

Vorlesung 3b

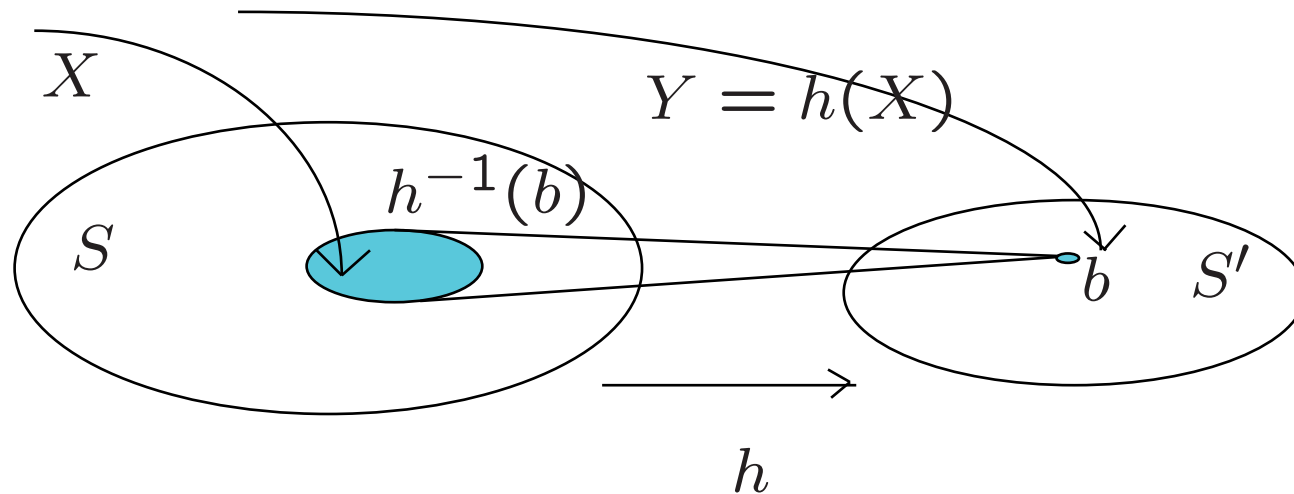
Indikatorvariable und Ereignisse,

und das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten.

1. Verschiedene Darstellungen eines Ereignisses

Wir wissen schon:

**Ein- und dasselbe Ereigniss kann man
auf verschiedene Weise darstellbar:**



$$\{Y = b\} = \{h(X) = b\} = \{X \in h^{-1}(B)\}$$

Beispiel 1:

Sei $X = (X_1, X_2)$ das Paar der Augenzahlen
beim zweimaligen (gewöhnlichen) Würfeln.

$$\{X_1 = 3\} \\ = \{(X_1, X_2) \in \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}\}$$

$$\{X_1 + X_2 = 3\} = \{(X_1, X_2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}\}$$

Beispiel 2: Kollisionen (vgl. Vorlesung 1b):

Wir stellen uns vor, dass die Individuen der Reihe nach ihr Kennzeichen bekommen.

X_i ... zufälliges Kennzeichen des i -ten Individuums

T sei der Moment der ersten Kollision:

$$T = \min\{i \geq 1 : X_i = X_j \text{ für ein } j < i\} .$$

Dann gilt für das Ereignis

“keine Kollision unter den ersten n Individuen”:

$$\{X_i \neq X_j \text{ für } j < i \leq n\} = \{T > n\} .$$

Allgemeiner gilt

für die “Verarbeitung” $h(X)$ einer Zufallsvariablen X :

$$\{h(X) \in B\} = \{X \in h^{-1}(B)\}.$$

2. Ereignisse und Indikatorvariable (Reprise)

Wir erinnern an eine Definition aus Vorlesung 3a
(vgl. Buch S. 36-38):

Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich S und $A \subset S$ betrachten wir die Zufallsvariable $\mathbf{1}_A(X)$.

Sie nimmt den Wert 1 an, wenn das Ereignis $\{X \in A\}$ eintritt, und den Wert 0, wenn das Ereignis $\{X \in A^c\}$ eintritt.

$$I_{\{X \in A\}} := \mathbf{1}_A(X)$$

heißt *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{X \in A\}$.

$$\{X \in A\} = \{I_{\{X \in A\}} = 1\},$$

Für jedes Ereignis E gilt: $E = \{I_E = 1\}$.

Ereignisse sind gleich,
wenn das für ihre Indikatorvariablen zutrifft.

3. Sicheres und unmögliches Ereignis

Für jede S -wertige Zufallsvariable X gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

$$I_{\{X \in \emptyset\}} = \mathbf{1}_\emptyset(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 0 fällt.

