Vorlesung 11a

Gleichgewichtsverteilungen

1. Begriffsbildung

Sei P eine Übergangsmatrix auf S

und ρ eine (Start-)Verteilung auf S.

Dann gilt

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, X_1 = a_1) = \rho(a_0)P(a_0, a_1)$$

Für welche Starverteilung ρ ist X_1 so verteilt wie X_0?

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P,

wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(G1) $$\sum_{a \in S} \pi(a) P(a,b) = \pi(b)\ , \quad b \in S\ .$$

(G2) $$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

d.h. unter $\mathbf{P}_\pi$ haben X_0 und X_1 dieselbe Verteilung

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

Hinreichend für

(G2)

$$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

Denn dann ist unter $\mathbf{P}_\pi$

das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0),

also insbesondere X_0 so verteilt wie X_1.

Gleichbedeutend mit

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

ist

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a)\ , \quad a, b \in S\ .$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P.

2. Beispiele:

Ein Beispiel einer

nicht reversiblen Gleichgewichtsverteilung:

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a, b) = P(b, c) = P(c, a) := p,$$

$$P(b, a) = P(c, b) = P(a, c) := 1 - p$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist eine Gleichgewichtsverteilung zu P.

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

Die Gleichgewichtsverteilung der

einfachen Irrfahrt auf dem Würfel $S = \{0, 1\}^3$:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

(Zwei Elemente von S heißen *benachbart*,

wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.)

Für benachbarte Knoten a und b ist hier $P(a, b) = 1/3$.

Die uniforme Verteilung auf S

ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Eine wichtige Beispielklasse:

Die einfache Irrfahrt

auf einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

mit endlicher Knotenmenge S

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn:

$$P(a, b) = \frac{1}{g(a)},$$

mit b Nachbar von a, $g(a)$:= # Nachbarn von a

Ansatz: $\pi(a) := \frac{1}{c} g(a)$

Die Verteilung π erfüllt die die Reversibilitätsbedingung (R),

denn für benachbarte Knoten a, b gilt:

$$\frac{1}{c} g(a) \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c} g(b) \frac{1}{g(b)}$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis):

Es gibt nur **eine** Gleichgewichtsverteilung.

Fazit: Die Gewichte der Knoten

unter der Gleichgewichtsverteilung

sind proportional zur Anzahl der Nachbarn der Knoten.

3. Das Ehrenfest-Modell

veröffentlicht 1909 von Paul und Tatjana Ehrenfest, konzipiert als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:

ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.

In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.

Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind somit:

$$P(\ell, \ell + 1) = \frac{d - \ell}{d}\,, \qquad P(\ell, \ell - 1) = \frac{\ell}{d}\,.$$

Hat diese Dynamik eine Gleichgewichtsverteilung,

und wenn ja, wie sieht sie aus?

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden durchnummeriert mit $1, \ldots, d$.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \qquad\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad \text{in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \{0, 1\}^d.$$

Dynamik des Feinmodells:

Ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ wird rein zufällig ausgewählt

und das a_i wird “geflippt”

(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt die Irrfahrt auf dem Würfel $\{0, 1\}^d$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:

die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$l(a) := \sum_{i=1}^{d} a_i$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$,

dann ist $\sum_{i=1}^{d} Z^{(i)}$ Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell:

$$2^{-d}\binom{d}{\ell}\,\frac{d-\ell}{d} = 2^{-d}\binom{d}{\ell+1}\,\frac{\ell+1}{d}. \ \square$$