

# Vorlesungsskript „Elementarmathematik II“

Christoph Kühn

Sommersemester 2012

Hinweise auf Fehler oder Verbesserungsvorschläge sind sehr willkommen, letzte Aktualisierung:  
25. Juni 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Geometrie</b>	<b>3</b>
1.1 Satz des Pythagoras . . . . .	3
1.2 Die Kreiszahl $\pi$ . . . . .	6
1.3 Trigonometrische Funktionen . . . . .	9
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>15</b>
2.1 Reihen . . . . .	20
2.2 Mittelbildungen und gerechte Noten . . . . .	22
<b>3 Stetige Funktionen</b>	<b>26</b>
3.1 Zwischenwerte und Fixpunkte . . . . .	27
3.2 Berechnung der Quadratwurzel . . . . .	29
3.3 Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	30
3.4 Die geheimnisvolle Sparkasse $e$ . . . . .	32
<b>4 Differentialrechnung</b>	<b>36</b>
<b>A Anhang (kein Bestandteil der Vorlesung)</b>	<b>41</b>
A.1 Zahlen . . . . .	41
A.2 Vollständige Induktion . . . . .	41
A.3 Bolzano-Weierstraß . . . . .	42
A.4 Supremumsprinzip . . . . .	44
A.5 Extrema . . . . .	46
<b>B Anhang zu Potenzfunktionen (kein Bestandteil der Vorlesung)</b>	<b>47</b>
B.1 Potenzen $x^q$ . . . . .	47
B.2 Potenzen $x^r$ . . . . .	50

Das Skript orientiert sich in weiten Teilen an den Skripten der Professoren Bieri und Weidmann zur Elementarmathematik II. Es soll bei der Nachbereitung der Vorlesung und der Klausurvorbereitung helfen. Es kann aber natürlich den aufmerksamen Vorlesungsbesuch nicht ersetzen. Aus Zeitgründen tauchen z.B. nicht alle Zeichnungen und graphische Veranschaulichungen aus der Vorlesung hier auf.

Das Skript wird fortlaufend aktualisiert und soll der Vorlesung immer etwas voraus sein. Dabei soll aber ein einmal ins Netz gestellter Abschnitt bis auf Fehlerkorrekturen nach Möglichkeit nicht mehr verändert werden.

# 1 Geometrie

## 1.1 Satz des Pythagoras

**Satz 1.1** (Winkelsummensatz). *Die Winkel eines Dreiecks addieren sich zu  $180^\circ$ .*

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus Abbildung 1. □

**Satz 1.2** (Satz des Pythagoras). *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 2 bedeutet dies  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus Abbildung 2. Auf dem äußeren Quadrat mit Seitenlänge  $a + b$  werden zunächst Strecken der Länge  $a$  und  $b$  abgetragen. Wegen des Winkelsummensatzes besitzt das bei der Konstruktion entstehende innere Viereck rechte Winkel. Das innere Viereck ist also ein Quadrat mit Seitenlänge  $c$  und besitzt damit den Flächeninhalt  $c^2$ . Aus zwei verschiedenen Berechnungen des Flächeninhalts des äußeren Quadrats folgt nun die Gleichheit

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$$

und damit wegen  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  die Behauptung, dass  $a^2 + b^2 = c^2$ . □

**Satz 1.3.** *Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 3 gilt*

$$pc = b^2 \quad (\text{bzw. } qc = a^2) \quad \text{Kathetensatz}$$

und

$$h^2 = pq \quad \text{Höhensatz}$$

*Beweis.* Der Satz des Pythagoras liefert uns die folgenden Gleichungen

$$b^2 + a^2 = (p + q)^2$$

$$p^2 + h^2 = b^2 \tag{1.1}$$

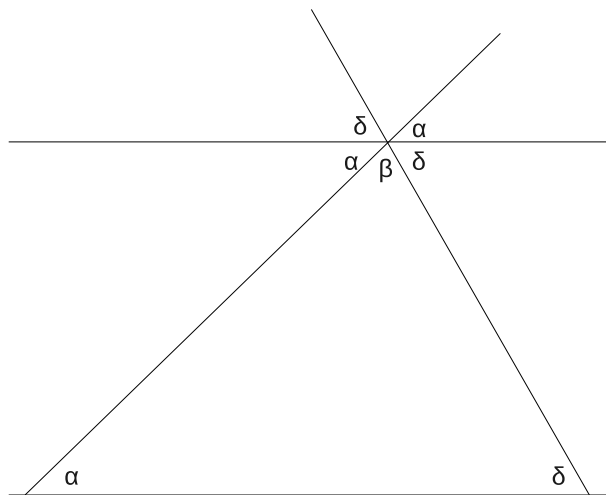


Abbildung 1: Beweis von  $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$ .

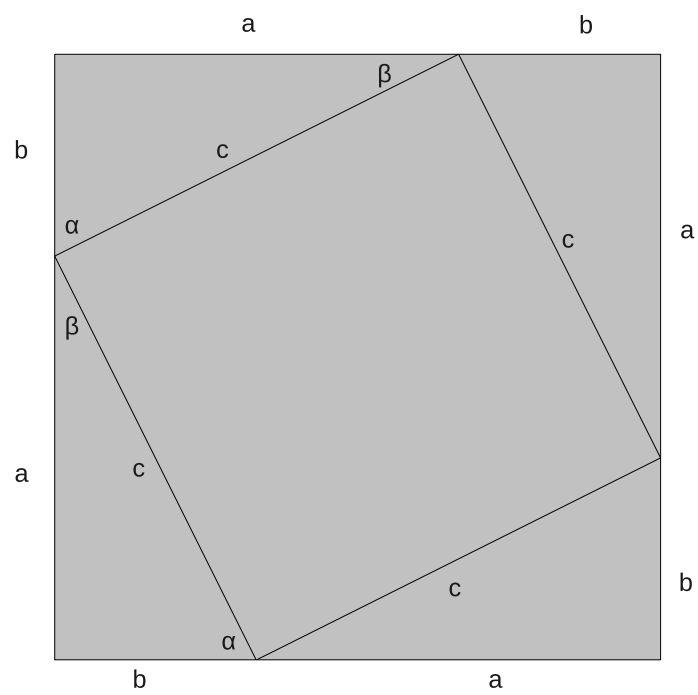


Abbildung 2: Beweis von  $a^2 + b^2 = c^2$ .

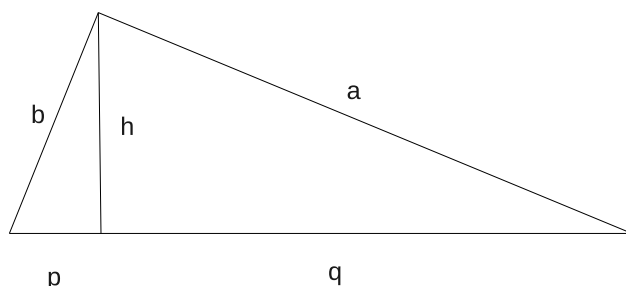


Abbildung 3:  $c := p + q$ .

$$q^2 + h^2 = a^2$$

Daraus folgt

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = b^2 + a^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

und damit der Höhensatz

$$h^2 = pq.$$

Setzt man dies in (1.1) ein, dann folgt zudem  $p^2 + pq = b^2$  und damit wegen  $p + q = c$  und  $c^2 = b^2 + a^2$  auch der Kathetensatz.  $\square$

**Satz 1.4** (Satz des Thales). *Der Peripheriewinkel über einem Halbkreis beträgt  $90^\circ$ . Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 4 bedeutet dies  $\angle CBA = 90^\circ$ , wobei  $\angle CBA$  den Winkel des Dreiecks  $ABC$  am Punkt  $C$  bezeichnet.*

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus Abbildung 4. Wir bezeichnen den Winkel bei  $C$  des Dreiecks  $ACM$ , also  $\angle CMA$ , mit  $\alpha$ . Da die Längen  $\overline{AM}$  und  $\overline{CM}$  übereinstimmen, beträgt dann aus Symmetriegründen auch der Winkel bei  $A$  des Dreiecks  $ACM$   $\alpha$ . Man sagt, dass  $AMC$  ein *gleichschenkliges* Dreieck ist, da es zwei gleich lange Seiten besitzt. Analog bezeichnen wir den Winkel bei  $C$  des Dreiecks  $MBC$  mit  $\beta$  und aus Symmetriegründen beträgt der Winkel bei  $B$  des Dreiecks  $MBC$  ebenso  $\beta$ . Da sich Winkel von Dreiecken zu  $180^\circ$  addieren folgt  $\varphi = 180^\circ - 2\alpha$  und  $\psi = 180^\circ - 2\beta$ . Aus  $\varphi + \psi = 180^\circ$  folgt  $\angle CBA = \alpha + \beta = 90^\circ$ .  $\square$

**Anwendung:** Wurzelziehen mit Zirkel und Lineal.

Man konstruiere einen Kreis mit Durchmesser  $c > 1$ . Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 3 wählt man  $p = 1$ . Der Punkt zwischen den Seiten der Länge  $b$  und  $a$  liegt

also auf dem Kreis. Aus dem Satz des Thales folgt, dass der Winkel zwischen den Seiten der Länge  $b$  und  $a$   $90^\circ$  beträgt. Damit ist der Kathetensatz anwendbar und es folgt  $b^2 = 1 \cdot c = c$ , also  $b = \sqrt{c}$ .

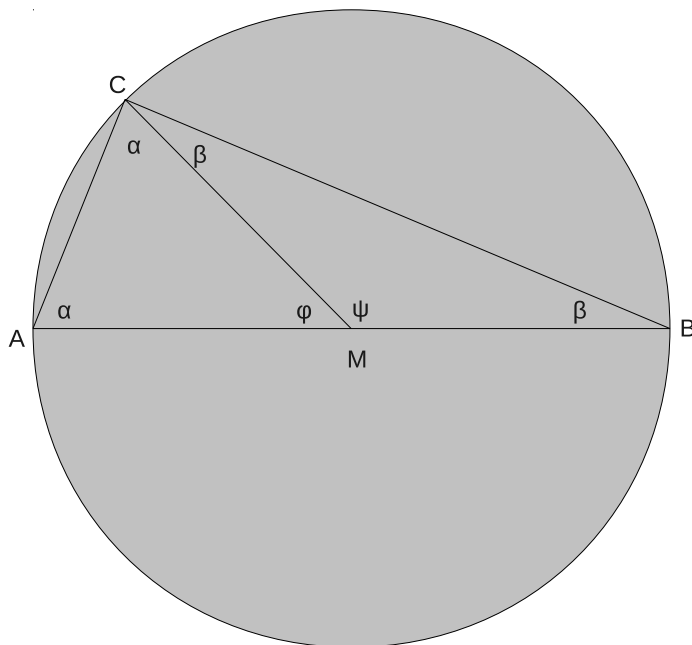


Abbildung 4: Beweis des Satzes von Thales

## 1.2 Die Kreiszahl $\pi$

Die Zahl  $\pi$  ist definiert als der **halbe Umfang des Kreises mit Radius 1**. Für jeden Kreis (unabhängig vom Radius) beträgt der Quotient aus Umfang und Durchmesser  $\pi$  (der Quotient ist also unabhängig vom Radius).

Wie misst man den Umfang eines Kreises mit Radius 1 (Einheitskreis) ?

Wir approximieren einen Kreis durch regelmäßige Vielecke, die wir in den Kreis *ein-schreiben*. Dazu tragen wir auf dem Kreis Punkte mit gleichem Abstand ab, vgl.  $D, B, E, \dots$  in Abbildung 6. Wenn die Punkte immer dichter beieinander liegen, „konvergiert“ die Summe der Abstände gegen den Umfang des Kreises.

Als Anzahl der Punkte des Vielecks betrachten wir nur die Zweierpotenzen  $4, 8, 16, 32, \dots$ , weil dies die Rechnung vereinfachen wird. Es geht also um  $2^n$ -Ecken mit  $n \geq 2$ . Bezeichne  $s_{2^n}$  die Seitenlänge des gleichmäßigen  $2^n$ -Ecks. Für „große“  $n$  gilt

- Umfang des  $2^n$ -Ecks =  $2^n s_{2^n} \approx$  Umfang des Einheitskreises

- Fläche des  $2^n$ -Ecks  $= 2^n \frac{s_{2^n} h_{2^n}}{2} \approx$  Fläche des Einheitskreises

Dabei bezeichnet  $h_{2^n}$  die Höhe des Dreiecks, das aus zwei benachbarten Ecken des  $2^n$ -Ecks und dem Mittelpunkt des Kreises gebildet wird. Wenn in Abbildung 6  $D$  und  $E$  zwei benachbarte Punkte sind, d.h.  $\overline{DE} = s_{2^n}$ , dann ist  $h_{2^n} = \overline{MC}$ . Man beachte, dass  $h_{2^n} < 1$  aber für große  $n$  gilt  $h_{2^n} \approx 1$ .

Der Umfang des  $2^n$ -Ecks ist für große  $n$  als näherungsweise doppelt so groß ist wie sein Flächeninhalt. Damit muss der Umfang des Kreises genau doppelt so groß sein wie sein Flächeninhalt. Der Flächeninhalt des Einheitskreises beträgt also  $\pi$ .

