Vorlesungsskript “Finanzmathematik in stetiger Zeit”

Christoph Kühn

Sommersemester 2007

letzte Aktualisierung: 13. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Modellierung von Finanzmärkten

Diese Vorlesung setzt die Vorlesung **„Stochastische Analysis mit Finanzmathematik"** fort. Einige Notationen und Zusammenhänge werden kurz wiederholt. Für eine ausführliche Behandlung siehe aber das Skript zu ebendieser Vorlesung.

Gegeben sei ein filtrierter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, der die "üblichen Voraussetzungen" ("usual conditions") erfüllt.
Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum wollen wir einen Finanzmarkt modellieren, der aus $d+1$ handelbaren Wertpapieren besteht. Die (zufälligen) Preisprozesse der Wertpapiere sind durch die *Semimartingale* $(S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t\in[0,T]}$ gegeben.

Betrachte eine Investorin, die zum Startzeitpunkt $t = 0$ $v_0 \in \mathbb{R}$ Geldeinheiten besitzt und diese in obige Wertpapiere investieren möchte. Dabei kann sie ihr Vermögen laufend zwischen den $d+1$ Anlagemöglichkeiten hin- und herschichten. Wir machen viele *implizite* Annahmen: Umschichtungen verursachen keine Transaktionskosten, die Preise werden durch die Käufe und Verkäufe der betrachteten Investorin nicht beeinflusst, Handelsgewinne müssen nicht versteuert werden*, ...

Mit dem *vorhersehbaren* stochastischen Prozess $\varphi = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d)_{t\in[0,T]}$ wird die *Handelsstrategie* der Investorin modelliert. φ_t^i steht für die Anzahl der Wertpapiere des Typs i, die die Investorin zum Zeitpunkt t im Portfolio hält. φ_t^i kann auch negative Werte annehmen, was bedeutet, dass die Investorin in diesem Wertpapier verschuldet ist.

Um den Vermögensverlauf der Investorin mathematisch beschreiben zu können, braucht man **stochastische Integrale**. In der Vorlesung „Stochastische Analysis" haben wir das stochastische Integral für alle linksstetigen, adaptierten Prozesse (mit existierendem rechten Limes) eingeführt. Mengenbezeichnung: $\mathbb{L}$. Linksstetige Integranden reichen für die meisten Anwendungen aus. Man denke zum Beispiel an die Modellierung zufälliger Phänome durch stochastische Differentialgleichungen oder an die Hedging-Strategie im Black-Scholes Modell mit einer Optionsauszahlung, die nur vom Endwert des Underlyings abhängt. Die Black-Scholes Formel für Plain-Vanilla Calls-/Puts kann mathematisch rigoros mit Integranden aus $\mathbb{L}$ hergeleitetet werden (siehe [10]).

Als sinnvolle Menge der **erlaubten** Handelsstrategien (Integranden) – etwa in der Portfoliooptimierung – erscheint $\mathbb{L}$ allerdings zu klein, was in Bemerkung 1.25 näher begründet werden soll. Auch der Martingaldarstellungssatz für Brownsche Martingale, den man zur Analyse exotischer Optionen braucht und den wir in Kapitel 2 behandeln werden (Theorem 2.2) benötigt eine größere Menge an erlaubten Integranden.

*Implizite Annahmen bedeutet, dass das mathematische Modell einen Markt beschreibt, in dem diese Annahmen erfüllt sind. Sie beziehen sich auf die Interpretation des Modells. Es sind keine Annahmen im mathematischen Sinne: Aus der Gültigkeit der Annahmen kann man nicht schließen, dass das Modell so aussieht wie es aussieht. Man kann also aus den Annahmen nichts formal herleiten. Eine Liste der Dinge, die durch ein Marktmodell *nicht* abgebildet werden, ließe sich beliebig fortsetzen. Sie ist also vorwiegend als Abgrenzung zu anderen Modellen zu verstehen, bei denen diese idealisierenden Annahmen nicht erfüllt sind. In der ökonomischen Literatur ist es jedoch verbreitet, diese Art von Annahmen wie mathematische Annahmen (also etwa wie $\varphi^1 \geq 0$) zu behandeln und unter ihnen Theoreme zu beweisen.

Die Idee bei der Konstruktion des stochastischen Integrals ist sehr ähnlich zum linksstetigen Fall, den wir ausführlich behandelt haben.

1.1 Das allgemeine stochastische Integral

Wir führen das stochastische Integral $H \bullet X$ zunächst für alle *reellwertigen, vorhersehbaren, lokal beschränkten* Integranden H und alle reellwertigen Semimartingale X ein.

Zur Erinnerung:

- Ein Prozess $H : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ heißt vorhersehbar, wenn er messbar bzgl. der vorhersehbaren σ-Algebra

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \quad &:= \quad \sigma(\{A \times (s,t] \mid s < t,\ A \in \mathcal{F}_s\}) \\ &\overset{\text{siehe [10]}}{=} \quad \sigma(\{]\!]T_1, T_2]\!] \mid T_1, T_2\ [0,T]\text{-wertige Stoppzeiten}\} \end{aligned}$$

  auf $\Omega \times (0,T]$ ist†.

- Ein Prozess $H : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R}$ heißt lokal beschränkt, wenn es eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $P(T_n \geq T) \to 1$ für $n \to \infty$ und $|H^{T_n}| \leq n$
  (Hier mit der Konvention $H^{T_n} = 0$ auf der Menge $\{T_n = 0\}$).

Bemerkung 1.1. *Für einen vorhersehbaren Prozess H gilt folgende Äquivalenz*

H ist lokal beschränkt $\Leftrightarrow$ Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ist der Pfad $(H_t(\omega))_{t\in[0,T]}$ beschränkt.

(ohne Beweis)‡. Dass jeder Prozess aus $\mathbb{L}$ lokal beschränkt ist, sieht man bei der Wahl der Lokalisierung $T_n := \inf\{t \in [0,T] \mid |H_t| \geq n\} \wedge T$, die $|H^{T_n}| \leq n$ gewährleistet.

Theorem 1.2. *Sei X ein reellwertiges Semimartingal und $\mathcal{S}$ die Menge der elementar vorhersehbaren Prozesse (vgl. Def. 2.1 in [10]). Die Abbildung $\mathcal{S} \to \mathbb{D}$, $H \mapsto H \bullet X$ mit*

$$H \bullet X = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}(X_{T_i\wedge\cdot} - X_{T_{i-1}\wedge\cdot}), \tag{1.1}$$

wobei

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}(\omega) 1_{]\!]T_{i-1},T_i]\!]}(\omega, t), \quad \forall(\omega, t) \in \Omega \times [0,T], \tag{1.2}$$

($0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n = T$ sind Stoppzeiten, Z_i, $i = 0, \ldots, n-1$, $\mathcal{F}_{T_i}$-messbare ZV) besitzt eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutige Fortsetzung

$$J_X : \{H : \Omega \times (0,T] \to \mathbb{R} \ \mid H \text{ vorhersehbar und lokal beschränkt}\} \to \mathbb{D}, \quad H \mapsto J_X(H)$$

mit folgenden Eigenschaften

†Prozesse, die als Integranden dienen, werden im folgenden nur auf der der Menge $\Omega \times (0,T]$ definiert (vgl. Bemerkung 1.4). $\mathcal{P}$ ist die Spur-σ-Algebra der vorhersehbaren σ-Algebra, die auf $\Omega \times [0,T]$ gebildet wurde, auf der Teilmenge $\Omega \times (0,T]$.

‡Ein Beweis finden sich in Kallsen [8], Lemma A.1

(i) $H \mapsto J_X(H)$ *ist linear*

(ii) (Stetigkeit) für alle reellwertigen vorhersehbaren, Prozesse H^n, $n \in \mathbb{N}$, *und* H *gilt die Implikation*

$H^n \to H$ *punktweise auf* $\Omega \times (0, T]$ *und* $|H^n| \leq K$ *für einen vorhersehbaren, lokal beschränkten Prozess* $K \implies J_X(H^n) \to J_X(H)$, *gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.*

Zudem ist der Prozess $J_X(H)$ *wiederum ein Semimartingal.*

Definition 1.3. *[Stochastisches Integral] Der Prozess* $J_X(H)$ *aus Theorem 1.2 heißt stochastisches Integral von* H *nach* X. *Wir bezeichnen auch die Fortsetzung mit* $H \bullet X$

Bemerkung 1.4. *Für die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist es notwendig, die Integranden nur auf der kleineren Menge* $\Omega \times (0, T]$ *zu betrachten. Ansonsten wäre für eine* $\mathcal{F}_0$*-messbare Zufallsvariable* Y *mit* $H \bullet X$ *z.B. auch* $H \diamond X := H_0 Y + H \bullet X$ *eine Fortsetzung des Elementarintegrals, die obige Bedingungen erfüllen würde. Dies liegt daran, dass elementare Integranden (so wie wir sie eingeführt haben), auf* $\Omega \times \{0\}$ *verschwinden.*

Bemerkung 1.5. *Obwohl die vorhersehbare* σ*-Algebra von den stochastischen Intervallen* $]\!]T_1, T_2]\!]$ *erzeugt wird, existiert* **nicht** *zu jedem vorhersehbaren und beschränkten Prozess* H *eine elementar vorhersehbare Folge* $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *mit* $H^n \to H$ *punktweise auf* $\Omega \times [0, T]$. *Damit ist die Eindeutigkeit der Fortsetzung nicht trivial ! (Bisher wissen wir nur, dass es nicht immer eine Approximation gleichmäßig in* t *geben kann, da Cauchy-Folgen bzgl. der Konvergenz ,,uniformly in probability" von Elementarintegranden einen Grenzwert in* $\mathbb{L}$ *besitzen.)*

Betrachte etwa den deterministischen Fall $\Omega = \{\omega\}$:

Proposition 1.6. *Zu* $H = 1_{\mathbb{Q}}$ *gibt es keine Folge* $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *von Elementarintegranden mit* $H^n \to H$ *punktweise auf* $(0, 1]$.

Beweis. Wenn es eine approximierende Folge $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gäbe, dann gäbe es auch eine approximierende Folge, die nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmt (wieso ?) Also reicht es zu zeigen, dass es keine Folge $(\Gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $(s, t]$ gibt mit $1_{\Gamma^n} \to 1_{\mathbb{Q}}$ punktweise auf $(0, 1]$.

Sei $(\Gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge solcher Vereinigungen mit $1_{\Gamma^n}(q) \to 1$, $n \to \infty$, für alle $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Wir wollen zeigen, dass dann die Menge

$$M := \{t \in (0, 1] \mid t \in \Gamma^n \text{ für unendlich viele } n\}$$

überabzählbar sein muss (was wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ die Aussage impliziert). Beginne dazu mit $1/2 \in \mathbb{Q}$. Es existiert ein n_1 mit $1/2 \in \Gamma^{n_1}$. Da die Intervalle links offen sind, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[1/2 - \varepsilon, 1/2] \subset \Gamma^{n_1}$. Aus dem Inneren von $[1/2 - \varepsilon, 1/2]$ werden zwei rationale Zahlen $q_1 < q_2$ ausgewählt. Suche dann zunächst nach einem Γ^{n_2}, $n_2 > n_1$, s.d. $[q_1 - \varepsilon', q_1] \subset \Gamma^{n_2}$ für ein $\varepsilon' \in (0, q_1 - (1/2 - \varepsilon))$ und danach nach einem Γ^{n_3}, $n_3 > n_2$, s.d. $[q_2 - \varepsilon'', q_2] \subset \Gamma^{n_3}$ für ein $\varepsilon'' \in (0, q_2 - q_1)$. So entsteht ein Binärbaum:

zu jedem Knoten gibt es zwei mögliche Nachfolger. Das Intervall $[1/2 - \varepsilon, 1/2]$ besitzt die disjunkten Teilintervalle $[q_1 - \varepsilon', q_1]$ und $[q_2 - \varepsilon'', q_2]$ als mögliche Nachfolger. Wenn die Länge der Intervalle mit wachsender Tiefe des Baums gegen Null geht, definiert jede Möglichkeit den Baum von oben nach unten zu durchlaufen eine reelle Zahl als Grenzwert. Alle Grenzwerte unterscheiden sich voneinander und liegen in M (für ersteres beachte, dass es einen Zwischenraum zwischen $[q_1 - \varepsilon', q_1]$ und $[q_2 - \varepsilon'', q_2]$ gibt und selbiges für alle Iterationen gilt). Mit Cantors zweitem Diagonalargument folgt die Überabzählbarkeit von M. Folglich muss es auch irrationale Zahlen geben, die in M liegen, was $1_{\Gamma^n} \to 1_{\mathbb{Q}}$ punktweise auf $(0, 1]$ unmöglich macht (man beachte, dass für die Argumentation das Auswahlaxiom benutzt wird). $\square$

Allerdings gibt es $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $1_{\Gamma^n}(q) \to 1$, $n \to \infty$, für alle $q \in (0, 1]$ und M ist eine (überabzählbare) Lebesgue-Nullmenge. Wenn man also z.B. das Lebesgue-Maß auf $(0, 1]$ betrachtet und zusätzlich jeder rationalen Zahl aus $(0, 1]$ die Punktmasse 1 gibt, was dem Maß $\mu = \lambda + \sum_{q\in\mathbb{Q}} \delta_q$ entspricht, kann man $1_{\mathbb{Q}\cap(0,1]}$ durch Funktionen der Form 1_{Γ^n} bis auf eine μ-Nullmenge punktweise approximieren (wähle dazu etwa $\Gamma^n := \bigcup_{k=1}^n (q_k - 2^{-n}, q_k]$, wobei $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine beliebige Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$ ist). Allerdings ist eine Bedingung, die von einem Maß auf $(0, T]$ abhängt, konzeptionell nicht so befriedigend, da es im stochastischen Modell auf der Zeitmenge $(0, T]$ kein exogen vorgegebenes Maß gibt (im Gegensatz zum Maß P für die Ergebnismenge Ω).

