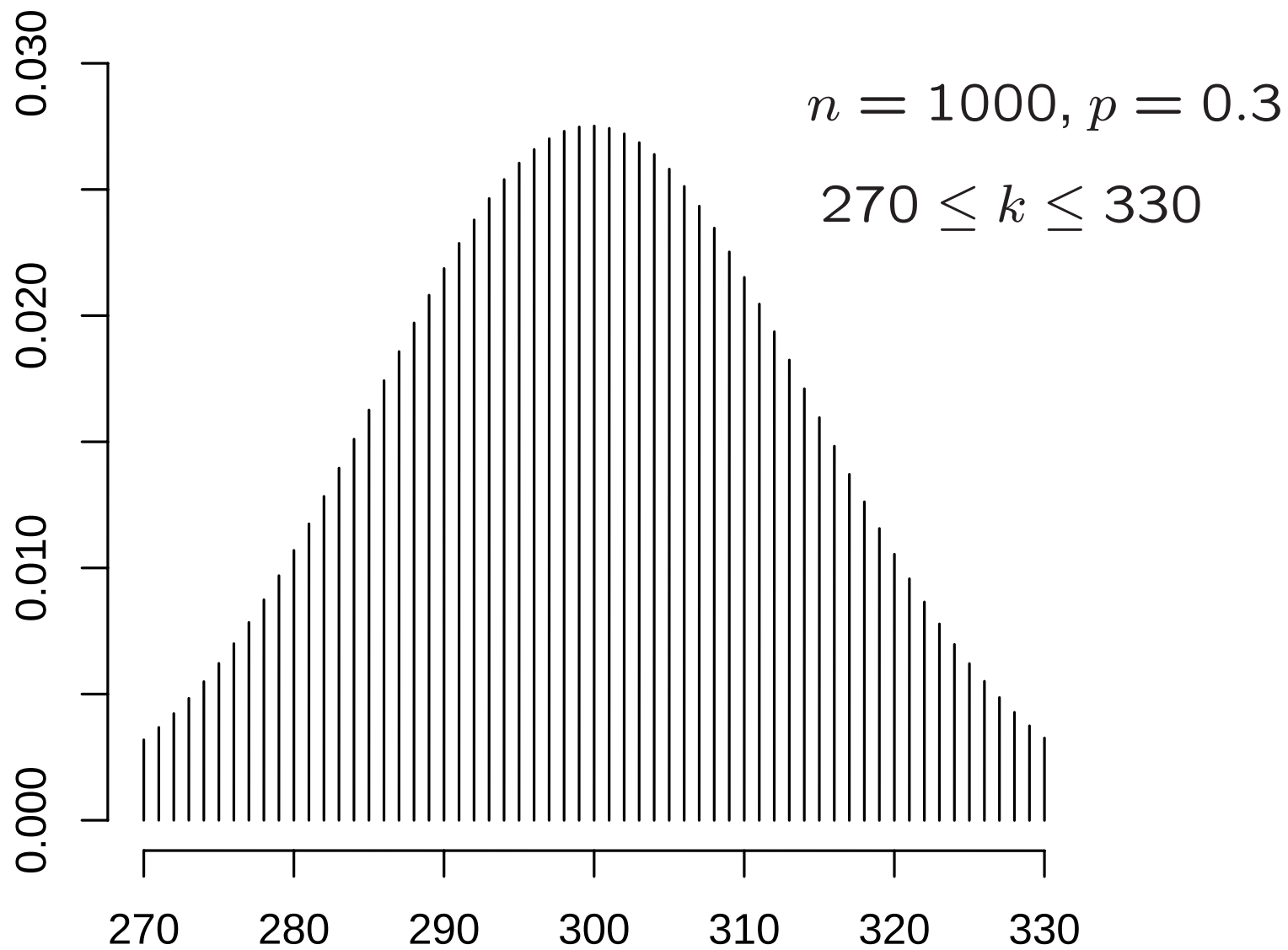
Wie sieht die  $\text{Bin}(n, 1/2)$ -Verteilung  
für großes  $n$  aus,  
oder allgemeiner  
die  $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung  
mit großem  $n$  und großem  $npq$  ?