Abbildung 5 zeigt den Fall eines regulären 4-Ecks. Nach dem Satz von Pythagoras besitzen die Strecken  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$  in Abbildung 5 alle die Länge  $\sqrt{2}$ . Es gilt nämlich  $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2 = \overline{AC}^2$ . Also  $s_4 = \sqrt{2}$ . Der Umfang des 4-Ecks beträgt also

$$4\sqrt{2} \approx 5.66.$$

Zudem gilt  $h_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (in Abbildung 5 ist  $h_4$  die Entfernung zwischen dem Mittelpunkt des Kreises und dem Mittelpunkt der Strecke  $BC$ , diese ist offenbar die Hälfte von  $\overline{AB}$ ). Der Flächeninhalt beträgt also

$$4 \frac{s_4 h_4}{2} = 4 \frac{\sqrt{2} \sqrt{2} / 2}{2} = 2.$$

Nun wollen wir rekursiv die Anzahl der Punkte des Ecks in jedem Iterationsschritt verdoppeln. Wir betrachten also den Übergang von einem  $2^n$ -Eck zu einem  $2^{n+1}$ -Eck. Dies ist in Abbildung 6 dargestellt. Sei in Abbildung 6  $\overline{DE}$  die Seitenlänge eines regulären  $2^n$ -Ecks, dann sind  $\overline{DB}$  und  $\overline{BE}$  die Seitenlängen regulärer  $2^{n+1}$ -Ecken. Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den Längen  $s_{2^n} := \overline{DE}$  und  $s_{2^{n+1}} := \overline{DB} = \overline{BE}$  herstellen. Dazu betrachten wir den Flächeninhalt des Dreiecks  $ADB$ . Wegen  $\overline{AB} = 2$  (Kreis ist Einheitskreis) und der Tatsache, dass der Winkel bei  $D$   $90^\circ$  beträgt, folgt mit dem Satz von Pythagoras  $\overline{AD} = \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2}$ . Ebenso wegen  $\angle DBA = 90^\circ$  folgt

$$\text{Fläche des Dreiecks } ADB = \frac{1}{2} s_{2^{n+1}} \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2}.$$

Andererseits gilt

$$\text{Fläche des Dreiecks } ADB = \frac{1}{4} \overline{AB} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} s_{2^n}.$$

und damit

$$s_{2^{n+1}} \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2} = s_{2^n}. \tag{1.2}$$

Nun möchte man natürlich gegeben  $s_n^2$  die Zahl  $s_{2^{n+1}}^2$  ausrechnen. Also muss (1.2) nach  $s_{2^{n+1}}$  aufgelöst werden. Quadriert man beide Seiten von (1.2) erhält man

$$s_{2^{n+1}}^2 (4 - s_{2^{n+1}}^2) = s_{2^n}^2$$

bzw.

$$s_{2^{n+1}}^4 - 4s_{2^{n+1}}^2 + s_{2^n}^2 = 0,$$

also eine quadratische Gleichung in  $s_{2^{n+1}}^2$ . Da  $s_{2^{n+1}}^2 < 2$  gelten muss, ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$s_{2^{n+1}}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

bzw.

$$s_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2}} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Es gilt also

$$s_4 = \sqrt{2}, \quad s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$s_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad \text{mit } n - 3 \text{ Pluszeichen}$$

Man berechnet damit z.B.

$$s_{64} = 0.098135 \dots$$

also gilt für den Umfang  $U_{64} = 64 \times 0.098135 \dots = 6.28066 \dots$  also

$$\pi \approx 3.14033$$

$\pi$  ist eine irrationale Zahl, für deren ersten zehn Nachkommastellen gilt

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

(keine Rundung). Wir haben uns  $\pi$  von unten angenähert, indem wir  $2^n$ -Ecken in den Einheitskreis *einbeschrieben* haben. Ähnlich kann man den Kreis mit regelmäßigen Vielecken *umschreiben*, und erhält einen Näherungswert oberhalb von  $\pi$ .

Andere (aus der Differential- und Integralrechnung stammenden) Möglichkeiten  $\pi$  zu approximieren sind

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$



**Bemerkung 1.5.** Allgemein ist bei der Berechnung von Längen durch Approximationen jedoch Vorsicht geboten. Sei in Abbildung 7  $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ . Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass  $\overline{AC} = \sqrt{2}$ . Der kürzeste Weg von A nach C hat also etwa die Länge 1.4142. Würde man jedoch, um von A nach C zu kommen, entlang der eingezeichneten Treppe laufen, dann wäre die Weglänge stets 2, egal wie fein die Treppenstufen gewählt würden. Die Treppe ist bei immer kleiner werdenden Stufen beliebig nah an der Diagonalen, aber die Längen der Treppe und der Diagonalen unterscheiden sich signifikant voneinander.

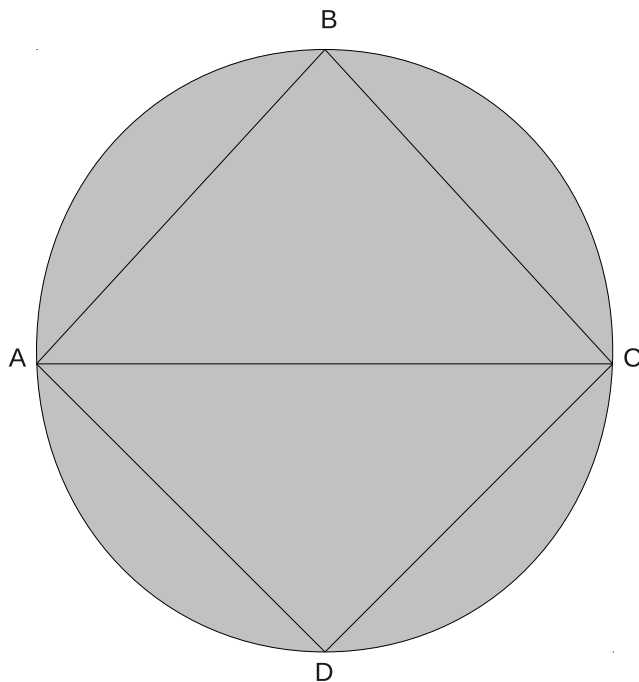


Abbildung 5: Reguläres 4-Eck

### 1.3 Trigonometrische Funktionen

In der Analysis stellt es sich oft als zweckmäßig heraus, Winkel nicht in Grad sondern im Bogenmaß zu gemessen. Das Bogenmaß eines Winkels ist die Länge des Bogens, der von dem entsprechenden Winkel auf dem Einheitskreis erzeugt wird. Wir werden sehen, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Cosinusfunktion ist, wenn man das Bogenmaß eines Winkels in die beiden Funktionen einsetzt. Bei einer anderen Skalierung würde ein zusätzlicher Vorfaktor ins Spiel kommen.

Es gelten z.B. folgende Umrechnungen

360°	entspricht	$2\pi$
180°	entspricht	$\pi$
90°	entspricht	$\pi/2$

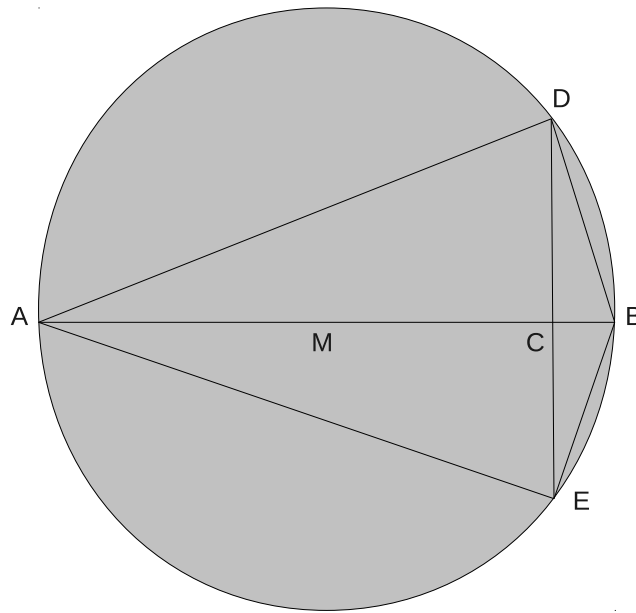


Abbildung 6: Zusammenhang zwischen  $s_{2^n}$  und  $s_{2^{n+1}}$

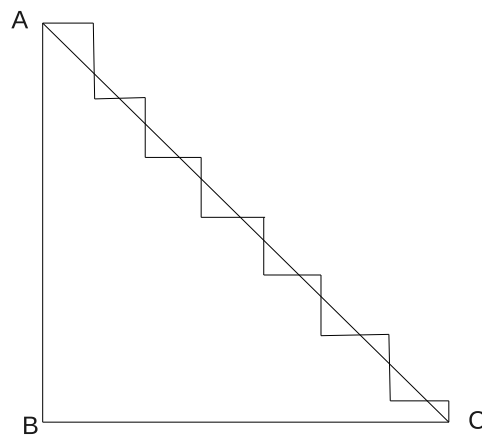


Abbildung 7: Approximation des kürzesten Weges von  $A$  nach  $C$  ?

Die Umrechnung von Grad in Bogenmaß und umgekehrt ist also

$$\alpha^\circ \quad \text{entspricht} \quad \alpha \frac{\pi}{180} \text{ Einheiten im Bogenmaß}$$

$$\varphi \text{ Einheiten im Bogenmaß} \quad \text{entsprechen} \quad \left(\varphi \frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der **Sinus** eines Winkels  $\alpha$  (angegeben im Bogen-

maß) definiert als der Quotient

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{die } \alpha \text{ gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Die abkürzende Schreibweise lautet  $\sin(\alpha)$ .

Der **Cosinus** eines Winkels  $\alpha$  (angegeben im Bogenmaß) ist definiert als der Quotient

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{die } \alpha \text{ anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Die abkürzende Schreibweise lautet  $\cos(\alpha)$ .

Der **Tangens** eines Winkels  $\alpha$  ist definiert als

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Die abkürzende Schreibweise lautet  $\tan(\alpha)$ .

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 8 folgt aus dem Strahlensatz

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \overline{CD}$$

und damit  $\overline{CD} = \tan(\alpha)$ . Also

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Offenbar lassen sich  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  nicht nur für Winkel zwischen  $0$  und  $\pi/2$  (d.h. zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ ), sondern zunächst für alle Winkel bis  $2\pi$  (also  $360^\circ$ ) definieren. Bei Winkeln größer als  $2\pi$  durchläuft man den Einheitskreis einfach mehrfach. Sinus und Cosinus sind daher  $2\pi$ -periodisch, d.h.

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Allgemein heißt eine Funktion  $f$   $p$ -periodisch für  $p \in \mathbb{R}$ , wenn

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für eine  $p$ -periodisch Funktion gilt damit

$$f(x + np) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Des weiteren gilt  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ,

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Die Cosinusfunktion geht aus der Sinusfunktion hervor, indem man diese um  $\pi/2$  verschiebt, d.h.

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \pi/2).$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1. \tag{1.3}$$

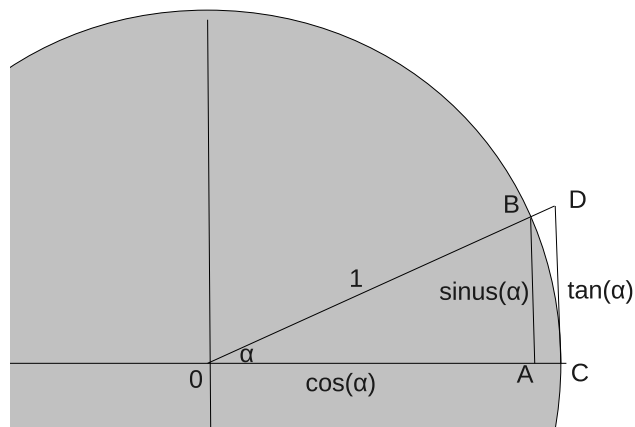


Abbildung 8: Sinus, Cosinus und Tangens

**Satz 1.6** (Cosinussatz). *Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 9 gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

(Da es sich um ein beliebiges Dreieck handelt, dürfen die Bezeichnungen vertauscht werden, und es muss entsprechend  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$  und  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$  gelten).

*Beweis.* Wir werden hier nur den Fall  $\gamma \leq 90^\circ$  beweisen. Der Fall  $\gamma > 90^\circ$  ist ähnlich und wird in den Übungen behandelt. Wie in Abbildung 9 ist  $h$  das Lot vom Punkt  $B$  auf die Strecke  $b$  ( $h$  steht also senkrecht auf  $b$ ). In der Abbildung ist  $\gamma < 90^\circ$ . Der Fall  $\gamma = 90^\circ$  ist der Satz des Pythagoras und damit bereits bewiesen. Es gilt  $b_2 = a \cos(\gamma)$ . Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$c^2 = b_1^2 + h^2$$

und

$$h^2 = a^2 - b_2^2.$$

Alles zusammen ergibt

$$\begin{aligned} c^2 &= b_1^2 + h^2 \\ &= (b - b_2)^2 + a^2 - b_2^2 \\ &= b^2 - 2bb_2 + b_2^2 + a^2 - b_2^2 \\ &= b^2 - 2bb_2 + a^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \end{aligned}$$

□

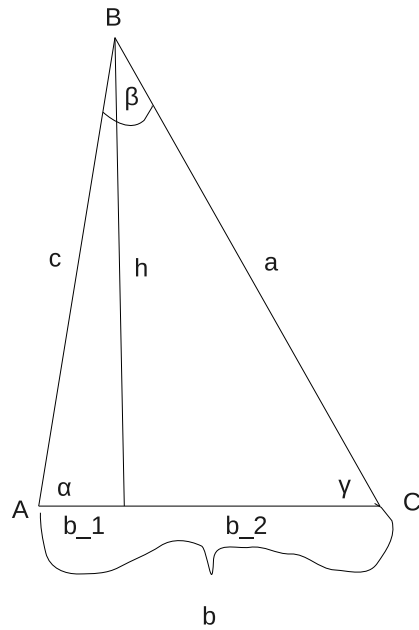


Abbildung 9: Beweis des Sinus- und des Cosinussatzes

**Satz 1.7** (Sinussatz). *Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 9 gilt*

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

*Beweis.* Wie in Abbildung 9 ist  $h$  das Lot vom Punkt  $B$  auf die Strecke  $b$ .  $h$  steht also senkrecht auf  $b$ . Es gilt  $h = c \sin(\alpha)$ . Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha).$$

Nun kann man den Flächeninhalt des Dreiecks analog ausrechnen, indem man  $A$  auf  $a$  oder  $C$  auf  $c$  projiziert, was u.a. zu den Ausdrücken  $\frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$  und  $\frac{1}{2}ca \sin(\beta)$  führt. Es muss daher

$$\frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma) = \frac{1}{2}ca \sin(\beta)$$

gelten. Teilt man nun durch das Produkt  $abc$  folgt die Behauptung. □

**Satz 1.8** (Additionstheoreme). *Für alle Winkel  $\alpha, \beta$  gilt*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \tag{1.4}$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta). \quad (1.5)$$

Außerdem gelten die Halbwinkelformeln

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2) \quad \text{und} \quad 1 + \cos(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha/2).$$

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich aus Abbildung 10. Der Punkt  $B$  auf der Strecke  $0C$  ist dadurch definiert, dass die Strecken  $0C$  und  $QB$  senkrecht aufeinander stehen. Daraus folgt, dass die beiden mit  $\alpha$  bezeichneten Winkel tatsächlich miteinander übereinstimmen. Da sich die Winkel jedes Dreiecks zu  $180^\circ$  addieren gilt nämlich

$$\beta + (\gamma + \tilde{\alpha}) + 90^\circ = 180^\circ$$

und

$$(\alpha + \beta) + \gamma + 90^\circ = 180^\circ,$$

was  $\tilde{\alpha} = \alpha$  nach sich zieht (dabei wird der neben  $\gamma$  liegende Winkel zunächst mit  $\tilde{\alpha}$  bezeichnet).