Zur Erinnerung:

Definition 1.7. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\widetilde{\Omega}}$ wird* **Dynkinsystem** *genannt, wenn*

(1) $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c := \widetilde{\Omega} \setminus A \in \mathcal{A}$

(3) für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Bemerkung 1.8. *Der Unterschied zu einer σ-Algebra besteht darin, dass (3) nur für eine disjunkte Folge gelten muss. Daher kann man mit $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ nicht mehr folgern, dass der Schnitt zweier Mengen aus dem Mengensystem wieder drin ist.*

Bemerkung 1.9. *In der Definition könnte man (2) durch*

(2') $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{A}$

ersetzen.

Theorem 1.10 (Dynkinscher π-λ-Satz[§]). *Sei $\mathcal{E}$ ein Mengensystem. $\delta(\mathcal{E})$ bezeichnet das kleinste Dynkinsystem und $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, das/die $\mathcal{E}$ umfasst, d.h.*

$$\delta(\mathcal{E}) := \{A \subset \widetilde{\Omega} \mid A \in \mathcal{A} \text{ für alle Dynkinsysteme } \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

[§]Ein durchschnittsstabiles Mengensystem wird manchmal auch π-System genannt und ein Dynkinsystem λ-System.

und

$$\sigma(\mathcal{E}) := \{A \subset \widetilde{\Omega} \mid A \in \mathcal{A} \text{ für alle } \sigma\text{-Algebren } \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}.$$

Wenn $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist, d.h. $A_1, A_2 \in \mathcal{E} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathcal{E}$, dann gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Bemerkung 1.11. *Das Theorem ist für Anwendungen sehr nützlich. Häufig kann man von einem Mengensystem zwar zeigen, dass es ein Dynkinsystem ist, nicht aber, dass es auch eine σ-Algebra ist. Dies liegt daran, dass man bei einem Dynkinsystem nur abzählbare Vereinigungen von* **disjunkten** *Mengen aus dem Mengensystem betrachten muss. Es müssen also keine Überlappungen berücksichtigt werden*[¶]

Beweis von Theorem 1.10. Es muss gezeigt werden, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist. Da $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, also insbesondere (3) mit disjunkten Mengen erfüllt, muss nur noch gezeigt werden, dass $\delta(\mathcal{E})$ durchschnittsstabil ist. Bei Durchschnittsstabilität kann nämlich eine abzählbare Vereinigung beliebiger Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \delta(\mathcal{E})$ auf eine abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \ldots \in \delta(\mathcal{E})$ zurückgeführt werden: Setze dazu $\widetilde{A}_1 := A_1$ und $\widetilde{A}_n := A_n \cap A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \in \delta(\mathcal{E})$ für $n \geq 2$. Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n$ und die $\widetilde{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind disjunkt.

Um Durchschnittsstabilität von $\delta(\mathcal{E})$ zu zeigen, definiere man für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ die Menge

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in 2^{\widetilde{\Omega}} \mid Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

(i) Man rechnet leicht nach, dass auch $\mathcal{D}_D$ für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ ein Dynkinsystem ist.

(ii) Wegen der Durchschnittsstabilität von $\mathcal{E}$ gilt für jedes $E \in \mathcal{E}$, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$.

(iii) Aus (i) und der Minimalität des erzeugten Dynkinsystems folgt, dass $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

(iv) Mit (iii) gilt für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ und jedes $E \in \mathcal{E}$, dass $E \cap D \in \delta(\mathcal{E})$. Dies bedeutet aber, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$ für alle $D \in \delta(\mathcal{E})$. Wegen (i) zieht dies $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$ für alle $D \in \delta(\mathcal{E})$ nach sich. D.h. für alle $D, D' \in \delta(\mathcal{E})$ gilt $D \cap D' \in \delta(\mathcal{E})$.

□

[¶]Eine Folge aus dem Dynkinschen π-λ-Satz ist: Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ist durch die Wahrscheinlichkeiten auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger bereits eindeutig bestimmt (also bei einer reellwertigen Zufallsvariablen Y ist das Bildmaß P_Y durch $P(Y \in (a,b))$ für alle $a < b$ eindeutig bestimmt).
Beweis: Sei $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ und $P_1(E) = P_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, wobei P_1, P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{F}$ sind. Aus der σ-Additivität von P_1 und P_2 folgt nun, dass das Mengensystem $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F} \mid P_1(A) = P_2(A)\}$ ein Dynkinsystem, das natürlich $\mathcal{E}$ umfasst. Daraus folgt $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. Mit Theorem 1.10 folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ und damit $P_1 = P_2$.
Andererseits muss die Aussage nicht gelten, wenn der Erzeuger nicht durchschnittsstabil ist. Betrachte dazu $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und als Erzeuger von 2^Ω das Mengensystem $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$.

Wir werden Satz 1.2 nur für den Fall beweisen, dass X ein quadratintegrierbares Martingal ist. Jedes Semimartingal kann als Summe aus einem lokal quadratintegrierbaren Martingal und einem Prozess von endlicher Variation dargestellt werden. Das Integral nach dem Martingalanteil des Semimartingales ist natürlich der interessantere Teil, weil das Integral nach dem Anteil von endlicher Variation pfadweise als gewöhnliches Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert werden kann. Der vollständige Beweis von Theorem 1.2 findet sich z.B. in Jacod/Shiryaev [7], Seiten 46 ff.

Beweis von Theorem 1.2 für X quadratintegrierbares Martingal. Der Beweis besteht aus 6 Schritten.

Schritt 1: **Eindeutigkeit**. Der Beweis läuft völlig analog zu dem Beweis der Aussage, dass zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger der σ-Algebra übereinstimmen, gleich sein müssen[‖].

Seien $H \mapsto H \bullet X$ und $H \mapsto H \diamond X$ zwei Fortsetzungen des Elementarintegrals, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen. Wir wollen zeigen, dass die Menge

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P} \mid 1_A \bullet X = 1_A \diamond X \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit}\}$$

ein Dynkinsystem ist. Bedingung (1) in Definition 1.7 ist offenbar erfüllt, da $1_{\Omega\times(0,T]}$ ein elementar vorhersehbarer Prozess ist. Bedingung (2) folgt sofort aus $1_{A^c} = 1_{\Omega\times(0,T]} - 1_A$ und der geforderten Linearität der beiden Fortsetzungen.

Ad (3): Für disjunkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ gilt

$$1_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} \bullet X = \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) \bullet X \overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^{n}(1_{A_k} \bullet X)$$

und aus (ii) folgt

$$1_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} \bullet X \to 1_{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m} \bullet X, \quad n \to \infty, \quad \text{gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.}$$

Dies gilt auch für $\diamond$ statt $\bullet$. Folglich ist auch Bedingung (3) erfüllt (hierfür brauchen wir, dass Limiten bzgl. der up-Konvergenz bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig sind) und $\mathcal{G}$ ist ein Dynkinsystem.

Andererseits gilt für die Menge der stochastischen Intervalle

$$\mathcal{E} := \{\rrbracket T_1, T_2\rrbracket \mid T_1 \le T_2 \text{ Stoppzeiten mit } T_1 \le T_2\},$$

dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ und damit $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}$. Zudem ist $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil, da

$$\rrbracket T_1, T_2\rrbracket \cap \rrbracket \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2\rrbracket = \rrbracket T_1 \vee \widetilde{T}_1, (T_2 \wedge \widetilde{T}_2) \vee T_1 \vee \widetilde{T}_1\rrbracket$$

[‖] Die geforderte Linearität der Fortsetzung braucht man für die Eindeutigkeit (sie entspricht der Additivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen). Eine ,,stetige" Fortsetzung des Elementarintegrals im Sinne von Bedingung (ii) im Theorem muss also nicht automatisch linear im Integranden sein – obwohl das Elementarintegral selber natürlich linear ist. Dies liegt daran, dass nicht jeder vorhersehbare Prozess punktweise durch elementar vorhersehbare Prozesse approximiert werden kann. Im Gegensatz dazu können adaptierte, linksstetige Integranden (wie wir in [10] gesehen haben) stets punktweise auf $\Omega \times [0, T]$ durch Elementarstrategien approximiert werden.

und Erzeuger der vorhersehbaren σ-Algebra auf dem Grundraum $\Omega \times (0, T]$. Mit Theorem 1.10 folgt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Zusammengefasst:

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P},$$

also $\mathcal{G} = \mathcal{P}$.

Sei H ein vorhersehbarer, lokal beschränkter Prozess. H wird punktweise durch die Prozesse

$$H^{(n)} := \sum_{k=-n^2}^{n^2} \frac{k}{n} 1_{\left\{\frac{k-1}{n} < H \leq \frac{k}{n}\right\}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

approximiert. Aus $\mathcal{G} = \mathcal{P}$ und der Linearität (i) der Fortsetzungen folgt

$$H^{(n)} \bullet X = H^{(n)} \diamond X \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit.}$$

Zudem gilt $|H^{(n)}| \leq |H| + 1$, d.h. die Folge $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch einen gemeinsamen vorhersehbaren, lokal beschränkter Prozess dem Betrage nach beschränkt. $H^{(n)} \to H$ punktweise und die Stetigkeitsvoraussetzung (ii) liefert

$$H \bullet X = H \diamond X \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit.}$$

und damit Eindeutigkeit.

Schritt 2: Für den Existenzbeweis machen wir von der Einschränkung Gebrauch, dass $X = M$ ein quadratintegrierbares Martingal ist. Es gilt

$$E([M, M]_T) = E(M_T - M_0)^2 - 2E(M_- \bullet M_T) = E(M_T - M_0)^2 = \mathrm{Var}(M_T) < \infty, \tag{1.4}$$

siehe auch [10] für eine ausführliche Herleitung. Sei H elementar vorhersehbar und beschränkt. Es gilt die sog. **Itô-Isometrie**:

$$E\left[(H \bullet M_T)^2\right] = E\left[[H \bullet M, H \bullet M]_T\right] = E\left[H^2 \bullet [M, M]_T\right], \tag{1.5}$$

wobei die erste Gleichheit aus (1.4), angewandt auf das quadratintegriebare Martingal $H \bullet M$, folgt und die zweite Gleichheit in [10] gezeigt wurde.

$$\mu_M(A) := E(1_A \bullet [M, M]_T), \quad A \in \mathcal{P},$$

definiert ein Maß auf der vorhersehbaren σ-Algebra, das sog. **Doléan's Maß**. Mit dem Satz von Fubini für Übergangskerne gilt für alle vorhersehbaren Prozesse H:

$$E(H^2 \bullet [M, M]_T) = \int H^2 \, d\mu_M.$$

Im Spezialfall, dass M eine Brownsche Bewegung ist, gilt $\mu_M = P \otimes \lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $(0,T]$ bezeichnet. I.A. ist μ_M jedoch kein Produktmaß, da die quadratische Variation zufällig sein kann.

Schritt 3: Man zeige: zu jedem vorhersehbaren, beschränkten Prozess H existiert eine Folge von gleichmäßig beschränkten Elementarintegranden $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$E\left[(H^{(n)} - H)^2 \bullet [M,M]_T\right] \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.6}$$

Man beachte, dass wegen der endlichen Variation von $[M,M]$ das Integral $(H^{(n)} - H)^2 \bullet [M,M]_T$ pfadweise als Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert werden kann. Sei

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P} \mid H = 1_A \text{ erfüllt (1.6)}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(1): $1_{\Omega\times(0,T]}$ lässt sich durch sich selber approximieren, also $\Omega \times (0,T] \in \mathcal{A}$.