Binomialverteilungen mit großem  $n$  und großer Varianz  $npq$   
sehen “glockenförmig” aus,  
wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Binomialverteilungen mit großem  $n$  und großer Varianz  $npq$   
sehen “glockenförmig” aus,  
wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte  
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right).$$

mit  $\mu := np$ ,  $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte  
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{k - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) .$$

mit  $\mu := np$ ,  $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte  
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} &\approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{k - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) . \\ &= \frac{1}{\sigma} \varphi \left( \frac{k - \mu}{\sigma} \right)\end{aligned}$$

mit  $\mu := np$ ,  $\sigma := \sqrt{npq}$  und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

## 7. Die Standard-Normalverteilung

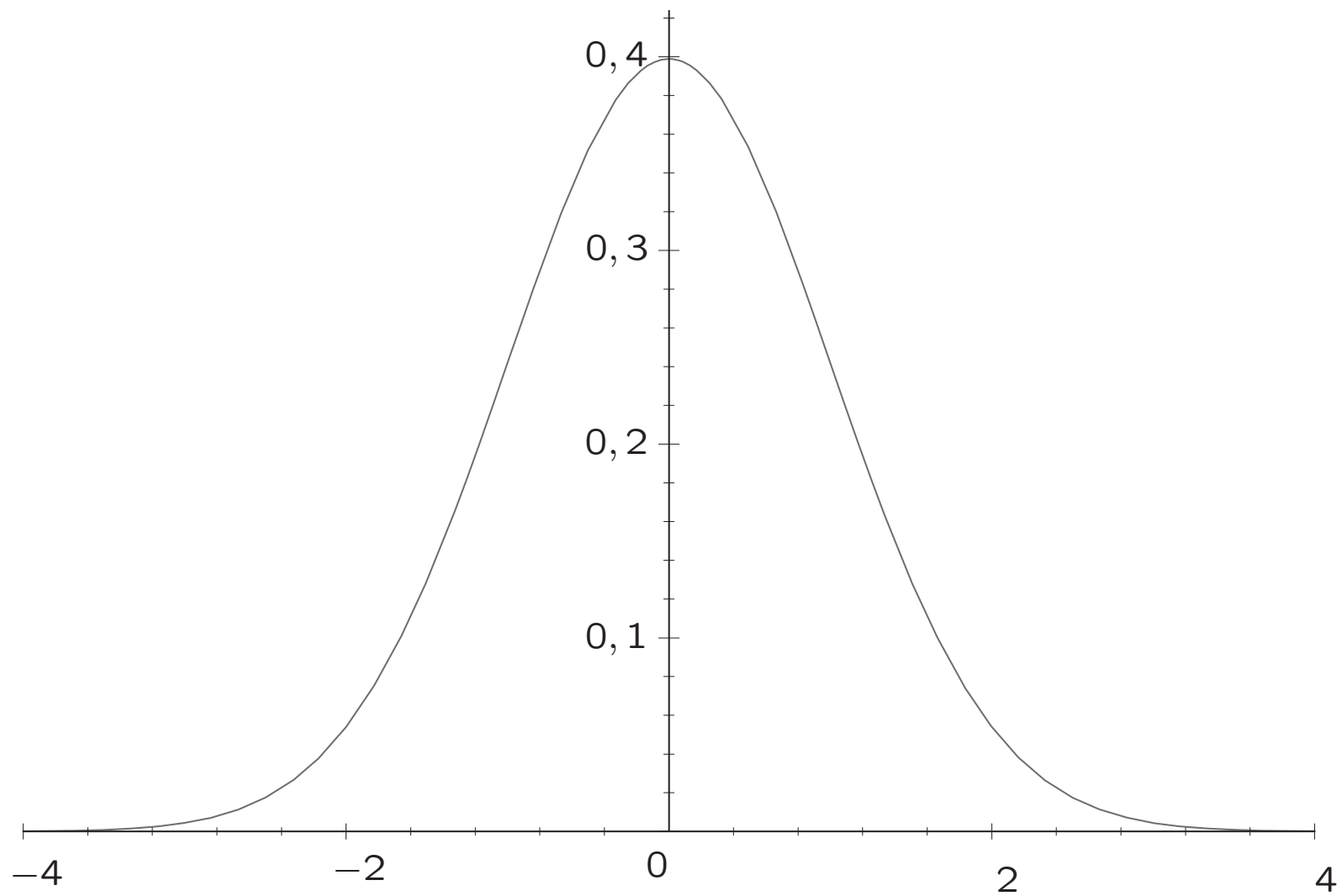
(vgl. Buch S. 42)

Die nächste Definition beinhaltet  
die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable  $Z$  mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.



Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$I := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

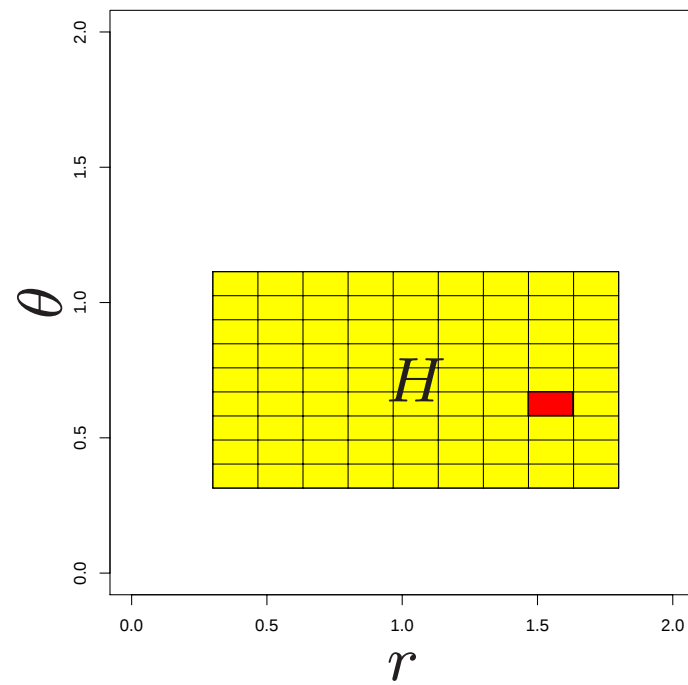
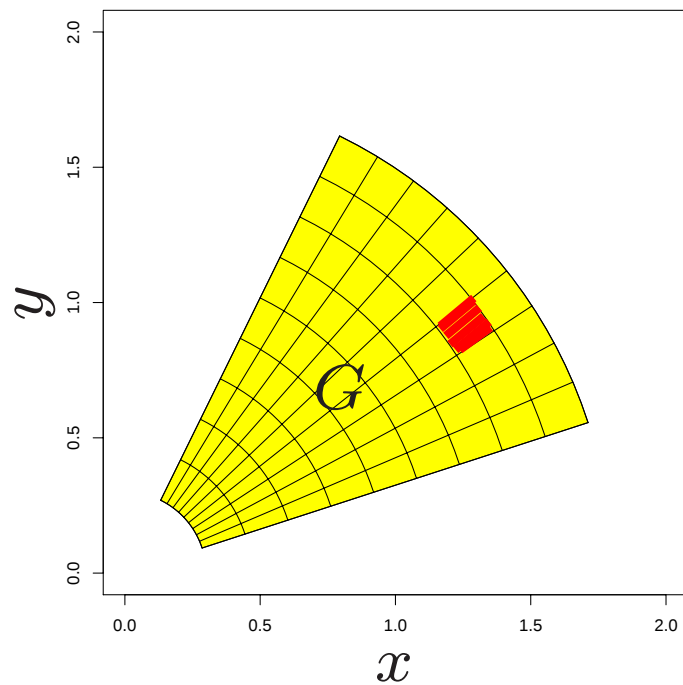
$$J^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= -e^{-r^2/2} \Big|_0^\infty = 1. \quad \square$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_H e^{-r^2/2} r dr d\theta$$