Es gilt nun

$$\sin(\alpha + \beta) = \overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR}.$$

Für die Längen der Teilstrecken  $QA$  und  $AR$  gilt

$$\overline{QA} = \cos(\alpha) \overline{QB} = \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

und

$$\overline{AR} = \overline{BS} = \sin(\alpha) \overline{0B} = \sin(\alpha) \cos(\beta).$$

Insgesamt folgt

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta).$$

Des weiteren gilt

$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{0R}$$

und

$$\overline{0S} = \cos(\alpha) \overline{0B} = \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

sowie

$$\overline{RS} = \overline{AB} = \sin(\alpha) \overline{QB} = \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Insgeamt folgt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Schließlich folgen aus (1.5) und (1.3) die Halbwinkelformeln. Setzt man für  $\alpha$  und  $\beta$  in (1.5) jeweils  $\alpha/2$  ein, dann gilt nämlich

$$2 \sin^2(\alpha/2) \stackrel{(1.3)}{=} \sin^2(\alpha/2) + 1 - \cos^2(\alpha/2) \stackrel{(1.5)}{=} 1 - \cos(\alpha/2 + \alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$$

und

$$2 \cos^2(\alpha/2) \stackrel{(1.3)}{=} \cos^2(\alpha/2) + 1 - \sin^2(\alpha/2) \stackrel{(1.5)}{=} \cos(\alpha/2 + \alpha/2) + 1 = 1 + \cos(\alpha).$$

□

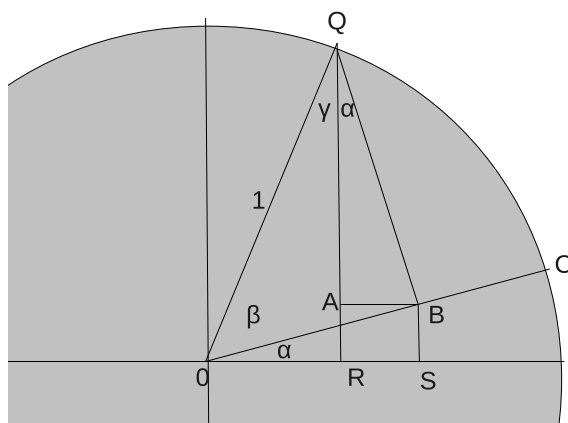


Abbildung 10: Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

## 2 Folgen und Reihen

**Definition 2.1.** Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $a_n \in \mathbb{R}$  zuordnet. Wir schreiben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $a_n$  werden Folgenglieder genannt.

**Beispiele 2.2.**  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ .

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, \dots).$$

Rekursiv definierte Folgen: Folge der **Fibonacci-Zahlen**,  $a_1 := 0$ ,  $a_2 := 1$  und  $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$  für  $n \geq 3$ . Dies ergibt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ . Benannt ist sie nach Leonardo Fibonacci, der damit 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb.

**Definition 2.3.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **konvergent** gegen  $a$ , wenn sich die Folgenglieder  $a_n$  für „große“  $n$  „kaum“ noch von  $a$  unterscheiden. Mathematisch:

Zu jeder vorgegebenen **Fehlerschranke**  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $|a_n - a| \leq \varepsilon$ . Dabei ist der **Absolutbetrag** einer reellen Zahl  $x$  definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Oder **äquivalent**: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \text{ bis auf höchstens endlich viele.}$$

Wir schreiben dann

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, nennt man die Folge **konvergent**, andernfalls **divergent**. Die Zahl  $a$  wird **Grenzwert** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genannt.

$n_\varepsilon$  darf offenbar von der Wahl von  $\varepsilon > 0$  abhängen. I.d.R. muss man  $n_\varepsilon$  immer größer wählen, wenn die erlaubte Abweichung  $\varepsilon$  immer kleiner wird.

Für alle reellen Zahlen  $a, b$  gilt die **Dreiecksungleichung**

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{2.1}$$

**Satz 2.4** (Eindeutigkeit des Grenzwertes). Wenn eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl gegen  $a \in \mathbb{R}$  als auch gegen  $b \in \mathbb{R}$  konvergiert, dann gilt  $a = b$ .

**Bemerkung 2.5.** Satz 2.4 rechtfertigt erst die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

*Beweis von Satz 2.4.* Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  Grenzwerte, gegen die die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Sinne von Definition 2.3 konvergiert. Wir werden nun durch Erzeugung eines Widerspruch beweisen, dass  $a$  und  $b$  gleich sein müssen.

**Annahme:**  $a \neq b$ . Definiere  $\varepsilon := \frac{|b-a|}{3}$ . Es gilt  $\varepsilon > 0$  und nach Voraussetzung existieren natürliche Zahlen  $m_1, m_2$ , so dass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m_1 \quad \text{und} \quad |a_n - b| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m_2.$$

Für  $m := \max(m_1, m_2)$  gilt also sowohl  $|a_m - a| \leq \varepsilon$  als auch  $|a_m - b| \leq \varepsilon$ . Mit der Dreiecksungleichung (siehe Übungsaufgabe 3) folgt

$$|b - a| \leq |a_m - a| + |b - a_m| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|b - a| \stackrel{|b-a|>0}{<} |b - a|,$$

was offenbar ein Widerspruch ist. □



**Definition 2.6** (Bestimmte Divergenz gegen  $\pm\infty$ ). Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **bestimmt divergent** gegen  $+\infty$ , wenn zu jedem  $K \in \mathbb{R}$  ein  $n_K \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_K$  gilt  $a_n \geq K$  (oft schreibt man einfach  $\infty$  statt  $+\infty$ ).

Analog heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **bestimmt divergent** gegen  $-\infty$ , wenn zu jedem  $K \in \mathbb{R}$  ein  $n_K \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_K$  gilt  $a_n \leq K$ .

Wir schreiben

$$a_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

bzw.

$$a_n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

**Bemerkung 2.7.** Eine „bestimmt divergente“ Folge wird manchmal auch „uneigentlich konvergent“ genannt.

**Definition 2.8.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **nach oben beschränkt**, wenn ein  $K \in \mathbb{R}$  existiert mit  $a_n \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und **nach unten beschränkt**, wenn entsprechend  $a_n \geq \tilde{K}$  für ein  $\tilde{K} \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Folge, die sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, heißt **beschränkt**.

**Satz 2.9.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen. Dann gilt folgendes

(i) Auch die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n + b_n$  ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(ii) Auch die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := a_n b_n$  ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

(iii) Wenn  $b_n \neq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , dann ist auch die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n := \frac{a_n}{b_n}$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

*Beweis.* Zu (i): Bezeichne  $a$  den Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $b$  den Grenzwert der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir geben uns eine Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$  vor und möchten zeigen, dass für „große“  $n$  gilt  $|a_n + b_n - (a + b)| \leq \varepsilon$ . Damit wäre dann gezeigt, dass  $a + b$  der Grenzwert der Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist.

Nun wissen wir aber aus der Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $b$ , dass es  $n_{\varepsilon/2}$  und  $\tilde{n}_{\varepsilon/2}$  gibt mit

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_{\varepsilon/2} \tag{2.2}$$

und

$$|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq \tilde{n}_{\varepsilon/2}. \quad (2.3)$$

Aus (2.2), (2.3) und der Dreiecksungleichung (2.1) folgt

$$|a_n + b_n - (a + b)| \stackrel{(2.1)}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max(n_{\varepsilon/2}, \tilde{n}_{\varepsilon/2}).$$

(ii) und (iii): Übungsaufgabe. □

Man kann konvergenzartiges Verhalten einer Folge auch ohne Zuhilfenahme eines Grenzwertes formulieren. Hierfür führen wir den Begriff der **Cauchy-Folge** ein.

**Definition 2.10.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn sich die Folgeglieder  $a_n$  für „große“  $n$  „kaum“ noch voneinander unterscheiden. Mathematisch:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$  gilt  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ .

**Satz 2.11.** Konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $a$ , dann ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung existiert zu  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  ein  $\tilde{n} = \tilde{n}(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq \tilde{n}$ . Damit folgt wieder aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq \tilde{n}.$$

Also ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. □

Die Umkehrung des Satzes, also die Aussage „jede Cauchy-Folge konvergierte gegen eine Zahl“, erscheint auch plausibel: für große  $n$  häufen sich die Folgeglieder  $a_m$  mit  $m \geq n$  in immer kleineren Intervallen. Die Umkehrung beruht jedoch darauf, dass der Zahlenbereich, anschaulich gesprochen, keine „Lücken“ hat. In der Elementarmathematik I wurde eine Definition der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  angegeben und es konnte gezeigt werden, dass  $\mathbb{R}$  keine Lücken hat, d.h. in  $\mathbb{R}$  gibt es zu jeder Cauchy-Folge einen Grenzwert. Diese wichtige Eigenschaft nennt man im Fachjargon **Vollständigkeit**. Wir werden die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  im Folgenden öfters benutzen.

**Definition 2.12** (Intervalle). Sei  $a \leq b$ . Intervalle sind definiert als folgende Mengen

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned} \right\} \text{halboffene Intervalle}$$

**Definition 2.13.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

**Teilfolge der Folge**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Eine Teilfolge entsteht also aus einer Ausdünnung der ursprünglichen Folge, bei der unendlich viele Folgenglieder übrig bleiben.

**Beispiel 2.14.**

$$(1, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, 1, 1, \frac{1}{5}, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{6}, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{7}, \dots)$$

$$\text{Teilfolge} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$$

**Definition 2.15** (monotone Folgen von reellen Zahlen).

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots & \quad \text{monoton wachsende Folge} \\ a_1 < a_2 < a_3 < \dots & \quad \text{strikt monoton wachsende Folge} \\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots & \quad \text{monoton fallende Folge} \\ a_1 > a_2 > a_3 > \dots & \quad \text{strikt monoton fallende Folge} \end{aligned}$$

**Satz 2.16.** Jede monoton wachsende (oder monoton fallende) und beschränkte Folge ist konvergent.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende und beschränkte Folge. Wir möchten zeigen, dass eine solche Folge eine Cauchy-Folge (vgl. Definition 2.10) sein muss. Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  würde dann ein  $a \in \mathbb{R}$  existieren, gegen das die Folge konvergiert.

**Widerspruchsannahme:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist **keine** Cauchy-Folge.

Damit gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass es für jedes  $n_1$  ein Paar  $(n_2, n_3)$  gibt mit  $n_1 \leq n_2 < n_3$  und  $|a_{n_2} - a_{n_3}| > \varepsilon$ . Aus der Monotonie folgt  $a_{n_3} > a_{n_2} + \varepsilon \geq a_{n_1} + \varepsilon$ . Damit lässt sich sukzessive eine Teilfolge  $(a_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit  $m_1 := 1$  und  $a_{m_{k+1}} > a_{m_k} + \varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $a_{m_{k+1}} > a_1 + k\varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Beschränktheit von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Es folgt, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge sein muss.

Für monoton fallende Folgen geht der Beweis völlig analog. Es wird dann im Widerspruchsbeweis eine Teilfolge konstruiert mit  $a_{m_{k+1}} < a_{m_k} - \varepsilon$ .  $\square$

**Beispiel 2.17** (Darstellung von Zahlen am Computer). Sei  $z_1, z_2, z_3, \dots$  eine Ziffernfolge mit  $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  und  $z_0 \in \mathbb{N}_0$ .  $z_1, z_2, z_3, \dots$  geben die Nachkommastellen einer reellen Zahl an. Wir betrachten die Folge von **Dezimalbrüchen**

$$a_n := z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_n := z_0 + \sum_{k=1}^n z_k 10^{-k}, \quad (2.4)$$

die durch Abbruch nach der  $n$ -ten Nachkommastelle entstehen. Offenbar ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in (2.4) monoton wachsend und durch  $z_0 + 1$  beschränkt (es gilt nämlich  $a_n \leq z_0 + \underbrace{0.999\dots9}_n$ ). Aus Satz 2.16 folgt die Existenz eines Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  in der Menge der  $n$  mal reellen Zahlen. Diesen Limes schreibt man als  $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  (nicht abbrechend).

## 2.1 Reihen

Folgen sind oft durch Summen gegeben, d.h.

$$a_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

Solche Folgen nennt man **Reihen**. Für festes  $n \in \mathbb{N}$  heißt  $\sum_{k=1}^n x_k$  eine Partialsumme. Wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^n x_k$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert oder bestimmt divergiert dann bezeichnen wir den Grenzwert mit  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$ .

**Satz 2.18** (Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe). *Wenn  $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergent ist, dann muss  $x_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gelten.*

*Beweis.* Wenn die Partialsummen  $\sum_{k=1}^n x_k$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren, müssen sie nach Satz 2.11 eine Cauchy-Folge bilden. Dies impliziert, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \varepsilon.$$

Wegen  $\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^n x_k = x_{n+1}$  bedeutet dies aber, dass die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null konvergiert.  $\square$

**Bemerkung 2.19.** *Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, d.h. im Allgemeinen*

$$x_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow x \text{ für ein } x \in \mathbb{R}.$$

*Dies zeigt Beispiel 2.22.*

**Beispiel 2.20** (Geometrische Reihe). *Sei  $q \in (0, 1)$ . Es gilt*

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

*und die Reihe  $(\sum_{k=0}^n q^k)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}. \quad (2.6)$$

(2.5) könnte man mit vollständiger Induktion beweisen. Man sieht aber auch direkt, dass  $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \dots + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$ .

Aus (2.5) folgt (2.6), da für  $q \in (0, 1)$  der Ausdruck  $q^{n+1}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

**Beispiel 2.21** (Renten). Wir betrachten eine  $n$ -jährige Rente, die in  $m$  Jahren beginnt und die am 1. Januar jedes Jahres  $X$  EUR auszahlt. Sei  $i$  der jährliche risikolose Zinssatz, also z.B.  $i = 0.03$  bei einer dreiprozentigen Verzinsung. Setze  $v := 1/(1+i)$ . Wie hoch ist die Einmalzahlung  $B$ , die heute geleistet werden müsste, um die Rente zu erwerben? Es gilt

$$B = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} X = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k X.$$

Die Multiplikation mit  $v^k$  nennt man Diskontierung der Auszahlung  $X$  auf den Zeitpunkt 0. Würde man den Betrag  $Xv^k$  zum Zeitpunkt 0 anlegen, dann hätte man zum Zeitpunkt  $k$  gerade den Betrag  $X$ . Mit (2.5) kann man schließen

$$B = Xv^m \sum_{k=0}^{n-1} v^k = v^m X \frac{1 - v^n}{1 - v}.$$

$B$  wird als Barwert (zum Zeitpunkt 0) der Rentenzahlung bezeichnet.