Das *sichere Ereignis* E_S ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 1 annimmt.

$$I_{E_S} = 1$$

Das *unmögliche Ereignis* E_U ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 0 annimmt:

$$I_{E_U} = 0.$$

4. Verknüpfungen und Beziehungen von Ereignissen

Für zwei Ereignisse E_1, E_2
hat deren “Oder-Ereignis” die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cup E_2} := \max(I_{E_1}, I_{E_2})$$

und deren “Und-Ereignis” die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cap E_2} := \min(I_{E_1}, I_{E_2}).$$

Man spricht auch von “Vereinigung” und “Durchschnitt”
der Ereignisse E_1 und E_2 .

Für $b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ gilt die Identität:
 $b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2)$.

Dies überträgt sich auf

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

Falls

$$E_1 \cap E_2 = E_u ,$$

so heißen E_1 und E_2

disjunkte oder *sich ausschließende Ereignisse*.

Gilt $E_1 = E_1 \cap E_2$, so schreiben wir

$$E_1 \subset E_2 .$$

und sagen:

“Mit E_1 tritt sicher auch E_2 ein”

oder auch

“Das Ereignis E_1 zieht das Ereignis E_2 nach sich.”

Für jedes Ereignis E ist sein *Komplementärereignis*

$$E^c$$

definiert durch

$$I_{E^c} := 1 - I_E \quad \text{bzw.} \quad E^c := \{I_E = 0\} .$$

Wegen $1_{A^c} = 1 - 1_A$ gilt

$$\{X \in A\}^c = \{X \in A^c\} .$$

5. Die Aussage $X = Y$ und das Ereignis $\{X = Y\}$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S .

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in S^2 .

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

bzw.

$$I_{\{X=Y\}} = \mathbf{1}_D(X, Y)$$

Es gilt:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad \{X = Y\} = E_S$$

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}$$

$$\text{mit } H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\},$$

der Halbraum über (und einschließlich) der Diagonalen.

Wir schreiben

$$X \leq Y \quad :\Leftrightarrow \quad \{X \leq Y\} = E_S .$$

5. Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

Für Indikatorvariablen und Ereignisse
gilt die Beziehung

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen
und aus der Linearität des Erwartungswertes
ergeben sich die Regeln
für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
(Buch S. 57-58):

$$(i) \quad \mathbf{P}(E_S) = 1, \quad \mathbf{P}(E_U) = 0.$$

$$(ii) \quad \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

Die Formel (ii) sieht man aus der Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

$$(i) \mathbf{P}(E_S) = 1, \quad \mathbf{P}(E_U) = 0.$$

$$(ii) \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

$$(iii) \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

$$(iv) \mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E).$$

$$(v) \mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2), \text{ falls } E_1 \subset E_2.$$

6. Die Einschluss-Ausschluss-Formel

Die Eigenschaft

$$(ii) \quad \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) - \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

wird verallgemeinert durch die

Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \dots \pm \mathbf{P}(E_1 \cap \dots \cap E_n) . \end{aligned}$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \dots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,
wenn mindestens eines der I_{E_i} als 1 ausfällt,
ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i < j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots$$

Gehe dann über zum Erwartungswert. \square

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \dots, n)$.

Was ist die W'keit, dass X mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis

“ X hat Fixpunkt an der Stelle i ”. Offenbar gilt:

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = (n - k)!/n!, \text{ falls } i_1 < \dots < i_k$$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \dots \pm \frac{1}{n!}. \quad \square$$

(Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert das übrigens gegen $1 - e^{-1}$.)

7. Zwei weitere fundamentale Eigenschaften
des Erwartungswerts:
Positivität und Monotonie:

(vgl. Buch S. 55)

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $E[X] \geq 0$,

(ii) $E[X] = 0$ genau dann, wenn $P(X = 0) = 1$.

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$E[X_1] \leq E[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

$$(i) \mathbf{E}[X] \geq 0,$$

$$(ii) \mathbf{E}[X] = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

“ X reellwertig und $X \geq 0$ ” ist äquivalent dazu, dass der Wertebereich von X eine Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ ist.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert eine abzählbare Teilmenge S des Wertebereichs mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

$$(i) \mathbf{E}[X] \geq 0,$$

$$(ii) \mathbf{E}[X] = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

Für diese Menge S gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) = 0 + \sum_{a \in S: a > 0} a \mathbf{P}(X = a),$$

woraus sich beide Aussagen ergeben. \square

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

$$\text{folgt } \mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0. \quad \square$$

8. Die Ungleichung von Markov

Beispiel:

X reellwertige Zufallsvariable, $c > 0$.

Dann gilt $c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq a$, $a \in \mathbb{R}_+$ und daher

$$cI_{\{|X| \geq c\}} = cI_{\{|X| \in [c,\infty)\}} = c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(|X|) \leq |X|.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{|X| \geq c\}}] \leq \mathbf{E}[|X|]$$

$$\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[|X|]$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov**.