Für ein standard-normalverteiltes  $Z$  ist

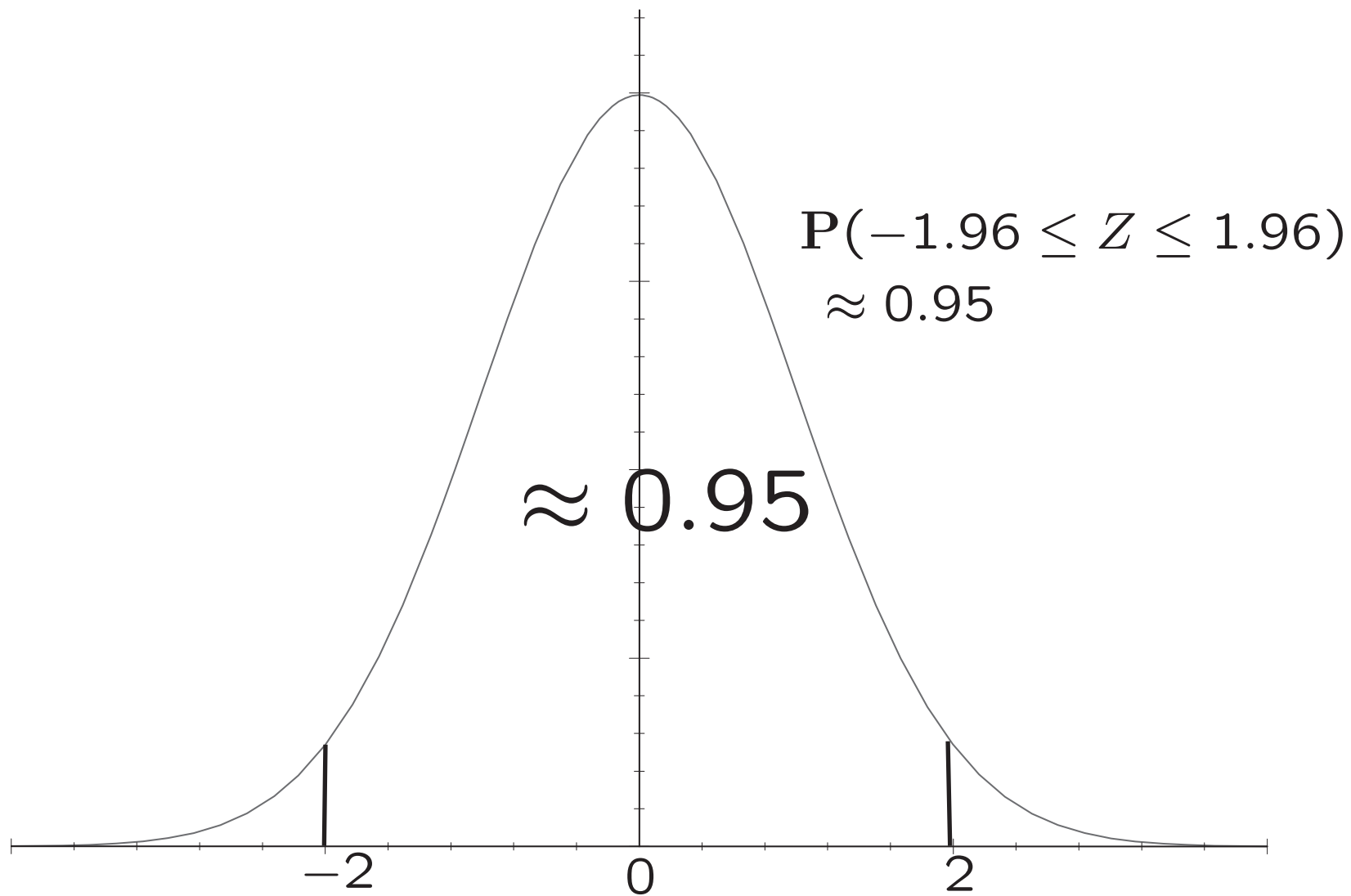
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var} Z = 1.$$