(2): wenn 1_A durch elementare $H^{(n)}$ approximiert wird, dann wird 1_{A^c} durch die elementaren $1_{\Omega\times(0,T]} - H^{(n)}$ approximiert (beachte, dass $1_{\Omega\times(0,T]} - H^{(n)} - 1_{A^c} = -(H^{(n)} - 1_A)$).

(3): Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ und $(H^{(n,k)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1,2,\ldots$ approximierende Folgen von Elementarintegranden. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\max\{H^{(n,1)},\ldots,H^{(n,m)}\} - \max\{1_{A_1},\ldots,1_{A_m}\}\right)^2 \bullet [M,M]_T\right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} E\left[(H^{(n,k)} - 1_{A_k})^2 \bullet [M,M]_T\right] \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Da $\max\{H^{(n,1)},\ldots,H^{(n,m)}\}$ wiederum ein Elementarintegrand ist und

$$1_{A_1\cup\ldots\cup A_m} = \max\{1_{A_1},\ldots,1_{A_m}\},$$

folgt $\bigcup_{k=1,\ldots,m} A_k \in \mathcal{A}$. Da der Prozess $1_{A_1\cup\ldots\cup A_m}$ für $m \to \infty$ punktweise gegen 1_A mit $A := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} A_l$ konvergiert, konvergiert er wegen Beschränktheit auch im quadratischen Mittel bzgl. des Doléan's Maßes μ_M, also in $L^2(\mu_M)$, gegen 1_A, d.h.

$$E\left[(1_{A_1\cup\ldots\cup A_m} - 1_A)^2 \bullet [M,M]_T\right] \to 0, \quad m \to \infty.$$

Damit ist auch 1_A im Sinne von (1.6) approximierbar (man benutze die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Da die Erzeugermengen $]\!]T_1,T_2]\!]$ in $\mathcal{A}$ sind, folgt $\mathcal{A} = \mathcal{P}$**.

Sei nun H ein beliebiger vorhersebarer Prozess mit $|H| \leq K \in \mathbb{R}_+$. Ähnlich wie in (1.3) betrachte man die Approximation

$$\widetilde{H}^{(n)} := \sum_{k=-nK}^{nK} \frac{k}{n} 1_{\left\{\frac{k-1}{n} < H \leq \frac{k}{n}\right\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Man beachte, dass die A_k in (3) nicht disjunkt sein müssen. Es kann also direkt gezeigt werden, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und nicht nur ein Dynkin-System.

Wegen $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ und der Abschätzung

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=1}^m a_l - \sum_{l=1}^m b_l\right)^2 &= \sum_{l,k=1}^m (a_l - b_l)(a_k - b_k) \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^m \left((a_l - b_l)^2 + (a_k - b_k)^2\right) \\ &\leq m\sum_{l=1}^m (a_l - b_l)^2\end{aligned}$$

gilt (1.6) für $\widetilde{H}^{(n)}$ und somit auch für H.

Schritt 4: Sei H ein beschränkter und vorhersehbarer Prozess. Mit Schritt 3 existiert eine Folge von gleichmäßig beschränkten Elementarintegranden $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass (1.6) gilt. Wegen (1.5) ist die Folge von Zufallsvariablen $(H^{(n)} \bullet M_T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zudem sind die Elementarintegrale $H^{(n)} \bullet M$ wieder quadratintegrierbare Martingale und mit der Doobschen Ungleichung für quadratintegrierbare Martingale folgt

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(H^{(m)} \bullet M_t - H^{(n)} \bullet M_t\right)^2\right) \leq 4E\left(H^{(m)} \bullet M_T - H^{(n)} \bullet M_T\right)^2.$$

Da der Raum $\mathbb{D}$ bzgl. der metrisierbaren Konvergenz “uniformly in probability” vollständig ist (siehe Skript [10]), lässt sich das Integral $H \bullet M$ als Grenzwert der Cauchy-Folge $H^{(n)} \bullet M$ definieren. Da $H^{(n)} \bullet M$ quadratintegrierbare Martingale sind (siehe Skript [10]) und $H^{(n)} \bullet M_t$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konvergieren (und damit erst recht in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$) ist auch der Grenzprozess $H \bullet M$ ein quadratintegrierbares Martingal.

Es bleibt zu zeigen, dass $H \bullet M$ wohldefiniert ist, d.h. die Definition hängt nicht von der Wahl der approximierenden Folge ab. Sei dazu $(\widetilde{H}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, die (1.6) erfüllt. Aus der Dreiecksungleichung für die Norm

$$\rho(K, \widetilde{K}) := \sqrt{E\left[(\widetilde{K} - K)^2 \bullet [M, M]_T\right]} \tag{1.7}$$

folgt, dass die zusammengesetzte Folge

$$K^{(n)} = \begin{cases} H^{(n/2)} & : \text{für } n \text{ gerade} \\ \widetilde{H}^{(n/2+1/2)} & : \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

auch eine Cauchy-Folge bzgl. ρ ist. Mit (1.5) folgt, dass $K^{(n)} \bullet M_T$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine Cauchy-Folge ist. Da auch $K^{(n)} \bullet M$ quadratintegrierbare Martingale sind, folgt wieder mit der Doobschen Ungleichung, dass die Prozesse $K^{(n)} \bullet M$ eine Cauchy-Folge bzgl. der metrisierbaren Konvergenz “uniformly in probability” bilden. Dies wiederum ergibt, dass die Grenzwerte von $H^{(n)} \bullet M$ und $\widetilde{H}^{(n)} \bullet M$ bis auf Ununterscheidbarkeit übereinstimmen[††].

Schritt 5: Auf die in Schritt 4 definierte Abbildung

$$\{\text{ reellwertige, vorhersehbare, beschränkte Prozesse}\} \to \mathbb{D}, \quad H \mapsto H \bullet M$$

überträgt sich die Linearität des Elementarintegrals (im Integranden). Betrachte dazu zwei Integranden, die im Sinne von (1.7) durch eine Folge von Elementarintegranden approximiert werden und bilde die Summenfolge.

Zur Stetigkeit: Sei $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von vorhersehbaren Prozessen mit $|H^n| \leq K$ für ein von n unabhängigem $K \in \mathbb{R}_+$ und $H^n \to H$ punktweise. Da die Itô-Isometrie, die in (1.5) für Elementarintegranden gezeigt wurde, sich auf beliebige Integranden überträgt, gilt

$$E\left[(H^n \bullet M_T - H \bullet M_T)^2\right] = E\left[((H^n - H) \bullet M_T)^2\right] = E\left[(H^n - H)^2 \bullet [M, M]_T\right].$$

Aus majorisierter Konvergenz folgt die geforderte Stetigkeit (ii) mit der Einschränkung, dass die Majorante K ein beschränkter (und nicht nur lokal beschränkter Prozess) sein muss. Damit ist die Existenz für alle beschränkten Integranden mit der abgeschwächten Stetigkeit gezeigt.

Schritt 6: Sei H ein vorhersehbarer *lokal* beschränkter Prozess, s.d. $|H^{T_n}| \leq n$ für eine lokalisierende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten. Da $H1_{[\![0,T_n]\!]}$ vorhersehbar und beschränkt ist, ist das Integral von $H1_{[\![0,T_n]\!]}$ nach M mit Schritt 4 definiert. Definiere nun

$$H \bullet M := (H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet M \quad \text{auf } [\![0, T_n]\!]. \tag{1.8}$$

Jedes (ω, t) ist in einer Menge $[\![0, T_n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$, enthalten. Damit die linke Seite von (1.8) wohldefiniert ist (also nicht von n und auch nicht von der Wahl der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt), muss gezeigt werden, dass für alle Stoppzeiten τ_1, τ_2 gilt

$$(H1_{[\![0,\tau_1]\!]}) \bullet M = (H1_{[\![0,\tau_2]\!]}) \bullet M \quad \text{auf } [\![0, \tau_1 \wedge \tau_2]\!]. \tag{1.9}$$

Wenn (1.9) gilt, ist es nicht möglich, mit verschiedenen Lokalisierungsfolgen durch (1.8) verschiedene Integrale „H nach M" zu definieren. (1.9) folgt aus

$$((H1_{[\![0,\tau_i]\!]}) \bullet M)^{\tau_1\wedge\tau_2} = (H1_{[\![0,\tau_1\wedge\tau_2]\!]}) \bullet M, \quad i \in \{0, 1\}. \tag{1.10}$$

Hier geht Eigenschaft (a) in Theorem 1.21 des stochastischen Integrals ein, die für das Integral mit beschränkten vorhersehbaren Integranden eigentlich an dieser Stelle noch gezeigt werden müsste (für linksstetige Integranden haben wir dies bereits getan).

[††]Die Argumentation in Schritt 4 ist völlig analog zu Skript [10], wenn für die Integranden die up-Konvergenz durch die von ρ aus (1.7) induzierte (schwächere) Konvergenz ersetzt wird. Mit Schritt 3 gilt, dass jeder beschränkte, vorhersehbare Prozess bzgl. ρ approximierbar ist. Im Unterschied zum entsprechenden Theorem in Skript [10] kommt ρ in der Formulierung von Theorem 1.2 jedoch nicht vor. Stetigkeit bzgl. punktweiser Konvergenz der Integranden ist hier ansprechender, da ρ erst durch die Lösung des Problems motiviert wird. Da die Stetigkeit (ii) in Theorem 1.2 dann jedoch schwächer ist, musste in Schritt 1 die Eindeutigkeit der Fortsetzung bewiesen werden, wozu die zusätzlich zu fordernde Linearität der Fortsetzung gebraucht wurde.

Die Stetigkeitsbedingung (ii) für das in (1.8) definierte Integral kann man auf die abgeschwächte Stetigkeit für beschränkte Integranden (Schritt 5) zurückführen (Übung). □

Bemerkung 1.12. *Der entscheidende Unterschied zu dem "uniformly in probability" approach in [10] ist, dass H nicht mehr gleichmäßig in der Zeit approximiert werden muss (die Konvergenz in (1.6) ist wesentlich schwächer). In Bemerkung 1.25 werden wir sehen, dass die damit ermöglichte Erweiterung der Strategiemenge in der Portfoliooptimierung von Interesse ist. Auch werden Investitionen zu einzelnen Zeitpunkten möglich. Etwa* $H = 1_{\Omega\times\{t_0\}}$*, was bedeutet, dass die Investorin (nur) in den Sprung* $M_{t_0} - M_{t_0-}$ *investiert*‡‡*. Zum Zeitpunkt* t_0- *kauft sie eine Aktie und verkauft sie wieder zum Zeitpunkt* t_0*.*

Wir geben der Vollständigkeit halber noch die Definition des allgemeinsten stochastischen Integrals an. **Nehme dazu an, dass das Integral für alle vorhersehbaren lokal beschränkten Integranden H bereits definiert ist.** Im d-dimensionalen Fall bedeutet dies, dass $H = (H^1, \dots , H^d)$ mit lokal beschränkten reellwertigen Prozessen H^i und $H \bullet X := \sum_{i=1}^d H^i \bullet X$.

Definition 1.13. *[Allgemeinstes stochastisches Integral] Sei* X *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiges Semimartingal. Mit* $L(X)$ *wollen wir die Menge aller Integranden* H *bezeichnen, für die wir* $H \bullet X$ *definieren können.*

$$L(X) := \Big\{H \mid H \text{ ist ein } \mathbb{R}^d\text{-wertiger vorhersehbarer Prozess mit der Eigenschaft, dass ein } \mathbb{R}\text{-wertiges Semimartingal } Z \text{ existiert mit } Z_0 = 0 \text{ und } \underbrace{(H1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}})}_{\text{beschränkter Prozess}} \bullet X = \underbrace{1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}}}_{\text{beschränkter Prozess}} \bullet Z \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.\Big\} \tag{1.11}$$

Für $H \in L(X)$ *definiere* $H \bullet X := Z$*.*

Bemerkung 1.14. *Offenbar ist im Falle* $H \in L(X)$ *das Integral* $H \bullet X$ *wohldefiniert, d.h. für jedes* H *kann es bis auf Ununterscheidbarkeit höchstens ein Semimartingal* Z *geben, das obige Bedingung erfüllt. Nehme dazu an, es gäbe zwei Semimartingale* Z *und* $\widetilde{Z}$*, die (1.11) erfüllen. Es folgt*

$$1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet Z = 1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet \widetilde{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(bis auf Ununterscheidbarkeit). Für $n \to \infty$ *gilt* $1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \to 1$ *punktweise und damit folgt mit der Stetigkeit aus Theorem 1.2 für beschränkte Integranden*

$$1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet Z \to 1 \bullet Z = Z$$

und

$$1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet \widetilde{Z} \to 1 \bullet \widetilde{Z} = \widetilde{Z}$$

(gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit). Es folgt $Z = \widetilde{Z}$ *bis auf Ununterscheidbarkeit.*

‡‡ $H = 1_{\Omega\times\{t_0\}}$ kann offenbar nicht gleichmäßig in der Zeit durch Integranden der Form (1.2) approximiert werden, wie das für den "uniformly in probability" approach erforderlich wäre.