**Beispiel 2.22** (Harmonische Reihe). Die **harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$ , d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt nämlich

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Also gilt

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}}_{=a_{2n}} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{=a_n} + \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$a_{2^m} \geq a_{2^{m-1}} + \frac{1}{2} \geq a_{2^{m-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \dots \geq a_1 + m \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Damit divergiert die Teilfolge  $(a_{2^m})_{m \in \mathbb{N}}$  bestimmt gegen  $\infty$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist, gilt

$$a_n \geq a_{2^m} \quad \text{für alle } n \geq 2^m.$$

Damit folgt, dass auch  $a_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz 2.23.** Sei  $r \in \mathbb{R}$ . Für  $r > 1$  konvergiert die Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r})_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \infty.$$

*Beweis.* Wir beweisen die Konvergenz indem wir zeigen, dass die Partialsummen durch  $\frac{1}{1-2^{1-r}}$  beschränkt sind (man beachte, dass  $r = 1$  ausgeschlossen ist!). Sei  $N \in \mathbb{N}$  beliebig vorgegeben. Es existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $N \leq 2^{m+1} - 1$ . Damit gilt mit der Zusammenfassung der Summanden bis zu nächsten Zweierpotenz

$$\begin{aligned} a_N &\leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^r} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \dots + \left(\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^r}\right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{n^r} \\ &\leq \sum_{i=0}^m 2^i \frac{1}{(2^i)^r} \\ &= \sum_{i=0}^m (2^i)^{1-r} \\ &= \sum_{i=0}^m (2^{1-r})^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (2^{1-r})^i \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{1 - 2^{1-r}}. \end{aligned}$$

Für die zweite Ungleichung wird jede Teilsumme durch das Produkt aus der Anzahl der Summanden der Teilsumme und dem größten Summanden der Teilsumme nach oben abgeschätzt.  $\square$

## 2.2 Mittelbildungen und gerechte Noten

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reelle Zahlen – etwa Noten eines Schülers aus verschiedenen Klausuren. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Zahlen zu mitteln

$$\text{Arithmetisches Mittel} \quad A(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Für  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  definiert man

$$\text{Geometrisches Mittel} \quad G(x_1, \dots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Das geometrische Mittel ist eine adäquate Mittelung von **Wachstumsfaktoren**. Nehme an, ein Bestand vermehrt sich im  $k$ -ten Jahr um den Faktor  $x_k - 1$ , d.h. der Wachstumsfaktor im  $k$ -ten Jahr beträgt  $x_k$ . Nach  $n$  Jahren ist der Bestand dann genauso stark gewachsen als wenn er sich jedes Jahr um den Faktor  $G(x_1, \dots, x_n) - 1$  gewachsen wäre, d.h. der jährliche Wachstumsfaktor jedes Jahr  $G(x_1, \dots, x_n)$  betragen hätte.

$$\text{Harmonisches Mittel } H(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \quad \text{für } x_1, \dots, x_n > 0.$$

Das harmonische Mittel ist z.B. bei **Geschwindigkeiten** ein sinnvoller Durchschnittswert. Nehme etwa an, ein Auto hat  $n$  Streckenstücke der Länge  $s$  zu überwinden und fährt im  $k$ -ten Streckenstück mit der Geschwindigkeit  $x_k$ . Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Fahrt beträgt dann  $H(x_1, \dots, x_n)$ . Für das  $k$ -te Streckenstück braucht das Auto nämlich  $t_k = s/x_k$  Zeiteinheiten, da die Geschwindigkeit als  $x_k = s/t_k$  definiert ist. Damit braucht das Auto für die Gesamtstrecke, die die Länge  $n \cdot s$  hat,  $\sum_{k=1}^n s/x_k = s \sum_{k=1}^n 1/x_k$  Zeiteinheiten.

Alle drei Mittel haben die Eigenschaft, dass sie zwischen dem kleinsten und dem größten  $x_k$  liegen (die Mittel sind monoton wachsend in jedem  $x_k$  und setzt man  $n$ -mal die gleiche Zahl ein, kommt diese Zahl wieder heraus).

**Satz 2.24.** Für  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  gilt

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n). \quad (2.7)$$

Gleichheit in (2.7) gilt genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Beweis.* 1. Schritt: Zunächst beweisen wir eine verwandte Aussage. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  gelten die beiden Implikationen

$$x_1 + \dots + x_n = n \implies x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1 \quad (2.8)$$

und

$$(x_1 + \dots + x_n = n \text{ und } x_i \neq 1 \text{ für mindestens ein } x_i) \implies x_1 \cdot \dots \cdot x_n < 1. \quad (2.9)$$

Wir möchten die Aussage  $A(n)$

$$(2.8) \text{ und } (2.9) \text{ gelten für alle } x_1, \dots, x_n \geq 0$$

durch vollständige Induktion beweisen.

Induktions-Anfang  $n = 1$ : Für  $n = 1$  ist die Aussage offensichtlich. Man beachte, dass die linke Seite von (2.9) gar nicht auftreten kann. Damit ist die Implikation in jedem Fall richtig!

Induktions-Schritt:  $n \rightsquigarrow n + 1$ . Die Induktionsvoraussetzung ist, dass (2.8) und (2.9) für alle  $x_1, \dots, x_n$  gelten. Wir müssen zeigen, dass die Aussagen (2.8)/(2.9) für alle  $x_1, \dots, x_{n+1}$  gelten (man beachte, dass die Induktion nicht entlang einer festen Folge  $x_1, x_2, x_3, \dots$  durchgeführt wird).

Seien  $x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$  mit

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = n + 1. \quad (2.10)$$

1. *Fall*: Alle  $x_i = 1$ . Hier ist  $x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1} \leq 1$  offensichtlich, während für (2.9) nichts gezeigt werden muss.

2. *Fall*:  $x_i \neq 1$  für mindestens ein  $i = 1, \dots, n + 1$ . Nun muss ein  $x_i$  strikt größer 1 und ein anderes strikt kleiner 1 sein. Wir können o.B.d.A. („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) annehmen, dass  $x_n = 1 + \alpha$  und  $x_{n+1} = 1 - \beta$  mit  $\alpha > 0, \beta \in (0, 1]$  (da die Anordnung keine Rolle spielt). Definiere  $\tilde{x}_n := 1 + \alpha - \beta$ . Es gilt  $\tilde{x}_n \geq 1 - \beta \geq 0$  und

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + \tilde{x}_n = x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - 1 \stackrel{(2.10)}{=} n. \quad (2.11)$$

Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die  $n$  nichtnegativen Zahlen  $x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n$  an. Aus der Induktionsvoraussetzung und (2.11) folgt

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot \tilde{x}_n \leq 1. \quad (2.12)$$

Des weiteren gilt

$$\tilde{x}_n = 1 + \alpha - \beta > 1 + \alpha - \beta - \alpha\beta = (1 + \alpha)(1 - \beta) = x_n x_{n+1}. \quad (2.13)$$

Nimmt man (2.13) und (2.12) zusammen folgt

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n \cdot x_{n+1} < x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot \tilde{x}_n \leq 1 \quad \text{wenn } x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{n-1} > 0$$

bzw.

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 0 < 1 \quad \text{wenn } x_i = 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n - 1\}.$$

Damit sind (2.8) und (2.9) für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen.

2. *Schritt*: Seien  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  ist (2.7) mit Gleichheit offensichtlich. Wenn die  $x_i$  nicht alle verschwinden, gilt aber  $x_1 + \dots + x_n > 0$ . (2.8) angewandt auf  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  mit

$$\tilde{x}_i := \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} x_i$$

ergibt

$$\tilde{x}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n \leq 1. \quad (2.14)$$



Aus (2.14) folgt

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n$$

und damit (2.7). Wenn die  $x_i$  nicht alle gleich sind, gilt  $\tilde{x}_i \neq 1$  für mindestens ein  $i = 1, \dots, n$ . (2.9) angewandt auf  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  ergibt

$$\tilde{x}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n < 1$$

und damit

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n < \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n.$$

□

**Satz 2.25.** Für  $x_1, \dots, x_n > 0$  gilt

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n). \quad (2.15)$$

Gleichheit in (2.25) gilt genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Beweis.* Wegen Satz 2.24 müssen wir nur noch die erste Ungleichung in (2.15) zeigen. Wenden wir Satz 2.24 nun auf die Zahlen

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$$

an, dann folgt

$$\frac{1}{H(x_1, \dots, x_n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}$$

und damit

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = G(x_1, \dots, x_n).$$

Wenn es  $i, j$  gibt mit  $x_i \neq x_j$ , dann gilt auch  $\frac{1}{x_i} \neq \frac{1}{x_j}$  und mit Satz 2.24 folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} > \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}.$$

□

### 3 Stetige Funktionen

Wir betrachten im folgenden Abbildungen  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  (d.h. jedes Element von  $\mathcal{D}$  ist auch Element von  $\mathbb{R}$ ). Solche Abbildungen nennt man auch **Funktionen**.  $\mathcal{D}$  heißt der **Definitionsbereich** von  $f$ . Oft stimmt er mit ganz  $\mathbb{R}$  überein. Manchmal können Funktionen aber nicht überall definiert werden. Eine Funktion  $f$  wird oft auch mit  $x \mapsto f(x)$  symbolisiert. Insbesondere wenn der Definitionsbereich der Funktion offensichtlich oder nicht so wichtig ist. Zum Beispiel bezeichnet  $x \mapsto x^2$  die Funktion, die jeder Zahl ihr Quadrat zuordnet.

**Beispiel 3.1.**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $x \mapsto f(x) = 1/x$ .

**Definition 3.2.** Eine Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **injektiv**, wenn für alle  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt, dass auch  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .  $f$  heißt **surjektiv**, wenn es für jedes  $y \in \mathbb{R}$  ein  $x \in \mathcal{D}$  gibt mit  $f(x) = y$ .  $f$  heißt **bijektiv**, wenn  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

**Definition 3.3.** Sei  $A \subset \mathcal{D}$ . Die Menge  $f(A) := \{y \in \mathbb{R} \mid \text{Es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y.\}$  bezeichnet man als das **Bild der Menge A unter der Abbildung f**.

Wenn  $f$  injektiv ist, kann man auf  $f(\mathcal{D})$  eine **Umkehrabbildung**  $f^{-1}$ , wie folgt definieren:

$f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D} \quad y \mapsto x,$  wobei  $x \in \mathcal{D}$  eindeutige Lösung der Gleichung  $f(x) = y$  ist.

Wenn  $f$  auch noch surjektiv, also insgesamt bijektiv ist, gilt  $f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$ , d.h. die Umkehrabbildung ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Vorsicht:** Man verwechsle die Umkehrfunktion nicht mit der Funktion  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ .

**Definition 3.4.** Eine Funktion  $f$  heißt

monoton wachsend, wenn	$f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$
strikt monoton wachsend, wenn	$f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$
monoton fallend, wenn	$f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$
strikt monoton fallend, wenn	$f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$

**Bemerkung 3.5.** Eine strikt monoton wachsende oder strikt monoton fallende Funktion ist offenbar injektiv.

**Definition 3.6** (Stetigkeit). Eine Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Punkt  $x_0 \in \mathcal{D}$  **stetig**, wenn für **jede** Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{D}$  mit  $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ , auch die entsprechenden Funktionswerte konvergieren, d.h.

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0), \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.1}$$

$f$  heißt stetig, wenn es in jedem Punkt  $x_0 \in \mathcal{D}$  stetig ist.

*Interpretation:* Für alle  $x \in \mathcal{D}$ , die hinreichend nahe bei  $x_0$  liegen, müssen die Funktionswerte  $f(x)$  beliebig nahe bei  $f(x_0)$  liegen.

Man wäre geneigt zu sagen: „Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne dabei den Stift absetzen zu müssen.“ Bei den meisten Funktionen, denen man so begegnet, ist diese Beschreibung von Stetigkeit sicher zutreffend. Allerdings gibt es auch stetige Funktionen (im Sinne von Definition 3.6), die man überhaupt nicht zeichnen kann, so dass diese Beschreibung als Grundlage einer formalen Definition von Stetigkeit ungeeignet ist.

**Bemerkung 3.7.** Mit Satz 2.9 wissen wir bereits, dass die Summe und das Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen sind. Zudem sind alle Polynome  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  stetig.

### 3.1 Zwischenwerte und Fixpunkte

**Satz 3.8** (Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem  $z$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ , d.h. für  $f(a) \leq z \leq f(b)$  bzw.  $f(b) \leq z \leq f(a)$ , ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = z$ .

*Beweis.* Der Beweis beruht auf einer sukzessiven Intervallhalbierung. Das Startintervall ist  $[a_1, b_1]$  mit  $a_1 := a$  und  $b_1 := b$ . O.B.d.A.  $f(a) \leq f(b)$ , also  $z \in [f(a), f(b)]$ . Ausgehend vom  $n$ -ten Intervall  $[a_n, b_n]$  wird das nächste Intervall  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  wie folgt definiert.

$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{wenn } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq z \\ a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} b_n & \text{wenn } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq z \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind so konstruiert, dass

$$f(a_n) \leq z \leq f(b_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Des weiteren gilt

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

und

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

Da zudem die Folgen nach unten durch  $a$  und nach oben durch  $b$  beschränkt sind, folgt mit Satz 2.16, dass die Limiten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existieren. Des weiteren folgt aus

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{4}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = 2^{-n}(b - a)$ , dass die Differenzenfolge  $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0 konvergiert. Mit Satz 2.9 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

d.h. die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren gegen ein *gemeinsames*  $x_0 \in [a, b]$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  zieht dies

$$f(a_n) \rightarrow f(x_0) \text{ und } f(b_n) \rightarrow f(x_0) \quad (3.3)$$

nach sich. (3.2) impliziert jedoch, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq z$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq z$ , was zusammen mit (3.3)

$$f(x_0) = z$$

ergibt. □

**Satz 3.9** (Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  eines abgeschlossenen Intervalls in sich selber besitzt einen **Fixpunkt**, d.h. ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = x_0$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) := f(x) - x$ .  $g$  ist stetig und wegen  $f(x) \in [a, b]$  für  $x \in [a, b]$  gilt

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

und

$$g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

0 liegt also zwischen  $g(a)$  und  $g(b)$  (nicht notwendigerweise strikt dazwischen; der Fall, dass  $g(a) = g(b) = 0$  ist nicht ausgeschlossen). Eine Anwendung des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz eines  $x_0 \in [a, b]$  mit  $g(x_0) = 0$  und damit  $f(x_0) = x_0$ . □

**Bemerkung 3.10.** *Fixpunkte von Abbildungen spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Man stelle sich etwa eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vor, die rekursiv durch die Vorschrift*

$$a_{n+1} := f(a_n)$$

*(und einem Startwert  $a_1$ ) gegeben ist. Wenn die Folge gegen eine Zahl  $a$  konvergiert und die Abbildung  $f$  stetig ist, dann muss  $a$  ein Fixpunkt von  $f$  sein, d.h.  $f(a) = a$ . Dies sieht man daran, dass bei Stetigkeit von  $f$  und Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch die Folge  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und den Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(a)$$

*besitzt. Andererseits konvergiert die Folge  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  wegen  $f(a_n) = a_{n+1}$  auch gegen  $a$  (eine um eine Periode verschobene Folge behält ihren Grenzwert) und es folgt  $f(a) = a$ .*

Die Fixpunkte sind also die Gleichgewichtspunkte, bei denen die Bewegung des Systems zum Erliegen kommt.