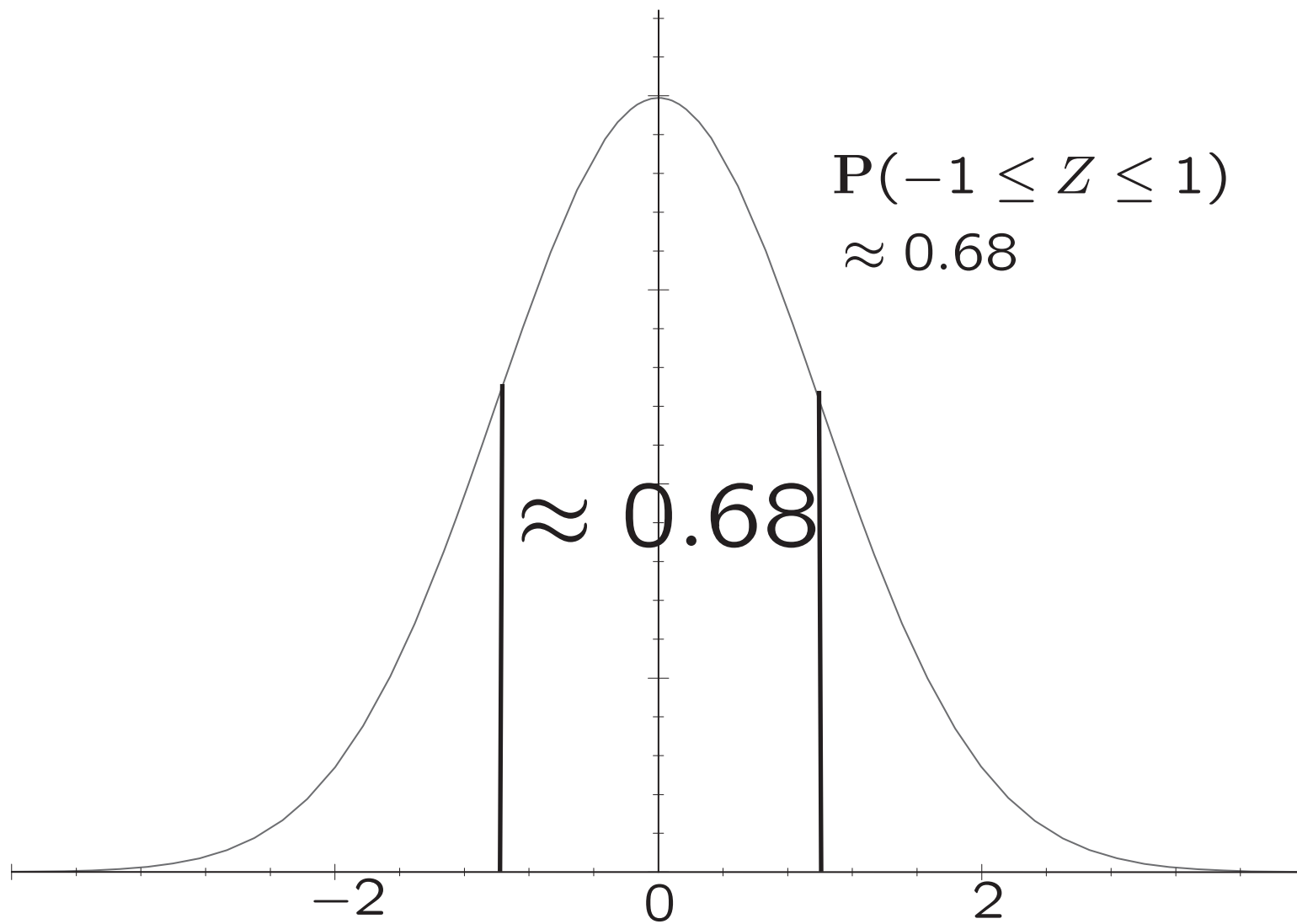
Denn aus Symmetriegründen ist  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a e^{-a^2/2} da = 0$ ,

und mit partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} a^2 e^{-a^2/2} da &= \int_{\mathbb{R}} a a e^{-a^2/2} da \\ &= -a e^{-a^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2/2} da = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:





## 7. Die $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung

(vgl. Buch S. 42/43)

Sei  $Z$  standard-normalverteilt,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var} X = \sigma^2,$$

und die Dichte von  $X$  ist  $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$  mit

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte  $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$   
heißt **normalverteilt mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$** , kurz  
 **$N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.**

Ist  $Y$   $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt,

dann ist  $\frac{Y - \mu}{\sigma}$  standard-normalverteilt.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)