Bemerkung 1.15. *Für die Menge* $(\mathbf{b}\mathcal{P})_{\text{loc}}$ *der lokal beschränkten Prozesse gilt* $(\mathbf{b}\mathcal{P})_{\text{loc}} \subset L(X)$ *(für jedes Semimartingal* X*) und das Integral stimmt tatsächlich mit dem aus Theorem 1.2 überein. Dazu muss man nur zeigen, dass das Semimartingal* $Z := H \bullet X$ *aus Theorem 1.2 die Bedingung in (1.11) erfüllt. Dies folgt aus der Assoziativität (vgl. Theorem 1.21(c)) für das mit Theorem 1.2 definierte stochastische Integral mit lokal beschränkten Integranden, also mit* $1_{\{|H|\le n\}} \bullet (H \bullet X) = (H 1_{\{|H|\le n\}}) \bullet X$ *(hier nicht bewiesen, aber relativ klar).*

Bemerkung 1.16. *Das Attribut "allgemeinstes" lässt sich wie folgt erklären. Man nehme an, für einen Integranden* H *ließe sich ein Integral* $H \bullet X$ *definieren, das ein Semimartingal sei und es gelte zudem Assoziativität im Sinne von*

$$1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet (H \bullet X) = (H 1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}}) \bullet X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit wäre die Bedingung in (1.11) für $Z = H \bullet X$ *aber bereits erfüllt. Die Bedingung ist also auch notwendig für ein Integral mit sinnvollen Eigenschaften.*

Bemerkung 1.17. *Es kann sein, dass das Integral* $H \bullet X$ *im Sinne von Definition 1.11 existiert, aber die entsprechenden eindimensionalen Integrale* $H^i \bullet X^i$ *nicht im Sinne von Definition 1.11 existieren würden. Dieses Phänomen kann auftreten, wenn sich beim zugrundeliegenden Grenzübergang die einzelnen Komponenten* $H^j 1_{\{\max_{i=1,\dots,d}|H^i|\le n\}} \bullet X$*,* $j = 1, \dots, d$*, gegenseitig kompensieren. Einfachstes Beispiel ist das Integral* $H \bullet X$ *mit* $H = (H^1, -H^1)$ *und* $X = (X^1, X^1)$*, das stets existiert und Null ist (wenn* H *vorhersehbar und* X *Semimartingal).*

Bemerkung 1.18. *An der hier gewählten Definition von* $L(X)$ *wird sofort deutlich, dass die Menge der Integranden sich nicht ändert, wenn wir zu einem äquivalentem Maß* Q *übergehen (da die Menge der Semimartingale sich unter einem Maßwechsel nicht verändert)**

Definition 1.19. *Eine Stoppzeit* τ *heißt vorhersehrbar, wenn ihr Graph Element der vorhersehrbaren* σ*-Algebra ist, d.h.* $[\![\tau]\!] \in \mathcal{P}$*.*

Beispiel 1.20. *Deterministische Stoppzeiten* $t \in (0, T]$ *sind vorhersehrbar, da*

$$\Omega \times \{t\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \, \Omega \times (t - \frac{1}{n}, t] \in \mathcal{P}.$$

Allgemeiner sind verschobene Stoppzeiten vorhersehbar, d.h. $\tau + \varepsilon$ *mit* τ *Stoppzeit und* $\varepsilon > 0$*. Sprünge von (Compound-)Poisson-Prozessen sind dagegen nicht vorhersehrbar.*

Die Eigenschaften des stochastischen Integrals $H \bullet X$ wie wir sie für linksstetige H formal hergeleitet haben, gelten auch für das allgemeinere Integral nach Definition 1.13. Wir führen diese Eigenschaften (ohne Beweis) nochmal auf.

*Die Menge $L(X)$ hat viele interessante Eigenschaften und lässt sich auch konstruktiver einführen, siehe z.B. Jacod und Shiryaev [7], Seiten 207 ff.

Theorem 1.21. *Das stochastische Integral $H \bullet X$ für $H \in L(X)$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) Sei τ eine $[0,T]$-wertige Stoppzeit. Dann gilt

$$(H \bullet X)^\tau = (H1_{[\![0,\tau]\!]}) \bullet X = H \bullet (X^\tau).$$

(b) Der Sprungprozess des Integrals, also der Prozess $s \mapsto \Delta(H \bullet X)_s$, ist ununterscheidbar von dem Prozess $s \mapsto H_s^\top(\Delta X_s)$.

(c) Assoziativität: Der Prozess $Y = H \bullet X$ ist ein Semimartingal (hier per Definition der Menge $L(X)$). $G \in L(Y)$ ist äquivalent zu $GH \in L(X)$ und in diesem Fall gilt

$$G \bullet Y = G \bullet (H \bullet X) = (GH) \bullet X.$$

(d) Bezeichne mit $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ die Menge der lokalen Martingale. Es gilt folgende Implikation: $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und H vorhersehbar und lokal beschränkt $\implies H \bullet X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$.

(e) Für alle $H \in L(X)$ gilt die Implikation: $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und $H \bullet X$ einseitig beschränkt $\implies H \bullet X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$
(Ein Prozess Y heißt einseitig beschränkt, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass entweder $Y \geq a$ bis auf Ununterscheidbarkeit oder $Y \leq a$ bis auf Ununterscheidbarkeit)

(f) Sei τ eine vorhersehbare $[0,T]$-wertige Stoppzeit und sei Y ein $\mathcal{F}_{\tau-}$-messbare (reellwertige) Zufallsvariable. Dann ist der Prozess $H(\omega,t) := Y(\omega)1_{[\![\tau]\!]}(\omega,t)$ vorhersehbar und lokal beschränkt und es gilt $H \bullet X = Y\Delta X_\tau 1_{[\![\tau,T]\!]}$

Bemerkung 1.22. *Eigenschaft (f) wird es der Investorin erlauben, (nur) zu einem einzelnen Zeitpunkt, nämlich hier τ, in eine Aktie (mit Preisprozess X) zu investieren. Sie kauft Y Aktien zum Zeitpunkt $\tau-$ und verkauft sie zum Zeitpunkt τ bzw. $\tau+$ (wegen der Rechtsstetigkeit der Preisprozesse ist diese Unterscheidung nicht relevant). Der Gewinn (bzw. Verlust) aus dieser Transaktion beträgt gerade $Y\Delta X_\tau$.*

Definition 1.23. *Sei B eine Standard-Brownsche Bewegung. Definiere*

$$L^2(B) := \left\{ H \mid H \text{ vorhersehbarer Prozess mit } E\left(\int_0^T H_t^2\,dt\right) < \infty \right\}$$

und

$$L^2_{\text{loc}}(B) := \left\{ H \mid H \text{ vorhersehbarer Prozess mit } P\left(\int_0^T H_t^2\,dt < \infty\right) = 1 \right\}.$$

Die Bezeichnung „loc" ist gerechtfertigt durch:

$$H \in L^2_{\text{loc}}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ s.d. } H1_{[\![0,T_n]\!]} \in L^2(B).$$

Proposition 1.24. *Es gilt $L^2_{\mathrm{loc}}(B) \subset L(B)$, d.h. das stochastische Integral nach einer Brownschen Bewegung ist für alle Integranden $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(B)$ definiert.*

Beweis. Schritt 1: Sei H ein vorhersehbarer Prozess mit

$$P\left(\int_0^T H_t^2\,dt < \infty\right) = 1. \tag{1.12}$$

Definiere

$$T_n := \inf\{t \in [0,T] \mid \int_0^t H_s^2\,ds = n\} \wedge T.$$

Wegen (1.12) ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalisierend. Es gilt

$$E\left(\int_0^T H_t^2 1_{[0,T_n]}(t)\,dt\right) \leq n < \infty.$$

Der Integrand $H1_{[\![0,T_n]\!]}$ ist i.A. nicht beschränkt. Wegen majorisierter Konvergenz lässt er sich aber im folgenden Sinne durch beschränkte Integranden $H^{(n,m)} := H1_{[\![0,T_n]\!]\cap\{|H|\leq m\}}$ approximieren:

$$E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n,m)} - H_t 1_{[0,T_n]}(t)\right)^2 dt\right) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{1.13}$$

Im Beweis von Theorem 1.2 wurde gezeigt, dass die Itô-Isometrie (1.5) nicht nur für Elementarintegrale sondern für alle Integrale mit beschränkten Integranden und quadratintegrierbaren Martingalen als Integratoren gilt und damit

$$E\left[(H^{(n,m)} \bullet B_T)^2\right] = E\left[\int_0^T \left(H_t^{(n,m)}\right)^2 dt\right]. \tag{1.14}$$

Mit (1.13) und (1.14) folgt wie in Schritt 4 im Beweis von Theorem 1.2, dass $(H^{(n,m)} \bullet B)_{m\in\mathbb{N}}$ eine up-Cauchy-Folge ist. Damit lässt sich das Integral $(H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B$ als Limes der Folge $(H^{(n,m)} \bullet B)_{m\in\mathbb{N}}$ für $m \to \infty$ definieren. Wie in Schritt 6 im Beweis von Theorem 1.2 definiert man

$$H \bullet B := (H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B \quad \text{auf } [\![0,T_n]\!].$$

Beachte zudem, dass $(H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.

Schritt 2: Der in Schritt 1 konstruierte Prozess $H \bullet B$ ist ein lokal quadratintegrierbares Martingal und damit ein Semimartingal. Es bleibt zu zeigen, dass $Z := H \bullet B$ die Bedingung in Definition 1.13 erfüllt, also

$$(H1_{\{|H|\leq k\}}) \bullet B = 1_{\{|H|\leq k\}} \bullet (H \bullet B) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Dies bedeutet dann $H \in L(B)$. Offenbar reicht es aus (1.15) für $H1_{[\![0,T_n]\!]}$ statt für H zu zeigen. Die Assoziativität des Integrals aus Theorem 1.21(c) nur auf beschränkte Integranden angewandt ergibt

$$(H^{(n,m)} 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}}) \bullet B = 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H^{(n,m)} \bullet B).$$

Nun lässt man m gegen ∞ gehen. Wegen $H^{(n,m)} \to H1_{[\![0,T_n]\!]}$ für $m \to \infty$ punktweise, der Majorante k und der Stetigkeit des Integrals konvergiert die linke Seite gegen den Prozess $(H1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}}) \bullet B$ uniformly in probability. Es bleibt zu zeigen, dass die rechte Seite gegen $1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet B)$ konvergiert. Aus

$$\begin{aligned}
&E\left(\left(1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H^{(n,m)} \bullet B)_T - 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet B)_T\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet ((H^{(n,m)} - H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B)_T\right)^2\right) \\
&= E\left(1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet [(H^{(n,m)} - H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B, (H^{(n,m)} - H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B]_T\right) \\
&\leq E\left([(H^{(n,m)} - H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B, (H^{(n,m)} - H1_{[\![0,T_n]\!]}) \bullet B]_T\right) \\
&= E\left(\int_0^T (H_t^{(n,m)} - H_t 1_{[0,T_n]}(t))^2 \, dt\right) \\
&\overset{(1.13)}{\to} 0, \quad m \to \infty
\end{aligned}$$

und der Doobschen-Ungleichung für quadratintegrierbare Martingale folgt $1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H^{(n,m)} \bullet B) \to 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet B)$ für $m \to \infty$ uniformly in probability und damit

$$(H1_{[\![0,T_n]\!]} 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}}) \bullet B = 1_{\{|H1_{[\![0,T_n]\!]}| \leq k\}} \bullet (H1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet B).$$