Allerdings folgt aus der Existenz eines Fixpunktes einer (stetigen) Funktion  $f$  noch nicht, dass die Folge  $a_{n+1} := f(a_n)$  tatsächlich konvergiert (wenn nicht schon der Startwert  $a_1$  ein Fixpunkt ist). Betrachte etwa  $f(x) = 1 - x$ . Für jeden Startwert  $a_1$  ist die Folge gegeben durch

$$(a_1, 1 - a_1, a_1, 1 - a_1, \dots)$$

Diese Folge konvergiert dann und nur dann, wenn  $1 - a_1 = a_1$ , also  $a_1 = \frac{1}{2}$ . Außerdem beachte man, dass eine Funktion auch mehrere Fixpunkte haben kann.

**Bemerkung 3.11.** Offenbar kann in Satz 3.9 das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  nicht einfach durch ein offenes Intervall  $(a, b)$  ersetzt werden. Die Abbildung  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  mit  $f(x) = x^2$  ist stetig, besitzt aber **keinen** Fixpunkt.  $x^2 = x$  ist nämlich äquivalent zu  $x = 0$  oder  $x = 1$  und die Randpunkte sollen nicht mehr zum Definitionsbereich der Abbildung gehören.

## 3.2 Berechnung der Quadratwurzel

Für eine reelle Zahl  $x > 0$  ist die Quadratwurzel  $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$  als die eindeutige positive Lösung der Gleichung

$$y^2 = x \tag{3.4}$$

definiert.  $\sqrt{x}$  ist also die Zahl, die mit sich selber multipliziert werden muss, um den Wert  $x$  zu ergeben. Nach dem Zwischenwertsatz angewandt auf die stetige Abbildung  $y \mapsto y^2$  existiert eine solche Zahl. Wegen  $z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$  kann es nicht zwei positive Lösungen  $z \neq y$  von Gleichung (3.4) geben (also Eindeutigkeit).

Wie kann man  $\sqrt{x}$  berechnen? Eine Möglichkeit soll hier beschrieben werden. Offenbar ist  $a$  genau dann die Quadratwurzel von  $x > 0$ , wenn  $a = \frac{x}{a}$ . Für  $a \neq \frac{x}{a}$  liegt  $\sqrt{x}$  stets zwischen  $a$  und  $\frac{x}{a}$ . Für  $a < \frac{x}{a}$  gilt  $a < \sqrt{x}$  und damit  $\frac{x}{a} > \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ . Für  $a > \frac{x}{a}$  gilt entsprechend  $a > \sqrt{x}$  und damit  $\frac{x}{a} < \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ . Es liegt also nahe, dass das arithmetische Mittel

$$a' := \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right)$$

eine bessere Näherung für  $\sqrt{x}$  ist. Durch häufiges Wiederholen dieser Prozedure kann man also hoffen, die Quadratwurzel von  $x$  näherungsweise berechnen zu können. Dass dies in der Tat so ist, besagt der folgende Satz.

**Satz 3.12.** Seien  $x > 0$  und  $a_1 > 0$  reelle Zahlen. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

rekursiv definiert. Dann gilt  $a_n \rightarrow \sqrt{x}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis. 1. Schritt:* Zunächst mache man sich klar, dass  $a_n > 0$  für alle  $n$ . Man teilt also niemals durch die Null. Das arithmetische Mittel zweier echt positiver Zahlen ist echt positiv. Damit folgt die Aussage aus einer Induktion nach  $n$ .

*2. Schritt:*  $a_{n+1}$  ist das arithmetische Mittel von  $a_n$  und  $\frac{x}{a_n}$ . Dieses ist nach Satz 2.24 größer als das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen. Letzteres ist aber

$$\sqrt{a_n \frac{x}{a_n}} = \sqrt{x}$$

Also gilt  $a_{n+1} \geq \sqrt{x}$  bzw.

$$a_{n+1}^2 \geq x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

(also spätestens ab dem zweiten Folgenglied ist die Folge oberhalb von  $\sqrt{x}$ ).

*3. Schritt:* Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right) = a_n + \frac{1}{2} \left( -a_n + \frac{x}{a_n} \right) = a_n + \frac{1}{2a_n} (-a_n^2 + x) \stackrel{(3.5)}{\leq} a_n, \quad \forall n \geq 2.$$

Die Folge ist also spätestens ab  $n = 2$  monoton fallend. Da sie nach unten durch 0 beschränkt ist, ist sie wegen Satz 2.16 konvergent. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$  muss nach Bemerkung 3.10 ein Fixpunkt der Rekursion sein, also

$$a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right)$$

Dies ist aber dazu äquivalent, dass  $a = \sqrt{x}$ . □

### 3.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Für ein beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definiert man

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} \quad (3.6)$$

Für  $a \neq 0$  und  $n \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$a^n := \begin{cases} a^n & \text{für } n \geq 1 \text{ wie in (3.6)} \\ 1 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{a^{|n|}} & \text{für } n \leq -1 \text{ Nenner wie in (3.6)} \end{cases}$$

Für  $a > 0$  und  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q = n/m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , wobei  $n$  und  $m$  teilerfremd, definiert man dann

$$a^q := \sqrt[m]{a^n} := (a^n)^{1/m} = \text{eindeutige positive Lösung } y \text{ der Gleichung } y^m = a^n.$$

$a^{n/m}$  ist also die Zahl, die man  $m$ -mal mit sich selber multiplizieren muss, um den Wert  $a^n$  zu erhalten.

Damit sind Potenzen für alle rationale Exponenten definiert. Nun müsste man nur noch die auf  $\mathbb{Q}$  definierte Abbildung  $q \mapsto a^q$  auf ganz  $\mathbb{R}$  „fortsetzen“. Da jede reelle Zahl  $r$  ein Grenzwert einer Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen ist und  $a^{q_n}$  bereits definiert ist, erscheint dies machbar zu sein. Wie das genau geht, ist in Abschnitt B.2 beschrieben. Aus Zeitgründen werden wir das aber in dieser Vorlesung nicht machen.

Es reicht also vollständig aus, sich  $a^x$  für rationale Exponenten  $x$  vorzustellen und anzunehmen, dass die „Lücken“ stetig geschlossen werden.

**Definition 3.13** (Exponentialfunktion). Sei  $a > 0$ . Die Exponentialfunktion  $\exp_a$  ist definiert durch

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp_a(x) = a^x.$$

Sei  $a > 0$  und  $a \neq 1$ . Die Funktion  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$  ist für  $a > 1$  streng monoton wachsend und für  $a < 1$  streng monoton fallend. Damit ist sie injektiv. Jeder Wert strikt zwischen 0 und  $\infty$  kann angenommen werden.  $\exp_a$  besitzt also eine Umkehrabbildung auf  $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

Es gelten die **Potenzgesetze**

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad \text{und} \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{>0}, x, y \in \mathbb{R}.$$

**Definition 3.14** (Logarithmusfunktion). Sei  $a > 0$  und  $a \neq 1$ . Die Funktion  $\log_a$  ist definiert als die Umkehrabbildung der Funktion  $\exp_a$ . Also:

$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x) = y$  mit  $y \in \mathbb{R}$  eindeutige Lösung der Gleichung  $\exp_a(y) = x$

$\log_a(x)$  wird **Logarithmus von  $x$  zur Basis  $a$**  genannt.

$\log_a(x)$  ist also die Zahl, mit der man  $a$  hochnehmen muss, um  $x$  zu erhalten.

**Satz 3.15.** Seien  $a, b, x, y > 0$  und  $a, b \neq 1$ . Es gilt

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{und} \quad \log_a(x^y) = y \log_a(x).$$

Die Potenzgesetze drehen sich also gerade um.

*Beweis.* Es gilt

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a(y)} = y. \tag{3.7}$$

Mit den Potenzgesetzen folgt

$$xy = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

Also ist  $\log_a(x) + \log_a(y)$  die Zahl, mit der man  $a$  hochnehmen muss, um  $xy$  zu erhalten, d.h.  $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$ .

Aus (3.7) und den Potenzgesetzen folgt

$$x^y = (a^{\log_a(x)})^y = a^{y \log_a(x)}$$

Also  $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ . □

### Basiswechsel:

Nehme an, wir haben die Zahl  $\log_a(x)$  berechnet und wollen daraus  $\log_b(x)$  bestimmen (Basiswechsel). Es gilt

$$\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \stackrel{\text{Satz 3.15}}{=} \log_a(x) \log_b(a).$$

Die Funktionen  $x \mapsto \log_a(x)$  und  $x \mapsto \log_b(x)$  unterscheiden sich also „nur“ um eine Konstante. Deshalb spricht man auch oft von *der* Logarithmusfunktion, obwohl man eigentlich zu jeder Basis eine andere Funktion erhält. Eine in der Praxis wichtige Basis ist 10. Es gibt die Bezeichnung  $\lg := \log_{10}$ . Es gilt z.B.  $\lg(1000) = 3$ .  $\lg$  gibt also etwa die Vorkommaziffern einer Zahl im Dezimalsystem an. Eine in der Theorie wichtige Basis ist die Eulersche Zahl  $e$ , die wir später kennenlernen werden.

Wenn beide Basen  $a$  und  $b$  strikt größer als 1 sind, dann ist der Umrechnungsfaktor  $\log_b(a)$  positiv. Die üblichen Basen (10 und  $e$ ) sind strikt größer als 1.

## 3.4 Die geheimnisvolle Sparkasse $e$

Das Kapital  $K > 0$  werde festverzinslich zum Jahreszinssatz  $p > 0$  bei einer Bank angelegt.  $p = 0.04$  würde bedeuten, dass die Zinszahlung nach einem Jahr 4% des eingesetzten Kapitals beträgt. Nach einem Jahr beträgt also das Guthaben

$$K(1+p)$$

Bei einer anderen Bank bekomme man stattdessen einen halbjährlichen Zinssatz von  $p/2$  Prozent auf das gesparte Kapital. Nach einem Jahr beträgt das Kapital dann

$$K \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

(Das Gutachten nach einem halben Jahr beträgt  $K(1+p/2)$  und wird im zweiten Halbjahr nochmal mit  $p/2$  verzinst). Offenbar ist das Angebot der zweiten Bank lukrativer, da der Zinsgewinn  $K \frac{p}{2}$  aus dem ersten Halbjahr im zweiten Halbjahr verzinst wird. Der Zinsgewinn aus der ersten Jahreshälfte trägt also zum Zinsgewinn in der zweiten Jahreshälfte bei. Dies nennt man **Zinseszins**effekt. Bei einer jährlichen Verzinsung wird dagegen nur



das Startkapital  $K$  verzinst. Allgemein: bei  $n$  unterjährlichen Verzinsungen, jeweils zum Zinssatz  $p/n$ , beträgt das Guthaben zum Jahresende

$$K \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \quad (3.8)$$

( $n = 12$  monatliche Verzinsung,  $n = 365$  täglich,  $n = 525600$  minütlich). Wegen des Zinseszinses ist das Guthaben (3.8) offenbar strikt monoton wachsend in  $n$ . Um dies allgemein zu beweisen, muss man etwas rechnen. Betrachtet man nur alle Zweierpotenzen  $n = 1, 2, 4, 8, \dots$  ist die Aussage recht offensichtlich. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt nämlich

$$\left(1 + \frac{p}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{p}{2n}\right)^2\right)^n = \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{4n^2}\right)^n > \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n.$$

Des weiteren wollen wir zeigen, dass die Folge (3.8) nach oben beschränkt ist (was erstmal nicht offensichtlich ist). Dazu führen wir zunächst die sog. **Binomialkoeffizienten** ein. Man definiert  $0! := 1$  und für  $l \in \mathbb{N}$

$$l! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l, \quad \text{Sprechweise: „}l \text{ Fakultät“}.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  definiert man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad \text{Binomialkoeffizienten.}$$

Sprechweise: „ $n$  über  $k$ “ oder „ $k$  aus  $n$ “ wie beim Lotto 6 aus 49. Insbesondere gilt  $\binom{n}{0} = 1$ .

*Interpretation:*  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  Elementen  $k$  Elemente auszuwählen, wobei es innerhalb der ausgewählten Elemente keine Hierarchie geben soll. Bei „6 aus 49“ kann man diese Anzahl so ermitteln: Bei der Auswahl der ersten Kugel gibt es 49 Möglichkeiten. Bei der zweiten Kugel gibt es noch 48 Möglichkeiten (da die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird). Insgesamt gibt es also  $49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44$  Möglichkeiten. Allerdings hat man bei dieser Zählweise den Fall, dass erst die 3 und dann die 7 gezogen wird und den Fall, dass erst die 7 und dann die 3 gezogen wird, getrennt erfasst. Wenn es aber auf die Reihenfolge der Ziehung nicht ankommen soll (es geht nur darum, *welche* Zahlen gezogen werden), fallen immer  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 = 6!$  Fälle zu einem Fall zusammen.  $6!$  ist nämlich die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, in denen man die Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 anordnen kann. Beim Lotto „6 aus 49“ gibt es also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = \binom{49}{6}$$

Möglichkeiten.

Nun wollen wir die Folge (3.8) nach oben abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
 &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\
 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1 - 1/n}{2!} + \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n)}{3!} + \dots + \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n) \cdot \dots \cdot (1 - (n-1)/n)}{n!} \\
 &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\
 &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^{2-1}} + \frac{1}{2^{3-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 3.
 \end{aligned}$$

Aus „wachsend“ und „nach oben beschränkt“ folgt die Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Der Limes wird mit  $e$  bezeichnet, d.h.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\dots \quad \text{„Eulersche Zahl“}$$

Die Zahl hat ihren Namen nach dem Schweizer Mathematiker **Leonhard Euler** (1707-1783). Die Eulersche Zahl ist keine rationale Zahl.

Der Logarithmus von  $x$  zur Basis  $e$  wird als **natürlicher Logarithmus**  $\ln(x)$  (logarithmus naturalis) bezeichnet.

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

**Satz 3.16.** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

*Plausibilitätserklärung.* 1. Fall:  $x = 0$  ist klar, da  $1^n = 1 = e^0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Fall:  $x > 0$ . Es gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right]^x.$$

Mit  $n$  geht auch  $n/x$  gegen unendlich. Also konvergiert  $\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}$  gegen  $e$ . Wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion konvergiert damit  $\left[\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right]^x$  gegen  $e^x$ .

