

Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Uniforme Verteilung & Co.

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S = [0, 1]$ heißt
uniform verteilt auf S ,
wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $V(A)$
gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = V(A).$$

Beispiel 1:

$$A := [c, d] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = d - c.$$

Beispiel 2:

$$A := [c, d] \cup [e, f] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d < e \leq f \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = (d - c) + (f - e).$$

2. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$

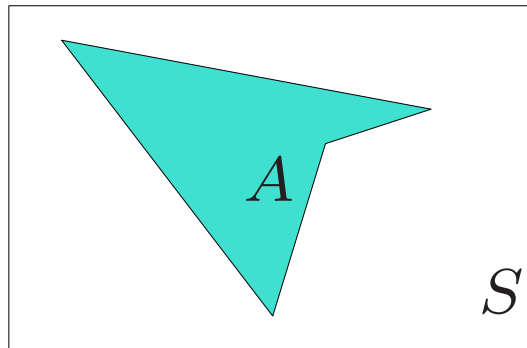
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf S* , wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



3. Uniforme Verteilung auf einer kontinuierlichen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung
“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \mathbf{P}(X \in da) = \int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$

4. Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur
mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$
ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a) da$,

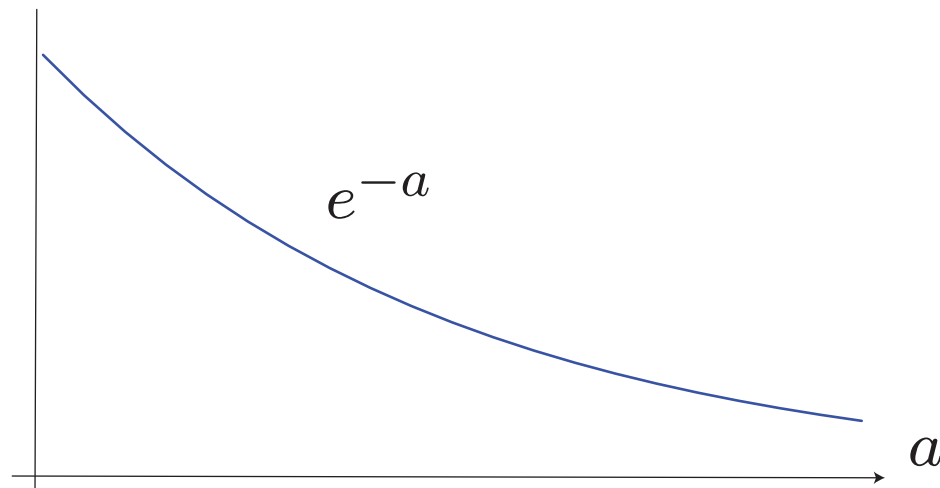
wobei $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