$\square$

Bemerkung 1.25 (Notwendigkeit nichtregulärer Handelsstrategien). *Ein wichtiger Grund, überhaupt zeitstetige Handelsstrategien zuzulassen (und sich nicht auf elementare Strategien wie in (1.2) zu beschränken), ist, dass Optimierungsprobleme ihr Maximum annehmen sollen. Bei elementaren Strategien wäre dies nicht zu erwarten. Wenn es das Optimierungskriterium erfordern sollte, laufend seine Strategie anzupassen, könnte man in der Menge der Elementarstrategien bestenfalls eine approximierende Folge finden. Die Konvergenz "gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit" (gleichmäßige Konvergenz in der Zeit), die auf $\mathbb{L}$ als den Abschluss der Elementarstrategien führt (vgl. [10]), ist jedoch i.A. zu stark, als dass man den Maximierer immer im Abschluss erwarten sollte. Betrachte dazu als Beispiel den deterministischen Aktienpreisprozess*

$$S(t) = \int_0^t \mu(s) \, ds, \quad t \in [0,T],$$

wobei μ eine beschränkte Borel-messbare Funktion ist. $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ muss nicht regulär sein, also weder links- noch rechtsstetig. μ könnte etwa die Funktion

$$\mu(t) := \sin\left(\frac{1}{T/2 - t}\right) 1(t < T/2) \tag{1.16}$$

sein, deren linker Limes in $T/2$ nicht existiert. $S(t)$ ist als Lebesgue-Integral definiert und stetig in t. Versuche, optimal in diese Aktie zu investieren, unter der **Nebenbedingung**, *dass für die Anzahl $(\varphi(t))_{t\in[0,T]}$, die hier nicht stochastisch sondern nur eine (Borel-messbare) Funktion in der Zeit ist, gilt $|\varphi| \leq \mathbf{1}$. Aus der Assoziativität des Integrals (bzw. aus dem Trafosatz) folgt*

$$\textit{Handelsgewinn} = \int_0^T \varphi(t)\, dS(t) = \int_0^T \varphi(t)\mu(t)\, dt.$$

Offenbar löst

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} 1 & : \textit{für } \mu(t) \geq 0 \\ -1 & : \textit{für } \mu(t) < 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

das Optimierungsproblem und jedes weitere Optimum muss bis auf eine Lebesguesche Nullmenge mit (1.17) übereinstimmen. Da $\mu(t)$ beliebig nahe vor $T/2$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, müsste für eine optimale Strategie $\widetilde{\varphi}$ und für alle $\varepsilon > 0$ folglich gelten: $(T/2 - \varepsilon, T/2) \cap \{\widetilde{\varphi} = 1\} \neq \emptyset$ und $(T/2 - \varepsilon, T/2) \cap \{\widetilde{\varphi} = -1\} \neq \emptyset$. Dies ist aber mit der Existenz des linken Limes in $T/2$ nicht vereinbar

(Man beachte, dass man den Effekt auch mit einem stetigem μ erreichen kann, etwa durch Multiplikation von (1.16) mit dem Faktor $T/2 - t$).

Der (interessantere) stochastische Fall sieht ganz ähnlich aus. Da man sein Kapital laufend ohne Transaktionskosten umschichten kann, bestimmen auch hier die **lokalen** *stochastischen Charakteristiken (Driftrate, lokale Volatilität, Sprungrate) die Investitionsentscheidungen. Beispiel wie oben mit dem Itô-Prozess $S_t = s_0 + \int_0^t \mu_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dW_s$.*

Bemerkung 1.26. *Mit Definition 1.13 ist das Elementarintegral hinreichend weit fortgesetzt, um für Optimierungsprobleme Maximierer zu erhalten. In konkreten Beispielen ist der Optimierer oder die Hedgingstrategie natürlich doch wieder ein linksstetiger stochastischer Prozess. Obiges Beispiel zeigt aber, dass $\mathbb{L}$ keine sinnvolle Menge für die* **erlaubten Strategien** *in einem Marktmodell ist.*

1.2 Zulässige Strategien und No-Arbitrage

Definition 1.27. *Mit*

$$V_t := \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0,T]$$

bezeichnen wir den Vermögensprozess der Investorin.

Definition 1.28. *Eine Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ heißt selbstfinanzierend zum Startkapital v_0, wenn für den zugehörigen Vermögensprozess $V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^d \varphi_t^i S_t^i$ gilt:*

$$V_t = v_0 + \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \bullet S_t^i, \quad t \in [0,T], \quad \text{wobei } v_0 := \sum_{i=0}^{d} \varphi_0^i S_0^i. \tag{1.18}$$

Differentielle Schreibweise:

$$dV_t = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i \, dS_t^i, \quad t \in [0,T].$$

Interpretation: Eine Handelsstrategie φ ist selbstfinanzierend, wenn die Schwankungen des zugehörigen Vermögensprozesses $V(\varphi) = \sum_{i=0}^d \varphi^i S^i$ ausschließlich aus den Preisveränderungen der im Portfolio enthaltenen Wertpapiere resultieren. Es gibt also keine externe Kapitalentnahme oder -zuführung. Alle Umschichtungen des Portfolio müssen kostenneutral erfolgen.

Es macht in der Regel wenig Sinn, zwei Vermögen zu verschiedenen Zeitpunkten direkt miteinander zu vergleichen. 1 Euro zum Zeitpunkt 0 ist in der Regel mehr wert als 1 Euro zum Zeitpunkt 1. Deshalb vergleicht man beide Werte mit einem *Bezugsprozess* $(N_t)_{t\in[0,T]}$, den wir *Numeraire* nennen. Sprich, Wertgrößen werden als Vielfachheiten des Numeraires ausgedrückt. Statt V_t schauen wir uns den Prozess $\frac{V_t}{N_t}$ an.

Typisches Beispiel ist der Guthabenprozess eines "risikolosen" Bankkontos mit fester Verzinsung $r > 0$, d.h. $N_t = e^{rt}$, $t \in [0,T]$.

Eine solche Anlagemöglichkeit muss natürlich nicht existieren (Man beachte, dass keiner der Preisprozesse S^i, $i = 0, \dots, d$, deterministisch sein muss).

Wegen möglicher Wechselkursrisiken ist für den Begriff der "Risikolosigkeit" auch von Bedeutung, in welcher Währung die Investorin rechnet. Wir werden später sehen, dass es rechentechnisch sinnvoll ist, für N den Preisprozess eines handelbaren Wertpapiers anzusetzen, also z.B. S^0. Auch ökonomisch kann es sinnvoll sein, ein *handelbares* Numeraire zu wählen. N_t lässt sich dann mit Startkapital N_0 am Markt erzeugen. Dies deutet, dass das erzielte Vermögen mit einer Referenzanlagemöglichkeit verglichen wird.

Zunächst wird aber nur vorausgesetzt, dass N ein Semimartingal ist mit

$$\inf_{t\in[0,T]} N_t > 0, \quad P\text{-f.s.} \tag{1.19}$$

(später meistens $N = S^0$, was bedeutet, dass wir Bedingung (1.19) auch an den Preisprozess S^0 stellen). Mit $\widehat{S}^i$ bzw. $\widehat{V}$ bezeichnen wir die diskontierten Preis- und Vermögensprozesse, d.h.

$$\widehat{S}^i := \tfrac{S^i}{N} \text{ und } \widehat{V} := \tfrac{V}{N} = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \widehat{S}^i.$$

Bemerkung 1.29. *Mit der Itô-Formel und (1.19) folgt, dass der Prozess* $\frac{1}{N}$ *ein Semimartingal ist*[†] *Damit sind diskontierte Wertgrößen genau dann Semimartingale, wenn die ursprünglichen Wertgrößen Semimartingale sind.*

Theorem 1.30. *Sei* $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *eine Handelsstrategie und* V *der dazugehörige Vermögensprozess, d.h.* $V_t = \sum_{i=0}^d \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0,T]$. V *ist genau dann selbstfinanzierend zum Startkapital* v_0*, wenn*

$$\widehat{V}_t = \widehat{v}_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}_t^i, \quad t \in [0,T], \tag{1.20}$$

wobei $\widehat{v}_0 := \frac{v_0}{N_0}$.

Beweis: siehe Skript [10].

Bemerkung 1.31. *Theorem 1.30 besagt, dass die Selbstfinanzierungseigenschaft einer Strategie* φ *nicht davon abhängt, ob alle Wertgrößen als Vielfachheiten der Eins oder als Vielfachheiten des Numeraires* N *verrechnet werden.*

Dies erweist sich als sehr nützlich. Wählt man $N = S^0$*, so ist* (1.20) *wegen* $\widehat{S}^0 = 1$ *äquivalent zu:*

$$\varphi_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \widehat{S}_t^i = \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}_t^i. \tag{1.21}$$

Da φ^0 *auf der rechten Seite von (1.21) nicht mehr vorkommt, kann man nach* φ^0 *auflösen und erhält*

$$\begin{aligned} \varphi_t^0 &= \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}_t^i - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \widehat{S}_t^i \\ &\overset{\Delta(\varphi^i \bullet \widehat{S}^i) = \varphi^i \Delta \widehat{S}^i}{=} \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}_{t-}^i - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \widehat{S}_{t-}^i \end{aligned} \tag{1.22}$$

Der Prozess in der letzten Zeile von (1.22) ist offenbar vorhersehbar und lokal beschränkt (da alle auftretenden Summanden dies sind). Damit ist φ^0 *ein "zulässiger" Integrand, der die Strategie* $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *selbstfinanzierend macht – ohne selber in den Ausdruck* $\widehat{v}_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}^i$ *einzugehen.*

Im Folgenden sei stets $N = S^0$, d.h. das Numeraire ist der Preisprozess eines handelbaren Wertpapiers.

Definition 1.32. *Eine selbstfinanzierende Strategie* $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d) \in L(S)$ *heißt* **zulässig**, *wenn für den zugehörigen Vermögensprozess* V *gilt:* $\widehat{V}_t \geq -a \ \forall t \in [0,T]$, *für ein* $a \in \mathbb{R}_+$ *(endlicher Kreditrahmen) (oder äquivalent:* $V_t \geq -a S_t^0 \ \forall t \in [0,T]$*).*

[†]Dazu definiere man die lokalisierende Folge $T_n := \inf\{t \geq 0 \mid N_t \leq 1/n\}$. Dann wende man die Itô-Formel auf eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ an, die $f(x) = 1/x$ für $x \geq 1/n$ erfüllt. Es folgt, dass der Prozess $\frac{1}{N}$ bis strikt vor T_n (und damit auch bis einschließlich T_n) ein Semimartingal ist. Da lokale Semimartingale Semimartingale sind, folgt, dass $\frac{1}{N}$ ein Semimartingal ist.

Definition 1.33. *(1) Eine* zulässige *Strategie φ heißt* **Arbitragemöglichkeit**, *wenn für den zugehörigen Vermögensprozess V gilt $V_0 = 0$, $P(V_T \geq 0) = 1$ und $P(V_T > 0) > 0$. Ein Marktmodell erfüllt "***no arbitrage***" (***NA***), ist also arbitragefrei, wenn es in ihm keine Arbitragemöglichkeit gibt.*

(2) Eine Folge von zulässigen *Strategien $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* **Gewinnmöglichkeit mit verschwindendem Risiko**, *"***free lunch with vanishing risk***" (***FLVR***) wenn es eine Zufallsvariable f mit $P(f \geq 0) = 1$, $P(f > 0) > 0$ und eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, gibt, so dass für die Folge der zugehörigen diskontierten Vermögensprozesse $\widehat{V}(\varphi^{(n)})$ gilt, dass $\widehat{V}_0(\varphi^{(n)}) = 0$ und*

$$P\left(f \leq \widehat{V}_T(\varphi^{(n)}) + \varepsilon_n\right) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Ein Marktmodell erfüllt die Bedingung "***no free lunch with vanishing risk***" (***NFLVR***), wenn es in ihm keine (FLVR) gibt*[‡].

Eine "Gewinnmöglichkeit mit verschwindendem Risiko" liefert also bis auf Verluste, die gleichmäßig gegen Null konvergieren, einen Arbitragegewinn f. Offenbar gilt die Implikation (NFLVR) $\implies$ (NA). In Beispiel 1.43, das noch einiger Vorarbeiten bedarf, werden wir sehen, dass die Umkehrung nicht gilt.

Wieso definiert man eine Arbitrage φ nicht wie folgt ?

$$\text{Für } \widehat{V}(\varphi) \text{ muss gelten } \widehat{V}_0 = 0,\ P(\widehat{V}_t \geq 0,\ \forall t \in [0,T]) = 1 \text{ und } P(\widehat{V}_T > 0) > 0\ ? \quad (1.23)$$

Betrachte dazu das folgende Finanzmarktmodell.