3. Fall:  $x < 0$ . Der Fall  $x < 0$  kann mit der Approximation  $(1 + \frac{x}{n})^n \approx \frac{1}{(1 + \frac{-x}{n})^n}$  auf den Fall  $x > 0$  zurückgeführt werden. Da  $-x > 0$  folgt aus Fall 2, dass  $(1 + \frac{-x}{n})^n \rightarrow e^{-x}$  für  $n \rightarrow \infty$  und damit

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

□

Satz 3.16 besagt, dass  $e^x$  das Ergebnis zum Zeitpunkt 1 eines stetigen (kontinuierlichen) Wachstums mit "Rate"  $x$  ist. Rate  $x$  bedeutet, dass das proportionale Wachstum in einer Zeiteinheit der Länge  $\frac{1}{n}$  gerade  $\frac{x}{n}$  beträgt.

**Beispiel 3.17** (Stetige Verzinsung). *Rechnet man einen jährlichen Zinssatz von 4% linear in eine unterjährliche Verzinsung um, d.h. bei  $n$  Verzinsungen beträgt der Zinssatz bei jeder Verzinsung  $\frac{0.04}{n}$ , so beträgt das Guthaben am Jahresende*

$$\left(1 + \frac{0.04}{n}\right)^n \tag{3.9}$$

was mit Satz 3.16 im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$

$$e^{0.04} \approx 1.040811$$

ergibt. Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  spricht man auch von **stetiger Verzinsung**. Die effektive jährliche Verzinsung wäre also etwa 4.0811% statt 4% ohne Zinseszinsseffekt. Wegen der Monotonie der Folge  $\left(1 + \frac{0.04}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$  ist der Effekt in (3.9) sogar noch kleiner als im Grenzfall. Für  $n = 12$ , was einer monatlichen Verzinsung entspricht, gilt etwa

$$\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{12} \approx 1.0407.$$

Selbst bei einem Jahreszins von 10% wäre wegen  $e^{0.1} = 1.105171$  der Effekt noch gering. Bei einem Zinssatz von 2% wäre der Effekt, auch proportional zur Zinszahlung, noch viel geringer:  $e^{0.02} - 1 = 0.020201$ . Die Verzinsung von bereits erzielten Zinsgewinnen fällt also im Vergleich zur Verzinsung des Startkapitals kaum ins Gewicht.

**Die Umrechnung des Jahreszinses  $p$  in den gleich attraktiven Monatszins  $\frac{p}{12}$  scheint also eine recht gute Näherung zu sein.**

*Zinseszinsseffekte fallen nur bei langfristigen Investments ins Gewicht (dort aber um so drastischer!) oder bei unrealistisch hohen Zinssätzen: bei 100 % pro Jahr betrüge die effektive jährliche Verzinsung bei stetiger Verzinsung bereits 171,82818%.*

## 4 Differentialrechnung

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in (a, b)$  und  $h > 0$  mit  $x + h \in (a, b)$ . Ein Maß für das Wachstum der Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[x, x + h]$ , ist das Verhältnis aus dem Zuwachs des Funktionswertes und der Länge des Intervalls, also der Quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{„Steigung“}.$$

Was ist aber das Wachstum, oder besser die Wachstumsrate, der Funktion „in“ oder „bei“  $x$ ? Dazu lassen wir  $h$ , die Länge des Intervalls, gegen Null laufen.

**Definition 4.1** (Differenzierbarkeit).  $f$  heißt **differenzierbar** in  $x$ , wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

existiert – genauer: für **jede** Folge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $h_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  konvergiert die Folge  $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$  (der Grenzwert hängt dann offenbar nicht von der konkreten Folge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ab, wieso?).

$f$  heißt **differenzierbar**, wenn es in jedem  $x$  differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Abbildung

$$f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die **Ableitung** von  $f$ .

**Bemerkung 4.2.** Der Hinweis, dass in (4.1)  $h \neq 0$  wird oft weggelassen, weil er selbstverständlich erscheint. Der Quotient  $0/0$  ist nämlich nicht definiert.

Ableitungen spielen im alltäglichen Leben eine wichtige Rolle

- (1) **Momentangeschwindigkeit:** wenn  $x$  die Zeit ist und  $f(x)$  die bis zum Zeitpunkt  $x$  zurückgelegte Strecke.
- (2) **Grenzsteuersatz:** wenn  $x$  das zu versteuernde Einkommen ist und  $f(x)$  die zu zahlenden Steuern beim Einkommen  $x$ .
- (3) **Arbeitsproduktivität:** wenn  $x$  die geleisteten Arbeitsstunden sind und  $f(x)$  die in den ersten  $x$  Arbeitsstunden produzierte Stückzahl eines Gutes.

Für jedes  $x \in (a, b)$  und  $m \in \mathbb{R}$  kann man durch die Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + m \cdot h + \varphi(h) \quad (4.2)$$

eine Funktion  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definieren.  $\varphi$  ist der **Fehler** der entsteht, wenn wir die Funktion  $f$  durch die affin lineare Funktion  $h \mapsto f(x) + m \cdot h$  approximieren.

**Definition 4.3.**  $f$  heißt **linear approximierbar** im Punkt  $x$ , wenn es ein  $m \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für die Funktion  $\varphi$  aus (4.2) gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0. \quad (4.3)$$

Der Approximationsfehler ist also für  $h$  nahe bei Null kleiner als  $|h|$ .

**Satz 4.4.**  $f$  ist genau dann differenzierbar in  $x$ , wenn  $f$  in  $x$  linear approximierbar ist. Die lineare Approximation funktioniert (nur) mit  $m = f'(x)$ .

*Beweis.* Bedingung (4.3) bedeutet, dass der Ausdruck

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m$$

für  $h \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert. Dies ist dazu äquivalent, dass  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  gegen  $m$  konvergiert. Letzteres bedeutet, dass  $f$  in  $x$  differenzierbar ist mit Ableitung  $f'(x) = m$ .  $\square$

**Satz 4.5.** Für die Potenzfunktion  $f(x) := x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

*Beweis.* Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $h \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &= nx^{n-1} + h \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0} \\ &\rightarrow 0 \quad nx^{n-1} \quad \text{für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(mit der üblichen Konvention  $\binom{n}{0} := 1$ ).  $\square$

**Satz 4.6.**  $\exp := \exp_e$  ist differenzierbar mit Ableitung  $\exp' = \exp$ .

*Beweis.* 1. Schritt: Zunächst untersuchen wir die Differenzierbarkeit der Funktion im Nullpunkt, d.h. wir schauen uns den Ausdruck

$$\frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \frac{\exp(h) - 1}{h} \quad (4.4)$$

für  $h$  nahe bei Null an. Für alle  $h > 0$  gilt  $(1 + \frac{h}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (\frac{h}{n})^k \geq 1 + n \frac{h}{n} = 1 + h$  und damit

$$\exp(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \geq 1 + h$$

(wenn  $\exp$  in 0 differenzierbar ist, muss die Ableitung dort also mindestens 1 sein). Für die umgekehrte Abschätzung von (4.4), erstmal ja nur für  $h > 0$ , benutzen wir, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $h \in (0, 1)$  gilt

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{h}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^n h^k \stackrel{(2.5)}{=} \frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} < \frac{1}{1 - h}$$

und damit

$$\exp(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - h}.$$

Es folgt

$$\frac{(1+h) - 1}{h} \leq \frac{\exp(h) - 1}{h} \leq \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h}$$

bzw.

$$1 \leq \frac{\exp(h) - 1}{h} \leq \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \frac{1}{1-h}$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1 \quad (\text{rechter Limes}). \quad (4.5)$$

Mit der Beziehung

$$\exp(-h) = \frac{1}{\exp(h)} \quad (4.6)$$

kann man den linken Limes im Nullpunkt auf den rechten Limes im Nullpunkt zurückführen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} &\stackrel{(4.6)}{=} \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \exp(h) \frac{1 - \exp(-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \exp(h) \frac{\exp(-h) - 1}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \exp(-h) \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(0) \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &\stackrel{(4.5)}{=} 1. \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.5) folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

$\exp$  ist also im Nullpunkt differenzierbar mit  $\exp'(0) = 1$ .

2. Schritt: Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Aus  $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &\stackrel{\text{1. Schritt}}{=} \exp(x). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.7.** Aus  $a^{x+h} = a^x a^h$  und  $a^h = e^{h \ln(a)}$  folgt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= a^x \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h} \\ &= a^x \ln(a) \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h \ln(a)} \\ &= a^x \ln(a) \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &\stackrel{\text{Satz 4.6}}{=} a^x \ln(a). \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x) = a^x$  hat also die Ableitung  $f'(x) = \ln(a)a^x$ . Dies belegt nochmals die besondere Bedeutung der Basis  $e$  bei der Exponentialfunktion, da bei  $a = e$  der Vorfaktor gerade verschwindet.

**Bemerkung 4.8.** Die Exponentialfunktion hat also die Eigenschaft, dass die Zuwächse proportional zum aktuellen Wert der Funktion sind. Das Wachstum ist also um so stärker je größer der Ausgangswert. Viele reale Phänomene besitzen diese Eigenschaft. Etwa das Bevölkerungswachstum, die Ausbreitung einer Infektionskrankheit, Vermehrung des Guthabens bei festen Zinsen, ...

**Satz 4.9.** Die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind differenzierbar mit

$$\sin' = \cos \quad \text{und} \quad \cos' = -\sin.$$

*Beweis.* 1. Schritt: Zunächst zeigen wir, dass  $\sin$  und  $\cos$  im Nullpunkt differenzierbar sind mit Ableitungen 1 und 0. Geometrische Überlegungen am Einheitskreis (vgl. Abbildung 8) liefern die Ungleichungen  $|\sin(h)| \leq |h|$  und  $|\tan(h)| \geq |h|$ . Es folgt

$$\cos(h) \leq \frac{\tan(h)}{h} \cos(h) = \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} \leq 1.$$

Da  $\cos(h) \rightarrow 1$  für  $h \rightarrow 0$ , folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0} = 1,$$

d.h.  $\sin$  ist im Nullpunkt differenzierbar mit  $\sin'(0) = 1 = \cos(0)$ . Für den Cosinus liefern geometrische Überlegungen am Einheitskreis (vgl. Übungsaufgabe 6) die Abschätzungen

$$0 \leq (1 - \cos(h))^2 + \sin^2(h) \leq h^2, \quad \text{für alle } h \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Es folgt  $1 \geq \cos(h) \geq 1 - \frac{h^2}{2}$  und damit

$$0 \geq \frac{\cos(h) - 1}{h} \geq -\frac{h}{2}, \quad \text{für alle } h \in (0, \pi/2)$$

bzw.

$$0 \leq \frac{\cos(h) - 1}{h} \leq -\frac{h}{2}, \quad \text{für alle } h \in (-\pi/2, 0).$$

Dies ergibt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - \cos(0)}{h - 0} = 0,$$

d.h.  $\cos$  ist im Nullpunkt differenzierbar mit  $\cos'(0) = 0 = -\sin(0)$ .

*2. Schritt:* Die allgemeine Aussage folgt nun aus den Additionstheoremen (1.4) und (1.5). Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin(x)] &= \frac{1}{h} [\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)] \\ &= \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [\cos(x+h) - \cos(x)] &= \frac{1}{h} [\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)] \\ &= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 \\ &= -\sin(x). \end{aligned}$$

□



# A Anhang (kein Bestandteil der Vorlesung)

## A.1 Zahlen

Im Anhang befindet sich Stoff, der entweder Wiederholung aus der Elementarmathematik I ist oder als Hintergrundinformation nützlich sein könnte. **Er ist kein Bestandteil der Vorlesung.**

- **natürliche Zahlen:**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  (braucht man zum Zählen)
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- **ganze Zahlen:**  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- **rationale Zahlen:**  $\mathbb{Q} = \left\{ \text{Brüche } \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$
- **reelle Zahlen:**  $\mathbb{R} =$  Kontinuum zu den rationalen Zahlen (entsteht aus  $\mathbb{Q}$  nach Schließung der „Lücken“)
- **komplexe Zahlen:**  $\mathbb{C}$  kommt später ...

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

**Beispiel A.1.**  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl, d.h. es gibt **kein**  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

oder äquivalent keine  $p, q \in \mathbb{Z}$  mit

$$p^2 = 2q^2. \tag{1.7}$$

(1.7) kann nicht erfüllt sein, da die Häufigkeiten, mit der die 2 die Zahlen  $p^2$  und  $q^2$  teilt, beide gerade sind (2 teilt  $p^2$  doppelt so oft wie sie  $p$  teilt) und die Häufigkeit, mit der die 2 die Zahl  $2q^2$  teilt ungerade ist (2 teilt die Zahl  $2q^2$  einmal mehr als sie  $q^2$  teilt).

## A.2 Vollständige Induktion

Der Beweis durch **vollständige Induktion** ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Mathematik. Er kann auf Probleme folgender Art angewandt werden. Für jedes  $n$  soll  $A(n)$  eine mathematische Aussage sein.  $A(n)$  kann wahr oder falsch sein (abhängig von  $n$ ). Nun wollen wir beweisen, dass alle Aussagen  $A(1), A(2), A(3), \dots$  wahr sind.

Beispiel für die Aussage  $A(n)$ :

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{=\sum_{k=1}^n k^2} \stackrel{!}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1.8)$$

Die Aussage (1.8) ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr. Ein direkter Beweis dafür, etwa durch nachrechnen, erscheint aber schwierig (für ein einzelnes  $n$  ist dies natürlich, gegebenenfalls unter Zuhilfenahme eines Computers, möglich).

Die Aussage ist aber zum einen für  $n = 1$  offensichtlich, da  $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$ . Zum anderen ist der Zusammenhang zwischen der Aussage  $A(n)$  und der Aussage  $A(n+1)$  (für irgendeine natürliche Zahl  $n$ ) recht leicht zugänglich. Vergleicht man nämlich den Ausdruck auf der linken Seite von (1.8) für  $n+1$  und für  $n$ , so ist die Differenz offenbar  $(n+1)^2$  (der letzte Summand, der bei  $n+1$  noch hinzukommt). Bildet man die Differenz der Ausdrücke auf der rechten Seite von (1.8) für  $n+1$  und  $n$  so erhält man ebenso

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= (n+1) \frac{(n+2)(2n+3) - n(2n+1)}{6} \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n}{6} \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Dies bedeutet folgendes: **wenn** für ein bestimmtes  $n$  die Aussage  $A(n)$  richtig ist, **dann** ist für dieses  $n$  auch die Aussage  $A(n+1)$  richtig.