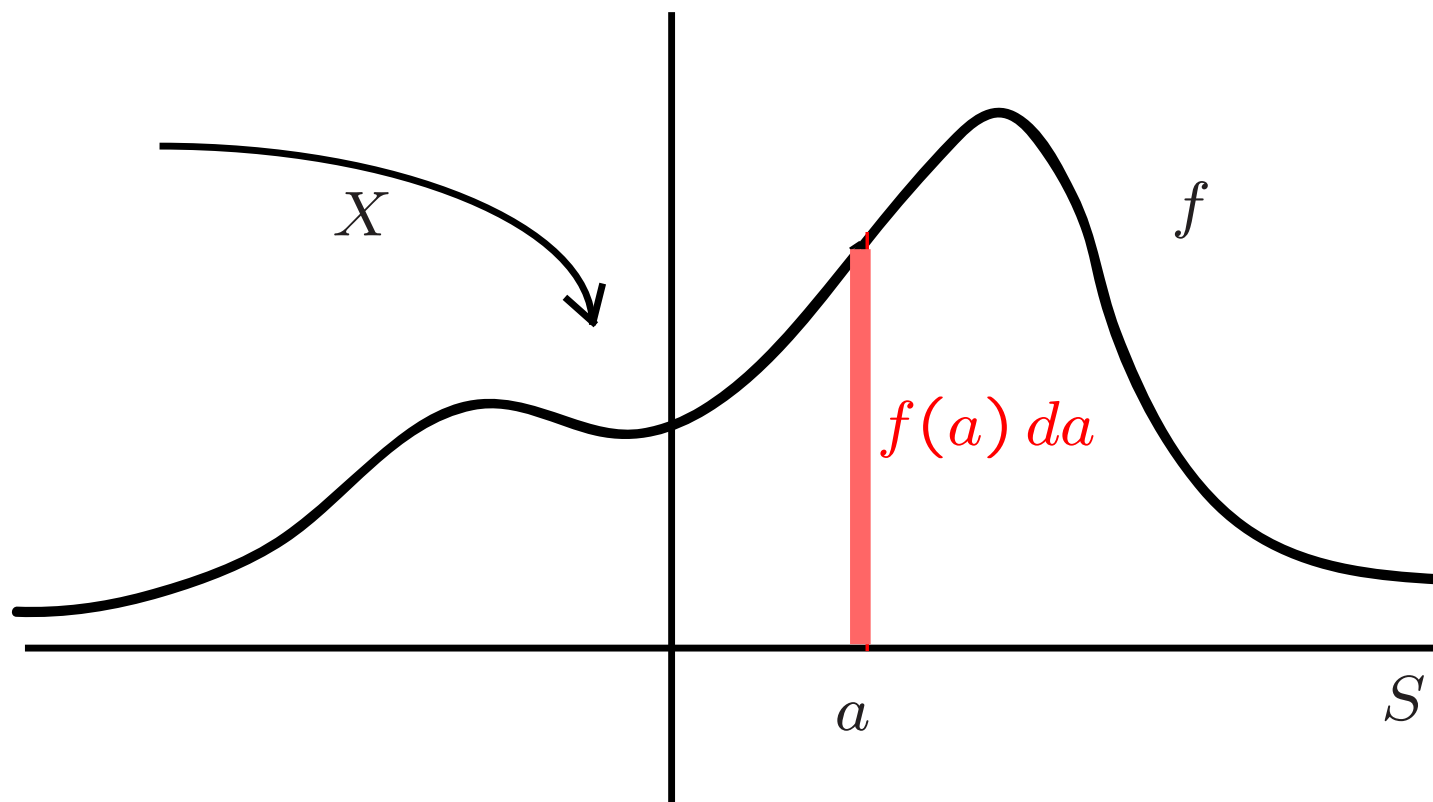
$$\int_S f(a) da = 1.$$

Die Bedingung $\int_S f(a) da = 1$ kann auch erfüllt sein,
wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \quad f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$





Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten l, r

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a) da = 1 .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S .
Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

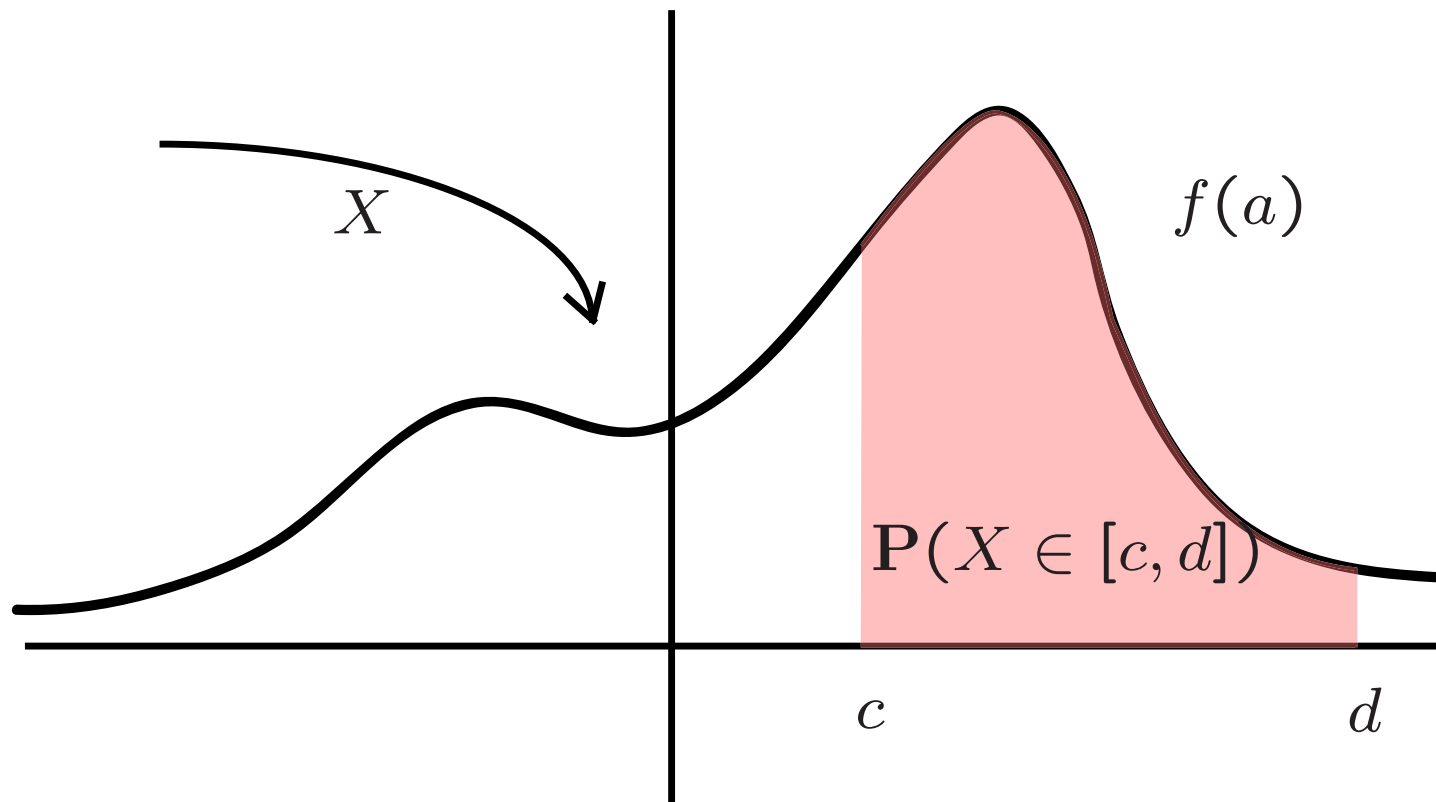
$$\mathbf{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d f(a) da ,$$

so sagt man, dass
 X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da , \quad a \in S ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X .



Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a) da$

ist für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = c) = \int_c^c f(a) da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $c \leq d \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(c,d]} f(a) da = \int_{[c,d]} f(a) da = \int_c^d f(a) da.$$

Tatsächlich hat man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int_A f(a) da$ nicht nur für Intervalle A , sondern für eine viel größere Klasse von “messbaren Mengen” zur Verfügung.

Außerdem gilt für derartige paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots$ die “abzählbare Additivität” des Integrals:

$$\int_{\bigcup A_i} f(a) da = \sum_i \int_{A_i} f(a) da.$$

Das Stichwort ist das *Lebesgue-Integral*.

Es verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff, sodass Sie “für die Praxis” nicht umdenken müssen.

5. Verteilungsfunktionen

Wieder sei X eine S -wertige ZV'e mit S Intervall in $\mathbb{R}$.

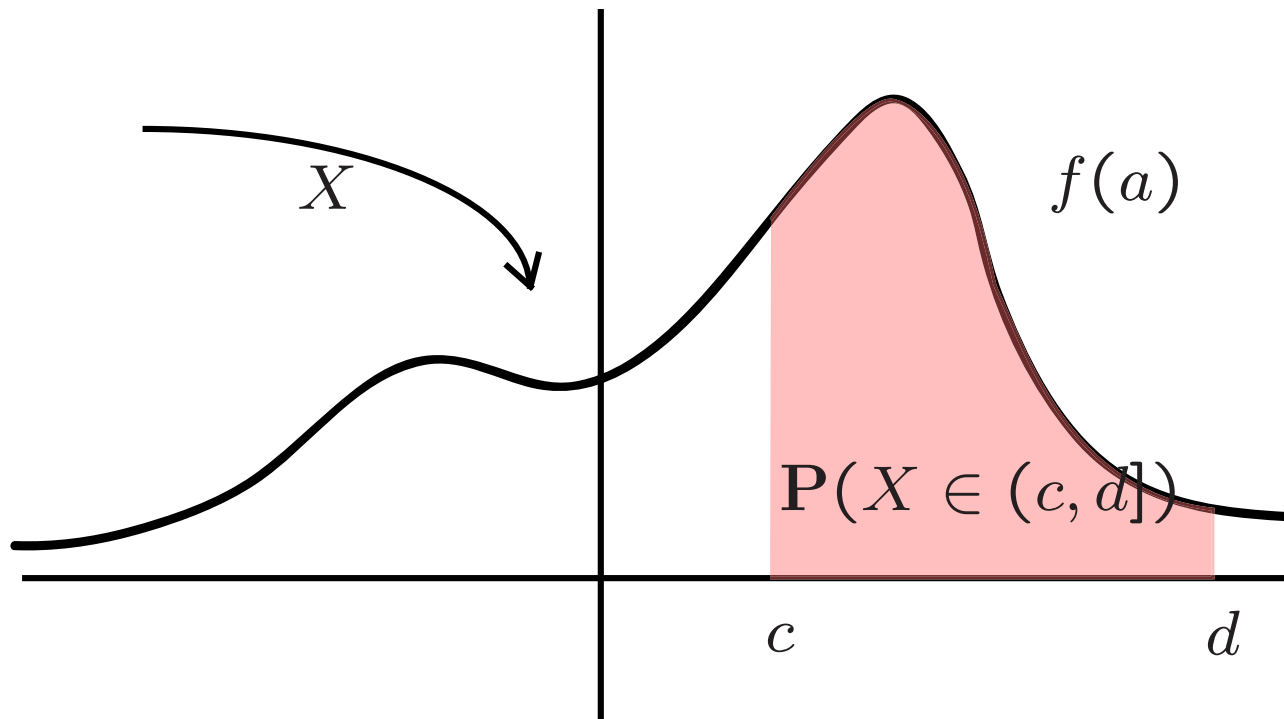
Die Funktion

$$F(b) := \mathbf{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(a) da, \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X .

Ist f stetig in a , dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$P(X \leq d) - P(X \leq c) = P(c < X \leq d)$$

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(a) da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

6. Beispiele

A. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2} da, \quad 0 \leq a \leq 2.$

B. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{r - l} da$, $a \in S$.

C. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b})$$

$$= \sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}}, & 0 < a \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

D. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a}}, & 0 \leq a \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

E. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq x) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq x) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

7. Die Standard-Exponentialverteilung:

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt
standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X \geq t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Äquivalent dazu sind:

- (i) X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a} da$, $a \geq 0$
- (ii) X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ 1 - e^{-a} & \text{für } a \geq 0 \end{cases}$$