Beispiel 1.34. *Sei $T = 1$ und $\tau : \Omega \to [0,1]$ eine zufällige Zeit, die gleichverteilt ist, d.h. $P(\tau \leq t) = t$, $\forall t \in [0,1]$. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ soll die minimale Filtrierung sein, so dass τ eine Stoppzeit ist, also $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\tau \leq s\},\ s \leq t)$. D.h. mit der Information zum Zeitpunkt t weiß man, ob τ in das Intervall $[0,t]$ fällt oder nicht. Wenn τ noch nicht eingetreten ist, gibt es aber keine weiteren Informationen. τ ist keine vorhersehbare Stoppzeit.*

Der Markt soll nun aus $S^0 = 1$ und einem risikobehafteten Wertpapier S^1 mit folgendem Preisprozess bestehen:

$$S_t^1 := \begin{cases} 1 - t : \text{für } \tau > t \\ 2 \qquad : \text{für } \tau \leq t. \end{cases}$$

Der Markt ist nicht arbitragefrei. Ein risikoloser Gewinn läßt sich erzielen, indem man zum Zeitpunkt 0 eine Aktien zum Preis $S_0^1 = 1$ kauft und dafür einen Bond S^0 shortet. Hält man diese Position bis zum Zeitpunkt 1 so ergibt dies mit Wahrscheinlichkeit 1 den Gewinn 1. Diese Strategie ist zulässig, da der Vermögensprozess während der gesamten Laufzeit nach unten durch -1 beschränkt ist.

[‡]Englische Redewendung "There ain't no such thing as a free lunch", die durch den Science-Fiction-Autor Robert A. Heinlein in seinem Roman "The Moon Is a Harsh Mistress" von 1966 populär gemacht wurde.

Das interessante an dem Beispiel ist, dass man eine Arbitrage nur erzielen kann, wenn man sich zwischenzeitlich verschuldet. Dies ist in zeitdiskreten Modellen anders (siehe z.B. Proposition 1.16 im Skript). In zeitdiskreten, nicht arbitragefreien Modellen (mit endlichem Zeithorizont) existiert immer eine Arbitragestrategie, bei der man sich zwischenzeitlich nicht verschulden muss. Man kann dort nämlich die Arbitrage auch in einer einzigen Handelsperiode erzielen.

Offenbar gibt es im Beispiel keine Strategie φ, die (1.23) erfüllt. Wie kann man das zeigen ?

Betrachte eine Strategie φ, s.d. für den dazugehörigen Vermögensprozess gilt $P(\widehat{V}_t \geq 0,\ \forall t \in [0,T]) = 1$. Da nach τ keine Handelsgewinne mehr generiert werden können und vor τ nur die Information vorliegt, dass τ noch nicht eingetreten ist, kann φ mit einer Funktion in der Zeit identifiziert werden, die die zeitabhängige Anzahl an Aktien, die die Investorin vor dem Sprung halten möchte, beschreibt. Da $P(\tau > t) > 0$ für alle $t \in [0,1)$ muss

$$-\int_0^t \varphi_u \, du \geq 0 \quad \forall t \in [0,1) \tag{1.24}$$

gelten (dies sind die Handelsgewinne bis t, wenn $\tau > t$). Die Investorin darf also im zeitlichen Mittel nicht mehr long als short gehen. Andererseits kann der Kurs jederzeit nach oben springen, was bei Short-Positionen zu Verlusten von $1 + t$ pro Aktie führt. Da der Sprung der Aktie nicht antizipierbar ist und die dann entstehenden Verluste die vorherigen Gewinne nicht dominieren dürfen, ist

$$\varphi_t - \int_0^t \varphi_u \, du \geq 0 \quad \text{für Lebesgue-fast alle } t \tag{1.25}$$

neben (1.24) eine weitere notwendige Bedingung für die Nichtnegativität des Vermögensprozesses. Hierzu beachte man, dass (1.25) für $\varphi_t \geq 0$ bereits aus (1.24) folgt und für $\varphi_t < 0$ die linke Seite von (1.25) eine obere Schranke für das Vermögen $\varphi_t(2-(1-t)) - \int_0^t \varphi_u \, du$ nach dem Sprung ist, das nicht negativ werden darf.

Das *Lemma von Gronwall* impliziert für jede integrierbare Funktion f und $C \in \mathbb{R}_+$ die Implikation:

$$f(t) \leq C \int_0^t f(u) \, du \quad \forall t \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{1.26}$$

Angewandt auf

$$f = -\varphi 1_{\{t \ \mid \ (1.25) \text{ gilt für } t\}}$$

und $C = 1$ implizieren (1.25) und (1.26), dass $\varphi \geq 0$ Lebesgue-fast überall. Beachte hierzu, dass das Integral von f mit dem Integral von $-\varphi$ übereinstimmt und im Fall $f(t) = 0$ (1.26) wegen (1.24) erfüllt ist. Wegen (1.24) folgt $\varphi = 0$ Lebesgue-fast überall. Für eine solche Strategie gilt aber $P(\widehat{V}_1 = 0) = 1$.

Definition 1.35. *Seien S^i, $i = 0, \dots, d$ nichtnegative Semimartingale. Ein Maß Q heißt äquivalentes Martingalmaß (ÄMM), bzgl. des Numeraires S^0, wenn $Q \sim P$ und $\widehat{S}^i$, $i = 0, \dots, d$, Q-***lokale** *Martingale sind.*

Bemerkung 1.36. *(1) In zeitdiskreten Modellen wird von einem Martingalmaß gefordert, dass unter ihm die diskontierten Preisprozesse echte Martingale sind. Man beachte jedoch, dass die beiden Definitionen konsistent zueinander sind, da in diskreter Zeit jedes nichtnegative lokale Martingal ein echtes Martingal ist (siehe Skript [11]).*

(2) Betrachte den stückweise konstanten nichtnegativen Preisprozess S mit $S_0 = 1$ und

$$S_{1-2^{-n}} = \prod_{k=1}^{n} A_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

d.h.

$$S_t = \prod_{k=1}^{\lfloor \log_2\left(\frac{1}{1-t}\right) \rfloor} A_k, \quad t \in (0, 1),$$

wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq x\}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unter P i.i.d. ist mit $P(A_1 = 2) = P(A_1 = 0) = 1/2$. In jedem Zeitpunkt $t = 1/2, 3/4, 7/8, \dots$ verdoppelt sich der Aktienpreis oder er fällt auf 0, wo er dann auch bleibt. Der Markt ist arbitragefrei mit eindeutigem Martingalmaß P, unter dem der Aktienpreis aber kein echtes Martingal ist, da $P(S_1 = 0) = 1$.

Lemma 1.37. *Jedes nach unten beschränkte lokale Supermartingal ist ein Supermartingal.*

Bemerkung 1.38. *Insbesondere ist jedes nach unten beschränkte lokale Martingal ein Supermartingal.*

Beweis. Sei Y ein lokales Supermartingal und o.B.d.A. $Y \geq 0$. Es existiert also eine lokalisierende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $E\left[1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n})\right] \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, $A \in \mathcal{F}_{t_1}$.

Schritt 1: Zunächst zeigt man, dass $\forall t \in [0, T]$ Y_t integrierbar ist. Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$E(Y_t) \leq \liminf_{n\to\infty} E(Y_{t\wedge T_n}) \underset{\nwarrow \text{da } Y^{T_n} \text{ Supermartingale}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} E(Y_{0\wedge T_n}) = E(Y_{0\wedge T_1}) \in \mathbb{R}_+$$

Schritt 2: Es gilt $1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n}) \geq -Y_{t_1}$.

Damit kann man Fatou auf die nichtnegative Folge $Z_n := 1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n}) + Y_{t_1}$ anwenden und es folgt (da $EY_{t_1} < \infty$):

$$\begin{aligned}
&E(1_A(Y_{t_2} - Y_{t_1})) = E\left(\lim_n \left[1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n}) + Y_{t_1}\right]\right) - E(Y_{t_1}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} E(1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n}) + Y_{t_1}) - E(Y_{t_1}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} E(1_A(Y_{t_2\wedge T_n} - Y_{t_1\wedge T_n})) \leq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist Y ein Supermartingal. $\square$

Bemerkung 1.39. *In (endlicher) diskreter Zeit ist jedes nach unten beschränkte nicht-negative lokale Martingal sogar ein Martingal und nicht nur ein Supermartingal (siehe Skript [11]). Der Unterschied im Zeitstetigen besteht darin, dass aus Schritt 1 im Beweis, nämlich $E(Y_t) < \infty$ für alle $t \in [0,T]$,* **nicht** *folgt, dass $E(\sup_{t\in[0,T]} Y_t) < \infty$. Damit gibt es keine integrierbare Majorante der punktweisen Konvergenz in Schritt 2.*

Lemma 1.40. *Sei Q ein ÄMM und φ eine zulässige Strategie. Dann ist $\widehat{V} = \widehat{V}(\varphi)$ ein Q-Supermartingal.*

Beweis. Da $\widehat{V} = \widehat{v} + \varphi \bullet \widehat{S}$ und nach unten beschränkte Integrale nach lokalen Martingalen wieder lokale Martingale sind (Theorem 1.21(e)), ist $\widehat{V}$ ein Q-lokales Martingal und das Theorem ergibt sich aus Lemma 1.37. $\square$

Theorem 1.41. *Wenn ein ÄMM existiert, dann erfüllt der Markt (NFLVR).*

Beweis. Sei φ eine zulässige Strategie mit $\widehat{V}_0(\varphi) = 0$. Aus Lemma 1.40 folgt

$$E_Q(\widehat{V}_T(\varphi)) \leq 0. \tag{1.27}$$

Nehme nun an, der Markt erfülle *nicht* (NFLVR). Dann gäbe es eine Zufallsvariable $f \geq 0$ mit $P(f > 0) > 0$, eine Folge $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von zulässigen Strategien und eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, so dass $\widehat{V}_0(\varphi^{(n)}) = 0$ und

$$0 \leq f \leq \widehat{V}_T(\varphi^{(n)}) + \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wegen (1.27) ergibt dies $E_Q(f) \leq \varepsilon_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was $E_Q(f) \leq 0$ nach sich zieht. Zusammen mit $f \geq 0$ folgt $Q(f = 0) = 1$ und damit auch $P(f = 0) = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also kann (NFLVR) nicht gelten. $\square$

Die Umkehrung von Theorem 1.41 wäre die interessante Richtung: (NFLVR) $\Rightarrow \exists$ ÄMM. Sie ist ungleich schwieriger und wurde von Delbaen und Schachermayer bewiesen.

Theorem 1.42. *[Fundamental theorem of asset pricing (Debaen/Schachermayer)] Es existiert genau dann ein ÄMM, wenn die Bedingung (NFLVR) erfüllt ist.*

Nun wollen wir ein interessantes Beispiel diskutieren, das zwar arbitragefrei ist aber eine (FLVR) besitzt.

Beispiel 1.43 ((NA) aber kein (NFLVR))**.** *Sei W eine Standard-Brownsche Bewegung, die die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ des Marktmodells erzeugt. Definiere zunächst den Prozess*

$$L_t := \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds\right) & : \text{für } t < 1 \\ 0 & : \text{für } t = 1 \end{cases}$$

und die Stoppzeit $\tau := \inf\{t \geq 0 \mid L_t = 2\} \wedge 1$. Als Aktienpreis betrachten wir nun den adaptierten und stetigen Prozess

$$S_t = W_{t\wedge\tau} + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, ds = W_{t\wedge\tau} + 2 - 2\sqrt{1 - t\wedge\tau}, \quad t \in [0,1].$$

Die Driftrate von S explodiert also bei 1 auf allen Pfaden mit $\tau = 1$. Da es nur auf die erzielbaren Handelsgewinne $\varphi \bullet S$ ankommt, könnten wir statt S auch sein stochastisches Exponential $\mathcal{E}(S)$ betrachten, das nur positive Werte annimmt.