Damit kann man aber sukzessive argumentieren: von  $A(1)$  weiß man, dass es stimmt. Dann muss aber auch  $A(2)$  stimmen. Dann auch  $A(3)$  usw. Aussage (1.8) ist also für **alle** natürlichen Zahlen  $n$  richtig. Dieses Beweisprinzip nennt man vollständige Induktion. Wir schreiben es etwas formaler auf:

### Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Sei  $A(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Aussage (die abhängig von  $n$  richtig oder falsch sein kann). Um die Richtigkeit von  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(IA)  $A(1)$  ist richtig (Induktions-Anfang)

(IS) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt: **Falls**  $A(n)$  richtig ist, **dann** ist auch  $A(n+1)$  richtig (Induktions-Schritt)

## A.3 Bolzano-Weierstraß

**Satz A.2** (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

### Beispiel A.3. Die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

ist offenbar nicht konvergent (wegen  $|a_{n+1} - a_n| = 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchy-Folge). Allerdings besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Teilfolgen, z.B.  $(1, 1, 1, \dots)$ , die aus  $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5, \dots$  entsteht.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge. Es existieren also  $A, B \in \mathbb{R}$ , so dass die Folge im Intervall  $[A, B]$  liegt, d.h.

$$a_n \in [A, B], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*1. Schritt:* Wir wollen eine Folge von Teilintervallen  $[A_k, B_k]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , von  $[A, B]$  konstruieren, d.h.  $A \leq A_k \leq B_k \leq B$ , so dass für jedes  $k$  unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  in dem Teilintervall  $[A_k, B_k]$  liegen. Setze  $A_1 := A$  und  $B_1 := B$ .

Sind im Intervall  $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$  unendlich viele Folgenglieder, d.h.  $a_n \in [A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$  für unendlich viele  $n$ , dann setzt einfach  $A_2 := A_1$  und  $B_2 := \frac{A_1+B_1}{2}$ . Liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in  $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$ , dann müssen unendlich viele Folgenglieder in  $[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$  liegen (andernfalls gäbe es insgesamt nur endlich viele Folgenglieder!) In diesem Fall setze  $A_2 := \frac{A_1+B_1}{2}$  und  $B_2 := B_1$ . In beiden Fällen hat man ein halb so langes Intervall gefunden in dem unendlich viele Folgenglieder sind. Fahre so sukzessive fort, d.h.

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [A_k, \frac{A_k+B_k}{2}] & \text{wenn } a_n \in [A_k, \frac{A_k+B_k}{2}] \text{ für unendlich viele } n \\ [\frac{A_k+B_k}{2}, B_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Die so konstruierten Intervalle  $[A_k, B_k]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  haben die Eigenschaft, dass

$$[A_k, B_k] \subset [A_{k-1}, B_{k-1}] \subset \dots \subset [A_2, B_2] \subset [A_1, B_1],$$

$$B_k - A_k = \frac{1}{2}(B_{k-1} - A_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^{k-1}}(B - A) \text{ und}$$

$$a_n \in [A_k, B_k], \quad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

*2. Schritt:* Wir möchten eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit

$$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Wähle dazu  $n_1 := 1$ .  $n_2$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n > 1$ , so dass  $a_n \in [A_2, B_2]$ . Ist  $n_2$  damit konstruiert, wähle  $n_3$  als die kleinste natürliche Zahl  $n > n_2$ , so dass  $a_n \in [A_3, B_3]$  (da es nur endlich viele  $n$  mit  $n \leq n_2$ , aber unendlich viele  $n$  mit  $a_n \in [A_3, B_3]$  gibt, existiert eine solche Zahl  $n_3$ ). Fährt man sukzessive so fort, ist eine Teilfolge mit Eigenschaft (1.9) konstruiert.

*3. Schritt:* Wir müssen nur noch zeigen, dass die konstruierte Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist (wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (!) konvergiert sie dann tatsächlich).

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $2^{-(N-1)}(B - A) \leq \varepsilon$ . Nach Konstruktion von  $a_{n_k}$  und der Intervalle gilt

$$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subset [A_N, B_N], \quad \forall k \geq N. \quad (1.10)$$

Da  $B_N - A_N = 2^{-(N-1)}(B - A) \leq \varepsilon$  folgt aus (1.10)

$$|a_{n_{k_2}} - a_{n_{k_1}}| \leq B_N - A_N \leq \varepsilon, \quad \forall k_1, k_2 \geq N.$$

Dies bedeutet, dass  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  mit

$$a_{n_k} \rightarrow a, \quad k \rightarrow \infty.$$

□

## A.4 Supremumsprinzip

**Satz A.4.** [Supremumsprinzip] Jede nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  mit  $M \neq \emptyset$  besitzt eine **kleinste obere Schranke** in  $\mathbb{R}$ , das **Supremum** von  $M$ , das wir mit  $\sup M$  bezeichnen. Dies bedeutet, dass

- (1)  $x \leq \sup M$  für alle  $x \in M$  ( $\sup M$  ist obere Schranke)
- (2) Für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y \geq x$  für alle  $x \in M$  gilt auch  $y \geq \sup M$  (Minimalität von  $\sup M$ ).

Es gibt eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  mit  $x_n \rightarrow \sup M$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Analog besitzt jede nach unten beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  mit  $M \neq \emptyset$  eine **größte untere Schranke** in  $\mathbb{R}$ , das **Infimum** von  $M$ , das wir mit  $\inf M$  bezeichnen. Dies bedeutet, dass

- (1)  $x \geq \inf M$  für alle  $x \in M$  ( $\inf M$  ist untere Schranke)
- (2) Für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y \leq x$  für alle  $x \in M$  gilt auch  $y \leq \inf M$  (Maximalität von  $\inf M$ )

Es gibt eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  mit  $x_n \rightarrow \inf M$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Definition A.5.**  $y \in M$  heißt **Maximum** der Menge  $M$ , wenn  $y \geq x$  für alle  $x \in M$ . Wir bezeichnen das Maximum mit  $\max M$ .

$y \in M$  heißt **Minimum** der Menge  $M$ , wenn  $y \leq x$  für alle  $x \in M$ . Wir bezeichnen das Minimum mit  $\min M$ .

**Bemerkung A.6.** Nicht jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge besitzt ein Maximum (aber ein Supremum!) **Wenn** ein Maximum existiert, also ein  $y \in M$ , das obere Schranke von  $M$  ist, dann ist  $y$  zwangsläufig die **kleinste** obere Schranke von  $M$  (da  $y \in M$  ja selber von jeder oberen Schranke von  $M$  dominiert werden muss) und damit gleich dem Supremum von  $M$ . Man sagt in diesem Fall, dass das Supremum **angenommen** wird, d.h. die kleinste obere Schranke der Menge ist selber Element der Menge.

Der Zusammenhang zwischen Minimum und Infimum ist analog.

**Beispiel A.7.** Das Supremum der Menge  $M := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} = (-1, 1)$  ist offenbar  $\sup M = 1$  aber  $1 \notin M$ . Die Menge  $M$  besitzt also kein Maximum.

*Beweis von Satz A.4.* Es genügt, die Aussagen mit dem Supremum zu beweisen. Die Aussagen zum Infimum beweisen sich analog. Der Beweis des Satzes beruht auf einer ähnlichen Intervallschachtelung wie der Beweis des Satzes von Bolzano und Weierstraß.

Sei  $x \in M$  und  $b$  eine obere Schranke von  $M$  (also größer als jedes Element von  $M$ ). Mit  $A_1 := x$  und  $B_1 := b$  ist  $[A_1, B_1]$  unser Startintervall. Ein höchstens halb so langes Intervall  $[A_2, B_2]$  konstruieren wir nun wie folgt

$$A_2 := \begin{cases} A_1, & \text{wenn } \frac{A_1+B_1}{2} \geq x \text{ für alle } x \in M \\ > \frac{A_1+B_1}{2} \text{ und aus } M, & \text{wenn ein } x \in M \text{ existiert mit } x > \frac{A_1+B_1}{2} \end{cases}$$

und

$$B_2 := \begin{cases} \frac{A_1+B_1}{2}, & \text{wenn } \frac{A_1+B_1}{2} \geq x \text{ für alle } x \in M \\ B_1, & \text{wenn ein } x \in M \text{ existiert mit } x > \frac{A_1+B_1}{2} \end{cases}$$

Es gilt  $B_2 - A_2 \leq \frac{1}{2}(B_1 - A_1)$ .  $B_2$  ist wieder eine obere Schranke mit  $B_2 \leq B_1$  und  $A_2 \in M$ . Verfährt man so weiter, d.h.

$$A_{k+1} := \begin{cases} A_k, & \text{wenn } \frac{A_k+B_k}{2} \geq x \text{ für alle } x \in M \\ > \frac{A_k+B_k}{2} \text{ und aus } M, & \text{wenn ein } x \in M \text{ existiert mit } x > \frac{A_k+B_k}{2} \end{cases}$$

und

$$B_{k+1} := \begin{cases} \frac{A_k+B_k}{2}, & \text{wenn } \frac{A_k+B_k}{2} \geq x \text{ für alle } x \in M \\ B_k, & \text{wenn ein } x \in M \text{ existiert mit } x > \frac{A_k+B_k}{2} \end{cases}$$

erhält man eine wachsende Folge

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots \in M$$

und eine fallende Folge

$$B_1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \dots \text{ (obere Schranken von } M \text{)}$$

für die gilt  $B_n - A_n \leq (B_1 - A_1)2^{-(n-1)}$ . Satz 2.16 impliziert, dass beide Folgen Grenzwerte besitzen  $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  und  $B := \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ . Aus  $0 \leq B_n - A_n \leq (B_1 - A_1)2^{-(n-1)}$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = 0$  und mit Satz 2.9  $A = B$ .

Offenbar ist dieser Grenzwert  $A (=B)$  die kleinste obere Schranke der Menge  $M$ . Zum einen ist  $A$  eine obere Schranke. Nehme dazu an, es gäbe ein  $x \in M$  mit  $x > A$ . Dann würde ein  $\varepsilon > 0$  existieren, so dass  $x \geq A + \varepsilon$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $B_n \geq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $B_n \rightarrow A$ . Zum anderen ist  $A$  die *kleinste* obere Schranke. Da  $A_n \in M$  muss nämlich für jede obere Schranke  $y$  gelten, dass  $y \geq A_n$ . Da  $A_n \rightarrow A$  impliziert dies  $y \geq A$ .  $\square$

## A.5 Extrema

**Satz A.8** (Satz vom Maximum und Minimum). *Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  ist beschränkt (d. h. es existiert ein  $K \in \mathbb{R}$  mit  $|f(x)| \leq K$  für alle  $x \in [a, b]$ ) und es gibt Punkte  $x_{\max} \in [a, b]$  und  $x_{\min} \in [a, b]$  in denen  $f$  sein Maximum bzw. Minimum annimmt (d.h.  $f(x) \leq f(x_{\max})$  und  $f(x) \geq f(x_{\min})$  für alle  $x \in [a, b]$ ).*

*Beweis. Beschränktheit:* Wäre  $f$  unbeschränkt, dann gäbe es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $[a, b]$  mit  $|f(x_n)| \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Offenbar muss  $x_0$  auch in  $[a, b]$  liegen ( $x_0 \geq b + \varepsilon$  oder  $x_0 \leq a - \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$  könnte man sofort zu einem Widerspruch führen). Da  $f$  stetig ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

was  $|f(x_n)| \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  widerspricht.

**Existenz eines Maximums:** Die Menge  $M := \{y \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert ein } x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y\}$ , die auch als Bild der Abbildung  $f$  bezeichnet wird, ist nach dem ersten Teil des Beweises nach oben beschränkt. Mit Satz A.4 existiert das Supremum  $\sup_M \in \mathbb{R}$  der Menge  $M$  und lässt sich durch eine Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in [a, b]$  approximieren, d.h.

$$f(x_n) \rightarrow \sup M.$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , für ein  $x_0 \in [a, b]$ . Da  $f$  stetig ist, folgt

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad k \rightarrow \infty.$$

Damit ist  $f(x_0) = \sup M$ , d.h.  $f$  nimmt sein Maximum in  $x_0$  an.

Der Beweis der Existenz eines Minimums verläuft genauso.  $\square$

## B Anhang zu Potenzfunktionen (kein Bestandteil der Vorlesung)

### B.1 Potenzen $x^q$

Für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definiert man

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ mal}} \quad (2.1)$$

Für  $x \neq 0$  und  $n \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$x^n := \begin{cases} x^n & \text{für } n \geq 1 \text{ wie in (2.1)} \\ 1 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{x^{|n|}} & \text{für } n \leq -1 \text{ Nenner wie in (2.1)} \end{cases}$$

Offenbar gelten die **Potenzgesetze**

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^{n+m} = x^n x^m \quad \text{und} \quad x^{nm} = (x^n)^m \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

(wenn  $n < 0$  oder  $m < 0$ , dann wird  $x \neq 0$  vorausgesetzt)

**Ziel:** Erweiterung dieser Definition für alle  $r \in \mathbb{R}$  statt  $n \in \mathbb{Z}$ .

Was ist, wenn der Exponent keine ganze Zahl ist? Wie lässt sich z.B.  $7^{2/3}$  deuten? Nimmt man in der Gleichung

$$x = 7^{2/3}$$

beide Seiten hoch 3, so folgt bei weiterer Gültigkeit der Potenzgesetze (2.2)

$$x^3 = (7^{2/3})^3 = 7^{2/3 \cdot 3} = 7^2 = 49.$$

$x$  ist also die Zahl, die man dreimal mit sich selber multiplizieren muss, um 49 zu erhalten.  $x$  liegt offenbar zwischen 3 und 4, da

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 < 49 < 64 = 4 \cdot 4 \cdot 4.$$

Auf diese Art können wir  $x^q$  für alle  $x > 0$  und  $q \in \mathbb{Q}$  definieren. Hierfür definieren wir zunächst für  $x > 0$  und  $m \in \mathbb{N}$  die  $m$ -te **Wurzel** (analog zur Quadratwurzel) durch

$$x^{1/m} := \sqrt[m]{x} := \text{eindeutige positive Lösung } y \text{ der Gleichung } y^m = x. \quad (2.3)$$

$x^{1/m}$  ist also die Zahl, die man  $m$ -mal mit sich selber multiplizieren muss, um den Wert  $x$  zu erhalten. Nach dem Zwischenwertsatz angewandt auf die stetige Abbildung  $y \mapsto y^m$  existiert ein solches  $y$ . Eindeutigkeit folgt aus strikter Monotonie der Abbildung  $y \mapsto y^m$  (Aus  $z^m = y^m$  folgt  $z = y$ . Somit kann es nicht zwei Lösungen obiger Gleichung geben.)