Schritt 1: *Zunächst konstruieren wir eine (FLVR). Hierzu muss natürlich die möglicherweise explodierende Driftrate von S beim Zeitpunkt 1 ausgenutzt werden. Obige Stoppzeit lässt sich schreiben als*

$$\begin{aligned}\tau &= \inf\left\{t \geq 0 \mid \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds = -\ln(2)\right\} \wedge 1 \\ &= \inf\left\{t \geq 0 \mid \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dS_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds = -\ln(2)\right\} \wedge 1. \qquad (1.28)\end{aligned}$$

Betrachte die Folge von Strategien

$$\varphi_t^{(n)} := \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-t}}1_{(0,\sigma_n]}(t),$$

wobei $\sigma_n := \inf\left\{t \geq 0 \mid \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dS_s = n\right\} \wedge 1$. Da $-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds \leq 0$, sind die Verluste der Strategien wegen (1.28) durch $\ln(2)/n$ beschränkt. Das Abstoppen bei σ_n dient lediglich der Sicherung der Integrierbarkeit der Strategien: wir geben uns mit dem Gewinn 1 zufrieden. Es bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn 1 auch erzielt werden kann, nach unten abzuschätzen. Dazu betrachte den Prozess $X_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds \stackrel{\mathcal{D}}{=} \widetilde{W}_{\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\,ds = \widetilde{W}_{-\ln(1-t)} - \frac{1}{2}\ln(1-t)$, wobei $\widetilde{W}$ wiederum eine Standard-Brownsche Bewegung ist und das Ereignis

$$A := \left\{X_t \to \infty \text{ für } t \to 1 \text{ und } \inf_{t\in[0,1]} X_t > -\ln(2)\right\}.$$

Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt $P(A) > 0$. Wegen $X_t \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dS_s$ für alle $t \leq \tau$ gilt $\varphi^{(n)} \bullet S_1 = 1$ auf der Menge A, die nicht von n abhängt. Damit ist die Folge eine (FLVR) mit $f = 1_A$.

Schritt 2: *Bleibt zu zeigen, dass das Modell (NA) erfüllt. Der $[0,2]$-wertige Prozess L^τ ist ein echtes Martingal mit $L_0^\tau = 1$. Somit definiert*

$$dQ/dP = L_\tau$$

ein zu P absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q, d.h. für alle $A \in \mathcal{F}_1$ gilt die Implikation $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$. Es gilt $\{\tau = 1\} = \{L_\tau = 0\}$ und aus der Martingaleigenschaft von L^τ folgt $P(L_1^\tau = 2) = P(L_1^\tau = 0) = 1/2$. Somit sind P und Q auf $\mathcal{F}_1$ nicht äquivalent, da $P(L_\tau = 0) > 0$ und $Q(L_\tau = 0) = 0$. Schränkt man die Maße jedoch auf die Teil-σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ mit $t < 1$ ein, so beträgt die Dichte $L_t^\tau > 0$ und die eingeschränkten Maße sind äquivalent, d.h.

$$\frac{d(Q\mid_{\mathcal{F}_t})}{d(P\mid_{\mathcal{F}_t})} = L_t^\tau = \exp\left(-\int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\sqrt{1-s}}\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau}\frac{1}{1-s}\,ds\right) > 0 \quad \text{für alle } t < 1.$$

Dies wird in der folgenden Argumentation die entscheidende Rolle spielen.

Zunächst machen wir die Feststellung, dass das Modell unter Q arbitragefrei ist. In der Tat, unter Q ist S als abgestoppte Standard-Brownsche Bewegung ein Martingal. Q ist also im Q-Modell ein äquivalentes Martingalmaß. Mit Lemma 1.40 folgt $E_Q(\varphi \bullet S_1) \le 0$ für alle zulässigen φ, was (NA) impliziert.

Nun wollen wir zeigen, dass dies (NA) des P-Modells impliziert. Sei hierzu φ eine (unter P) zulässige Strategie mit $P(\varphi \bullet S_1 \ge 0) = 1$. φ ist dann auch unter Q zulässig und $Q(\varphi \bullet S_1 \ge 0) = 1$. Sei nun $t_0 \in (0,1)$. Es muss

$$Q(\varphi \bullet S_{t_0} > 0) = 0$$

gelten, da andernfalls die zulässige Strategie $\psi := \varphi 1_{]\!]0,t_0]\!]\cup(\{\varphi\bullet S_{t_0}\le 0\}\times(t_0,1])}$ im Q-Modell eine Arbitrage wäre, was ja nicht möglich ist. Da $\{\varphi \bullet S_{t_0} > 0\} \in \mathcal{F}_{t_0}$ und $Q\,|_{\mathcal{F}_t} \sim P\,|_{\mathcal{F}_t}$ für alle $t < 1$ folgt $P(\varphi \bullet S_{t_0} > 0) = 0$. Wegen der Stetigkeit des Prozesses $\varphi \bullet S$ folgt $P(\varphi \bullet S_1 > 0) = 0$. Damit ist φ keine Arbitrage unter P.

Übungsaufgabe: Man zeige, dass das Modell ohne das Abstoppen des Preisprozesses bei τ, d.h. $S_t = W_t + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, ds$ für alle $t \in [0,1]$, eine Arbitrage besitzt.

2 Vollständige Finanzmärkte

Definition 2.1. *Ein Finanzmarktmodell heißt vollständig, wenn sich (nach einer geeigneten Diskontierung) jede beschränkte zufällige Auszahlung $H \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ als Endwert eines beschränkten selbstfinanzierenden Vermögensprozesses darstellen lässt*[§].

Die Beschränktheit des Vermögensprozesses muss offenbar geforderet werden, um eine Replikation durch Superhedging und Kapitalvernichtung durch Verdoppelungsstrategien auszuschließen.

Sei $(B_t)_{t\in[0,T]} = (B_t^1, \dots, B_t^n)_{t\in[0,T]}$ eine Standard n-dimensionale "intrinsische[¶]" Brownsche Bewegung auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dies bedeutet, dass die Prozesse $B^1, B^2, \dots, B^n$ stochastisch unabhängig sind und alle B^k, $k = 1, \dots, n$ (eindimensionale) Standard Brownsche Bewegungen sind. Die von B erzeugte Filtrierung $\mathbb{F}^B := (\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$ ist nun definiert als

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s^i,\ s \le t, i = 1, \dots, n,\ \mathcal{N}), \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

wobei $\mathcal{N}$ die Menge der P-Nullmengen der σ-Algebra $\sigma(B_s^i,\ s \le T, i = 1, \dots, n)$ bezeichne. $\mathcal{F}_t^B$ ist also die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{N}$ umfasst und bzgl. der alle B_s^i, $s \le t, i = 1, \dots, n$ messbar sind. Es lässt sich zeigen, dass (2.1) die üblichen Voraussetzungen erfüllt, vgl. Definition 1.2 in ([10]). Insbesondere ist die Filtration also rechtstetig (siehe z.B. Karatzas und Shreve [9], Proposition 7.7 und Theorem 7.9 in Chapter 2).

[§] Formal ist ein Finanzmarktmodell gegeben durch einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ und die Preisprozesse $S^0, S^1, \dots, S^d$ der handelbaren Wertpapiere. Insbesondere hängt Vollständigkeit (wie Arbitragefreiheit) auch von der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ also von dem Informationsverlauf der Agentinnen ab.

[¶] D.h. $B_t - B_s$ ist unabhängig von B_u für alle $0 \le u \le s \le t \le T$ (Definition ohne Filtration).

Theorem 2.2 (Martingaldarstellungssatz)**.** *Sei M ein (reellwertiges) lokales Martingal bzgl. $\mathbb{F}^B$. Dann lässt sich M darstellen als*

$$M_t = M_0 + \varphi \bullet B_t \quad \forall t \in [0,T] \quad P\text{- f.s.} \tag{2.2}$$

(also bis auf Ununterscheidbarkeit), wobei $\varphi \in L(B)$ mit $P\left(\int_0^T ||\varphi_t||_2^2 dt < \infty\right) = 1$ ($||\cdot||_2$ bezeichnet die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$).

Wir benötigen zunächst noch zwei Propositionen und eine mehrdimensionale Version des Theorems von Lévy, die natürlich von unabhängigem Interesse sind.

Proposition 2.3. *Jedes stetige lokale Martingal von endlicher Variation ist (in der Zeit) konstant.*

Beweis. Sei M ein stetiges lokales Martingal von endlicher Variation. Da ein stetiger Prozess von endlicher Absolutvariation verschwindende quadratische Variation besitzt, gilt $[M,M] = 0$ und damit

$$M_t^2 = M_0^2 + 2M_- \bullet M_t + [M,M]_t = M_0^2 + 2M \bullet M_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Durch Lokalisierung kann M o.B.d.A. als beschränkt angenommen werden. Damit ist $M \bullet M$ ein Martingal und $E(M_t^2) = E(M_0^2)$. Es folgt

$$\begin{aligned} E\left((M_t - M_0)^2\right) &= E(M_t^2) - 2 \underbrace{E(M_t M_0)}_{=E(E(M_t M_0 \mid \mathcal{F}_0)) = E(M_0 E(M_t \mid \mathcal{F}_0)) = E(M_0^2)} + E(M_0^2) \\ &= E(M_t^2) - E(M_0^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Für zwei stochastisch unabhängige Brownsche Bewegungen B^1 und B^2 gilt $[B^1, B^2] = 0$.*

Beweis. Seien $s \leq t$. Es gilt

$$B_t^1 B_t^2 = B_s^1 B_s^2 + (B_t^1 - B_s^1) B_s^2 + (B_t^2 - B_s^2) B_s^1 + (B_t^1 - B_s^1)(B_t^2 - B_s^2).$$

Da $B_t^1 - B_s^1$ und $B_t^2 - B_s^2$ auch bedingt auf $\mathcal{F}_s^{(B^1,B^2)}$ stochastisch unabhängig voneinander sind und damit

$$E[(B_t^1 - B_s^1)(B_t^2 - B_s^2) \mid \mathcal{F}_s^{(B^1,B^2)}] = E[B_t^1 - B_s^1 \mid \mathcal{F}_s^{(B^1,B^2)}] E[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s^{(B^1,B^2)}] = 0,$$

ist der Produktprozess $B^1 B^2$ ein Martingal. Damit ist der Prozess

$$[B^1, B^2] = B^1 B^2 - B^1 \bullet B^2 - B^2 \bullet B^1$$

ein stetiges lokales Martingal. Da $[B^1, B^2]$ aber gleichzeitig von endlicher Variation ist, folgt mit Proposition 2.3 $[B^1, B^2] = [B^1, B^2]_0 = 0$. □

Theorem 2.5 (Lévys Theorem, mehrdimensionale Version). *Ein stochastischer Prozess $X = (X^1, \dots, X^n)$ ist genau dann eine Standard n-dimensionale Brownsche-Bewegung, wenn er ein lokales Martingal mit $X_0 = 0$ ist (d.h. alle Komponenten X^k sind lokale Martingale mit $X_0^k = 0$) und für alle $t \geq 0$*

$$[X^k, X^l]_t = \begin{cases} t & : \text{für } k = l \\ 0 & : \text{für } k \neq l \end{cases} \tag{2.3}$$

gilt.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass die Standard-Brownsche-Bewegung ein Martingal ist und ihre quadratischen Variationen/Kovariationen die Bedingung (2.3) erfüllen. Sei $X = (X^1, \dots, X^d)$ also ein lokales Martingal mit (2.3). Wegen $\Delta[X^k, X^k] = (\Delta X^k)^2$ folgt, dass X stetig sein muss. Für festes $u \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Funktion $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \mapsto f(x_1, \dots, x_n, t) := \exp\left(iu^\top x + \frac{u^\top u}{2} t\right)$, wobei $i = \sqrt{-1}$, und wenden auf den (komplexwertigen) Prozess $Z_t := f(X_t^1, \dots, X_t^n, t)$ die Itô-Formel an, was

$$\begin{aligned}
Z_t &= Z_0 + \sum_{k=1}^n \int_0^t \partial_k f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, dX_s^k + \int_0^t \partial_{n+1} f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq l,k \leq n} \int_0^t \partial_{kl} f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, d[X^k, X^l]_s \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \int_0^t iu_k f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, dX_s^k + \frac{u^\top u}{2} \int_0^t f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^t (iu_k)^2 f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, d[X^k, X^k]_s \\
&= 1 + i \sum_{k=1}^n \int_0^t u_k f(X_s^1, \dots, X_s^n, s)\, dX_s^k, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

ergibt. Da X ein lokales Martingal ist, ist Z als Integral nach einem lokalen Martingal auch ein lokales Martingal. Aus der Beschränktheit von Z auf kompakten Zeitintervallen (man beachte, dass X reellwertig ist) folgt, dass Z ein Martingal ist (folgt aus Lemma 1.37), d.h.

$$E\left(\exp\left(iu^\top X_t + \frac{u^\top u}{2} t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left(iu^\top X_s + \frac{u^\top u}{2} s\right), \quad \forall s \leq t < \infty$$

und damit

$$E\left(\exp(iu^\top (X_t - X_s)) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left(-\frac{u^\top u}{2}(t-s)\right), \quad \forall s \leq t < \infty. \tag{2.4}$$

Sei Y eine $\mathcal{F}_s$-messbare Zufallsvariable. Für die charakteristische Funktion des

Vektors $(X^1, \dots, X^d, Y)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
E\left(\exp(iu^\top(X_t - X_s) + ivY)\right) &= E\left(\exp(ivY)E\left(\exp(iu^\top(X_t - X_s)) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&\overset{(2.4)}{=} E\left(\exp(ivY)\exp\left(-\frac{u^\top u}{2}(t-s)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{u^\top u}{2}(t-s)\right) E\left(\exp(ivY)\right), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Damit ist $X_t - X_s$ stochastisch unabhängig von jeder $\mathcal{F}_s$-messbaren Zufallsvariable Y und somit von der σ-Algebra $\mathcal{F}_s$. Da zudem $\exp\left(-\frac{u^\top u}{2}(t-s)\right)$ die charakteristische Funktion einer n-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $(0, \dots, 0)$ und Varianz/Kovarianz-Matrix $(t-s)I$ ist, folgt $(X_t - X_s) \sim \mathcal{N}((0, \dots, 0), (t-s)I)$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Damit folgt die Behauptung. □

Wir werden hier nur einen ,,Beweis mit Lücke" für Theorem 2.2 vorstellen, der jedoch die wesentliche Idee des vollständigen Beweises bereits vermittelt. Die Lücke kann mit recht technischeren Argumenten, die sich z.B. auf den Seiten 183 und 184 in Karatzas und Shreve [9] finden, geschlossen werden.