Für  $x > 0$  und  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $q = n/m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , definieren wir dann

$$x^q := \sqrt[m]{x^n} := (x^n)^{1/m} = \text{eindeutige positive Lösung } y \text{ der Gleichung } y^m = x^n. \quad (2.4)$$

$x^{n/m}$  ist also die Zahl, die man  $m$ -mal mit sich selber multiplizieren muss, um den Wert  $x^n$  zu erhalten. Wir müssen noch zeigen, dass die Definition in (2.4) überhaupt Sinn macht, d.h.  $x^{n/m}$  „wohldefiniert“ ist. Damit (2.4) wohldefiniert ist, muss für zwei verschiedene Darstellungen von  $q \in \mathbb{Q}$ , sagen wir

$$q = n_1/m_1 = n_2/m_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

die rechte Seite von (2.4) den gleichen Wert liefern. Dies rechnet man aber schnell nach: nehme dazu die Lösung  $y$  der Gleichung

$$y^{m_1} = x^{n_1} \quad (2.6)$$

und die potentiell von  $y$  verschiedene Lösung  $z$  der Gleichung

$$z^{m_2} = x^{n_2}. \quad (2.7)$$

Aus  $n_1 m_2 = n_2 m_1$  und den Potenzgesetzen (2.2) für rationale Exponenten folgt

$$y^{m_1 m_2} = (y^{m_1})^{m_2} \stackrel{(2.6)}{=} (x^{n_1})^{m_2} = x^{n_1 m_2} = x^{n_2 m_1} = (x^{n_2})^{m_1} \stackrel{(2.7)}{=} (z^{m_2})^{m_1} = z^{m_1 m_2}. \quad (2.8)$$

(2.8) impliziert, dass  $z = y$ . Damit ist es egal, ob man  $x^q$  über (2.6) oder (2.7) definiert.

**Satz B.1.** *Es gelten für alle  $x, y > 0$  und  $a, b \in \mathbb{Q}$  die Potenzgesetze*

$$(xy)^a = x^a y^a \quad (2.9)$$

$$x^{a+b} = x^a x^b$$

$$x^{ab} = (x^a)^b.$$

*Beweis.* Seien  $a, b \in \mathbb{Q}$ , d.h.  $a = \frac{p}{q}$  und  $b = \frac{r}{s}$  mit  $p, r \in \mathbb{Z}$  und  $q, s \in \mathbb{N}$ . Die reelle Zahl  $x^a$  ist nach Definition (2.4) Lösung der Gleichung

$$(x^a)^q = x^p.$$

Analog ist die reelle Zahl  $y^a$  Lösung der Gleichung

$$(y^a)^q = y^p.$$

Multipliziert man die linken und die rechten Seiten beider Gleichungen miteinander so erhält man

$$(x^a)^q (y^a)^q = x^p y^p$$



Mit den Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten folgt hieraus

$$(x^a y^a)^q = (xy)^p$$

Die Zahl  $x^a y^a$  ist also Lösung der Gleichung, die  $(xy)^a$  erfüllen muss. Also gilt (2.9).

Des weiteren gilt

$$x^{a+b} = x^{\frac{ps+rq}{qs}} = \sqrt[qs]{x^{ps+rq}} \stackrel{(2.2)}{=} \sqrt[qs]{x^{ps} x^{rq}} \stackrel{(2.9)}{=} \sqrt[qs]{x^{ps}} \sqrt[qs]{x^{rq}} = x^{\frac{ps}{qs}} x^{\frac{rq}{qs}} = x^{\frac{p}{q}} x^{\frac{r}{s}} = x^a x^b.$$

$x^{ab} = x^{\frac{pr}{qs}}$  ist die Lösung  $y$  der Gleichung

$$y^{qs} = x^{pr}. \quad (2.10)$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$(x^a)^b = (x^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{x^p})^r}$$

auch Lösung von (2.10) ist. Dies gilt aber, da

$$\left[ \sqrt[s]{(\sqrt[q]{x^p})^r} \right]^{qs} \stackrel{(2.2)}{=} \left[ \left( \sqrt[s]{(\sqrt[q]{x^p})^r} \right)^s \right]^q = \left[ (\sqrt[q]{x^p})^r \right]^q \stackrel{(2.2)}{=} \left[ \sqrt[q]{x^p} \right]^{rq} \stackrel{(2.2)}{=} \left[ (\sqrt[q]{x^p})^q \right]^r = [x^p]^r = x^{pr}.$$

□

**Satz B.2.** Sei  $x > 0$  und  $a, b \in \mathbb{Q}$  mit  $a < b$ . Wenn  $x > 1$  dann gilt  $x^a < x^b$  und wenn  $x < 1$  dann gilt  $x^a > x^b$ .

*Beweis.* Seien  $a = \frac{p}{q}$  und  $b = \frac{r}{s}$  mit  $p, r \in \mathbb{Z}$  und  $q, s \in \mathbb{N}$ . Man stelle die rationalen Zahlen durch Brüche mit gleichem Nenner dar. D.h  $a = \frac{ps}{qs}$  und  $b = \frac{rq}{qs}$ . Die Zahl  $x^a$  ist Lösung der Gleichung

$$(x^a)^{qs} = x^{ps}$$

und die Zahl  $x^b$  ist Lösung der Gleichung

$$(x^b)^{qs} = x^{rq}.$$

Wegen  $a < b$  gilt  $ps < rq$ .

**Fall  $x > 1$ :** Es folgt  $x^{ps} < x^{rq}$ . Da die Abbildung  $y \mapsto y^{qs}$  auf  $y \in [0, \infty)$  monoton wachsend ist (Beweis z.B. über Induktion nach dem Exponenten) folgt  $x^a < x^b$ .

**Fall  $x < 1$ :** Es folgt  $x^{ps} > x^{rq}$ . Analog folgt  $x^a > x^b$ .

□

**Satz B.3.** Seien  $0 < x < y$  und  $a \in \mathbb{Q}$ . Wenn  $a > 0$  dann gilt  $x^a < y^a$  und wenn  $a < 0$  dann gilt  $x^a > y^a$ .

*Beweis.* Sei  $a = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ . Die Zahl  $x^a$  ist Lösung der Gleichung

$$(x^a)^q = x^p$$

und die Zahl  $y^a$  ist Lösung der Gleichung

$$(y^a)^q = y^p.$$

**Fall  $a > 0$ :** Dies bedeutet  $p > 0$  und damit  $x^p < y^p$ . Da die Abbildung  $z \mapsto z^q$  auf  $z \in [0, \infty)$  monoton wachsend ist, folgt  $x^a < y^a$ .

**Fall  $a < 0$ :** Dies bedeutet  $p < 0$  und damit  $x^p > y^p$ . Analog folgt  $x^a > y^a$ . □

## B.2 Potenzen $x^r$

Wir haben also Potenzen für rationale Exponenten definiert und ein paar interessante Eigenschaften von  $x^q$  kennengelernt. Nun muss man nur noch die auf  $\mathbb{Q}$  definierte Abbildung  $q \mapsto x^q$  auf ganz  $\mathbb{R}$  „fortsetzen“. Da jede reelle Zahl  $r$  ein Grenzwert einer Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen ist und  $x^{q_n}$  bereits definiert ist, erscheint dies machbar zu sein. Wie man das genau macht, ist in diesem Abschnitt beschrieben. Aus Zeitgründen werden wir das aber überspringen (**ist also für diese Veranstaltung nicht relevant**).

**Satz B.4.** Sei  $a > 0$  und  $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $\mathbb{Q}$  mit  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $a^{\frac{p_n}{q_n}} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Der Fall  $a = 1$  ist offensichtlich, da  $1^{\frac{p_n}{q_n}} = 1$ . Betrachte den Fall  $a > 1$ .

**(Widerspruchs-)Annahme:**  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow 0$ , aber  $a^{\frac{p_n}{q_n}}$  konvergiert *nicht* gegen 1. Wie üblich wählen wir  $p_n \in \mathbb{Z}$  und  $q_n \in \mathbb{N}$ .

Dann gibt es ein  $\varepsilon \in (0, 1)$  und eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit entweder

$$a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \geq 1 + \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

oder

$$a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \leq 1 - \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

In beiden Fällen gilt  $p_{n_k} \neq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , da  $a^0 = 1$ . Wegen  $a > 1$  gilt bei (2.11), dass  $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} > 0$  (d.h.  $p_{n_k} > 0$ ) und bei (2.12), dass  $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} < 0$  (d.h.  $p_{n_k} < 0$ ) (folgt z.B. aus Satz B.2). Bei (2.11) gilt folglich

$$\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}} \rightarrow \infty.$$

Dies führt zu folgendem Widerspruch

$$a = \left( a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \right)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \stackrel{\text{Satz B.3}}{\geq} (1 + \varepsilon)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Bei (2.12) gilt

$$\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}} \rightarrow -\infty.$$

Dies führt zu folgendem Widerspruch

$$a = \left( a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \right)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \stackrel{\text{Satz B.3}}{\geq} (1 - \varepsilon)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} = \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{\left| \frac{q_{n_k}}{p_{n_k}} \right|}} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Damit ist die Aussage für  $a \geq 1$  bewiesen.

Der Fall  $a < 1$  geht analog. Nur dass man hier bei (2.11)  $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} < 0$  hat und den Widerspruch

$$a = \left( a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \right)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\left| \frac{q_{n_k}}{p_{n_k}} \right|}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

erzeugt. Bei (2.12) gilt stattdessen  $\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} > 0$  und man erzeugt den Widerspruch

$$a = \left( a^{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}} \right)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \leq (1 - \varepsilon)^{\frac{q_{n_k}}{p_{n_k}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

□

Nun kommen wir zum letzten Schritt, der Definition von  $x^r$  für  $x > 0$  und ein beliebiges reellwertiges  $r$ . Zwar muss  $r$  nicht in  $\mathbb{Q}$  sein, es lässt sich aber durch eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathbb{Q}$  approximieren, d.h.  $a_n \rightarrow r$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Idee ist,  $x^r$  als den Limes von  $x^{a_n}$  zu definieren ( $x^{a_n}$  haben wir ja soeben definiert!). Damit das geht, müssen zwei Dinge erfüllt sein

- (1) Die Folge  $(x^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  muss konvergieren.
- (2) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathbb{Q}$  mit  $a_n \rightarrow r$ , ist der Grenzwert der Folge  $(x^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  gleich.

Ohne (2) würde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}$  von der Wahl der approximierenden Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abhängen und von denen gibt es natürlich beliebig viele. Um  $x^r$  definieren zu können, müsste man zu jedem  $r$  eine approximierende Folge auszeichnen (etwa die Folge in Beispiel 2.17), was konzeptionell unschön wäre und das Arbeiten mit der Funktion  $r \mapsto x^r$  erschweren würde.

Wenn dagegen (1) und (2) erfüllt sind, ist bereits klar, dass für den Spezialfall, dass  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r$  mit der alten Definition in (2.4) übereinstimmt. Die konstante Folge  $(r, r, r, \dots)$  approximiert nämlich  $r$ .

Wir können eine monoton wachsende Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von rationalen Zahlen wählen mit

$$a_n \rightarrow r, \quad n \rightarrow \infty$$

(die Folge konvergiert also von unten gegen  $r$ ). Für  $x > 0$  definiere

$$x^r := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n} \tag{2.15}$$

Eine solche Folge existiert und der Grenzwert existiert nach Satz 2.16, da die Folge  $(x^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  nach Satz B.2 für  $x \geq 1$  monoton wachsend und für  $x < 1$  monoton fallend ist.

Wir wollen noch Eigenschaft (2) zeigen, d.h. der Ausdruck  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}$  darf nicht von der konkreten Folge abhängen, mit der wir  $x$  approximieren. Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge mit  $b_n \rightarrow r$ . Wir setzen *keine* Monotonie dieser weiteren Folge voraus. Es gilt  $b_n - a_n \rightarrow 0$  und mit Satz B.4 folgt

$$x^{b_n} = x^{b_n - a_n} x^{a_n} \rightarrow 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}.$$

Wir definieren also für alle  $x > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$

$$x^r := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n}$$

und  $0^r := 0$  für  $r > 0$ .

**Definition B.5** (Exponentialfunktion). Sei  $a > 0$ . Die Exponentialfunktion  $\exp_a$  ist definiert durch

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp_a(x) = a^x.$$

**Satz B.6.**  $\exp_a$  ist stetig. Für  $a \geq 1$  ist  $\exp_a$  monoton wachsend und für  $a \leq 1$  monoton fallend.

*Beweis.* 1. *Monotonie:* Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 < x_2$ . Approximiere  $x_1$  und  $x_2$  durch zwei Folgen  $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(x_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$  von rationalen Zahlen. Da  $x_1 < x_2$  können die Folgen so gewählt werden, dass  $x_{1,n} < x_{2,n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit Satz B.2 folgt  $a^{x_{1,n}} \leq a^{x_{2,n}}$  für  $a \geq 1$  bzw.  $a^{x_{1,n}} \geq a^{x_{2,n}}$  für  $a \leq 1$ . Es folgt

$$a^{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_{1,n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_{2,n}} = a^{x_2}, \quad \text{für } a \geq 1$$

und

$$a^{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_{1,n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_{2,n}} = a^{x_2}, \quad \text{für } a \leq 1.$$

2. *Stetigkeit:* Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Nach Konstruktion gilt für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x$ , dass  $a^{x_n} \rightarrow a^x$ . Wegen der Monotonie (auf  $\mathbb{R}$ ) aus dem ersten Teil des Beweises folgt die Aussage auch für beliebige Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Damit ist  $\exp_a$  stetig.  $\square$

**Satz B.7.** Es gelten für alle  $x > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  die Potenzgesetze

$$x^{a+b} = x^a x^b \quad (2.16)$$

und

$$x^{ab} = (x^a)^b. \quad (2.17)$$

*Beweis.* Approximiere  $a$  und  $b$  in (2.16) durch rationale Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $a + b$  wird dann durch  $a_n + b_n$  approximiert. Aus der entsprechenden Gleichheit in Satz B.1 für rationale Zahlen folgt

$$x^{a+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n+b_n} \stackrel{\text{Satz B.1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n} x^{b_n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x^{b_n} \right) = x^a x^b.$$

(2.17) ist etwas diffiziler. Mit den Folgen wie oben und Satz B.1 gilt

$$(x^{a_n})^{b_m} = x^{a_n b_m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Nun lässt man zunächst  $a_n$  gegen  $a$  laufen (bei festem  $b_m$ ). Nach Definition gilt  $x^{a_n} \rightarrow x^a$  für  $n \rightarrow \infty$  und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion gilt

$$(x^{a_n})^{b_m} \rightarrow (x^a)^{b_m}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Es folgt

$$x^{ab} \stackrel{\text{exp}_x \text{ stetig}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{a_n})^{b_m} \stackrel{(2.18)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} (x^a)^{b_m} \stackrel{\text{exp}_{x^a} \text{ stetig}}{=} (x^a)^b.$$

□