Beweis mit Lücke für Theorem 2.2. Sei o.B.d.A. $M_0 = 0$.

Schritt 1. Jedes lokale Martingal bzgl. der von einer Brownschen Bewegung erzeugten Filtration $\mathbb{F}^B := (\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$ ist stetig (ohne Beweis).

Schritt 2. Wegen der Stetigkeit ist M auch lokal beschränkt. Da jedes beschränkte Martingal ein quadratintegrierbares Martingal ist, ist M ein *lokal quadratintegrierbares* Martingal. Wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ die quadratintegrierbaren Martingale M^{T_m} darstellbar im Sinne von (2.2) sind, dann ist auch M darstellbar. Nehme dazu an, für die quadratintegrierbaren Martingale M^{T_m} gilt

$$M^{T_m} = \varphi^m \bullet B, \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für alle $m_1 \leq m_2$ folgt

$$(\varphi^{m_2} \bullet B)^{T_{m_1}} = (M^{T_{m_2}})^{T_{m_1}} = M^{T_{m_1}} = \varphi^{m_1} \bullet B, \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit.}$$

Es folgt

$$M = \varphi \bullet B, \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit}, \quad \text{wobei } \varphi := \textstyle\sum_{m=1}^\infty \varphi^m 1_{]\!]T_{m-1}, T_m]\!]}.$$

Damit kann o.B.d.A. angenommen werden, dass M ein echtes quadratintegrierbares Martingal ist, d.h. M ist ein echtes Martingal mit $E(M_T^2) < \infty$.

Schritt 3: Der Beweis des Martingaldarstellungsatzes beruht nun auf einer Projektion der Menge aller (reellwertigen) quadratintegrierbaren Martingale mit Startwert 0 auf den

Unterraum der (reellwertigen) quadratintegrierbaren Martingale, die sich als ein stochastisches Integral nach einer Brownschen Bewegung schreiben lassen, d.h.

$$U := \{H \bullet B \,|H \in L^2(B)\},$$

wobei

$$L^2(B) := \left\{ H \mid H \ \mathbb{R}^n\text{-wertiger vorhersehbarer Prozess mit } E\left(\int_0^T ||H_t||_2^2 \, dt\right) < \infty \right\}.$$

Mit Proposition 1.24 gilt $L^2(B) \subset L^2_{\text{loc}}(B) \subset L(B)$. Zudem gilt

$$\left[\sum_{k=1}^n H^k \bullet B^k, \sum_{l=1}^n H^l \bullet B^l\right]_T = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n H^k H^l \bullet [B^k, B^l]_T \overset{\text{Proposition 2.4}}{=} \sum_{k=1}^n \int_0^T (H_t^k)^2 \, dt$$

und damit die mehrdimensionale Itô-Isometrie

$$E((H \bullet B_T)^2) = E\left(\left(\sum_{k=1}^n H^k \bullet B^k\right)^2\right) = E\left(\int_0^T \underbrace{(H_t^1)^2 + \ldots + (H_t^n)^2}_{=||H_t||_2^2} dt\right) \tag{2.5}$$

für alle $H \in L^2(B)$. Die Projektion wird bzgl. des Skalarprodukt

$$(M, N) := E(M_T N_T) \tag{2.6}$$

auf der Menge der quadratintegrierbaren Martingale (mit Startwert 0) gebildet. Da der Raum $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}, P \otimes \lambda)$ vollständig ist (wobei λ das Lebesgue-Maß auf $[0,T]$ bezeichnet), folgt aus (2.5) die Abgeschlossenheit des Unterraums U bzgl. als Norm $||M|| := \sqrt{(M, M)}$.

Durch Projektion auf U zerlegt man M also in ein stochastisches Integral und einen orthogonalen Anteil, d.h.

$$M = \widehat{H} \bullet B + N \quad \text{Kunita-Watanabe Zerlegung}$$

mit $\widehat{H} \in L^2(B)$ und N quadratintegrierbares Martingal mit

$$E((M_T - \widehat{H} \bullet B_T)^2) = \inf_{H \in L^2(B)} E((M_T - H \bullet B_T)^2)$$

und

$$E((H \bullet B_T) N_T) = 0 \text{ für alle } H \in L^2(B) \tag{2.7}$$

Durch Benutzung von Schritt 1 und einer weiteren Lokalisierung erreicht man, dass o.B.d.A. $||N_T||_{L^\infty} < \infty$. Es gilt nämlich für alle Stoppzeiten T_n und $H \in L^2(B)$, dass auch $H 1_{[\![0,T_n]\!]} \in L^2(B)$ und aus (2.7) folgt

$$E((H \bullet B_{T_n}) N_{T_n}) = E((H \bullet B_{T_n}) N_T) = E((H 1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet B_T) N_T) = 0.$$

Also kann o.B.d.A. $||N_T||_{L^\infty} < \infty$ angenommen werden. Wähle ein ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{||N_T||_{L^\infty}}$ und definiere ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$Q(A) := E_P(1_A(1 + \varepsilon N_T)), \quad \forall A \in \mathcal{F}_T^B.$$

Beachte, dass $E_P(N_T) = E_P(M_T) - E_P(H \bullet B_T) = 0$. Seien $0 \leq s \leq t \leq T$ und $A \in \mathcal{F}_s^B$. Aus (2.7) und der Wahl von $H^i = 1_{A\times(s,t]}$, und $H^j = 0$ für $j \neq i$ folgt

$$E_Q(1_A(B_t^i - B_s^i)) = E_P(1_A(B_t^i - B_s^i)) + \varepsilon E_P(1_A(B_t^i - B_s^i)N_T) = 0 + 0 = 0,$$

d.h. B^i, $i = 1, \ldots, n$, sind auch $(Q, \mathbb{F}^B)$-Martingale. Damit folgt aus Theorem 2.5, dass B eine Q-Standard-Brownsche Bewegung ist (Beachte, dass der vektorwertige Prozess B auch unter Q die quadratische Variation $[B^i, B^i]_t = t$ bzw. $[B^i, B^j]_t = 0$ für $i \neq j$ hat). Damit stimmen die endlich-dimensionalen Randverteilungen von B unter P und unter Q miteinander überein. Es folgt

$$Q|_{\mathcal{F}_T^B} = P|_{\mathcal{F}_T^B}$$

und damit $P(N_T = 0) = 1$. Da N ein Martingal ist, folgt $P(N_t = 0) = 1$ für alle $t \leq T$ und wegen Rechtsstetigkeit der Pfade $P(N_t = 0, \ \forall t \in [0,T]) = 1$. Damit gilt $M = \widehat{H} \bullet B$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Der vollständige Beweis kann nicht benutzen, dass N lokal beschränkt ist, was das Argument mit dem Maßwechsel kaputtmacht. Stattdessen wird (2.7) auf geeignet beschränkte Integranden H angewandt, was dann auch $N = 0$ liefert (siehe Seiten 183 und 184 in Karatzas und Shreve [9]).

Wir kommen jetzt wieder auf das Black-Scholes Modell zurück, das das wichtigste vollständige Finanzmarktmodell ist. Sei also

$$S_t^0 = \exp(rt), \quad t \in [0,T], \ r \in \mathbb{R}$$

und

$$S_t^1 = \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \quad t \in [0,T], \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma \in \mathbb{R}_+$$

und Q das eindeutige äquivalente Martingalmaß , wobei

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} B_T - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} T\right)$$

(vgl. [10]). D.h. der Prozess $\widetilde{B}_t := B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ ist ein Q-Martingal und es gilt

$$\widehat{S}_t^1 = \exp\left(\sigma \widetilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right), \quad t \in [0,T]$$

bzw.

$$d\widehat{S}_t^1 = \sigma \widehat{S}_t^1 \, d\widetilde{B}_t \tag{2.8}$$

Interpretation: Im Fall $\mu > r$ werden die für $B_t - B_s$ bzw. $S_t^1 - S_s^1$, $s \leq t$, günstigen Ereignisse unter Q schwächer gewichtet als unter dem ursprünglichen Maß P.

Sei $H \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T^B, Q)$ ein beliebiger Claim und $\widehat{H} = \frac{H}{\exp(rT)}$.

Wendet man Theorem 2.2 "unter Q" auf die Q-Standard-Brownsche Bewegung $\widetilde{B}$ und das Q-Martingal $t \mapsto E_Q(\widehat{H}|\mathcal{F}_t)$ an, so erhält man

$$E_Q(\widehat{H} \mid \mathcal{F}_t^B) = v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet \widetilde{B}_t,$$

mit $v_0 = E_Q(\widehat{H})$ und einem vorhersehbaren Prozess $\widetilde{\varphi}$[‖]. Und damit wegen (2.8)

$$v_0 + \frac{\widetilde{\varphi}}{\widehat{S}^1 \sigma} \bullet \widehat{S}_t^1 = v_0 + \frac{\widetilde{\varphi}}{\widehat{S}^1 \sigma} \bullet \left(\sigma \widehat{S}^1 \bullet \widetilde{B}\right)_t = v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet \widetilde{B}_t. \tag{2.9}$$

$$\varphi := \frac{\widetilde{\varphi}}{\widehat{S}^1 \sigma}$$

ist somit die Hedging-Strategie im Modell mit einer geometrischen Brownschen Bewegung. Obige Rechnung zeigt, dass die Handelsmöglichkeiten in einem Modell mit einer Brownschen Bewegung und einer geometrischen Brownschen Bewegung gleich sind.

In der Regel kennt man zu einem vorgegebenen Claim H zunächst den replizierenden Vermögensprozess V (durch die Bedingung $\widehat{V}_t = E_Q(\widehat{H} \mid \mathcal{F}_t)$). Die Hedging-Strategie lässt sich dann durch folgenden Ansatz gewinnen. Sei

$$\widehat{V} = \widehat{v}_0 + \varphi^1 \bullet \widehat{S}^1.$$

Es gilt

$$[\widehat{V}, \widehat{S}^1] = [\varphi^1 \bullet \widehat{S}^1, \widehat{S}^1] = \varphi^1 \bullet [\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]$$

$[\widehat{V}, \widehat{S}^1]$ und $[\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]$ sind càdlàg Prozesse von endlicher Variation und lassen sich damit ω-weise mit (signierten) Maßen auf $[0, T]$ identifizieren. φ^1 ist die Radon-Nikodym Dichte von $[\widehat{V}, \widehat{S}^1]$ bzgl. $[\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]$, also

$$\varphi_t^1 = \frac{d[\widehat{V}, \widehat{S}^1]}{d[\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]}\Big|_t. \tag{2.10}$$

Im Fall, dass sich $V_t = E_Q(\widehat{H} \mid \mathcal{F}_t)$ schreiben lässt als $V_t = f(\widehat{S}_t^1, t)$ für eine glatte Funktion f (z.B. Plain-Vanilla Optionen), folgt wegen

$$f(\widehat{S}_t^1, t) = f(\widehat{S}_0^1, 0) + \partial_1 f(\widehat{S}^1, \cdot) \bullet \widehat{S}_t^1 + \partial_2 f(\widehat{S}^1, \cdot) \bullet \mathrm{Id}_t + \frac{1}{2} \partial_{11} f(\widehat{S}^1, \cdot) \bullet [\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]_t$$

[‖] Die Itô-Isometrie (1.5) überträgt sich auf alle vorhersehbaren Prozesse $\widetilde{\varphi}$ mit $E(\widetilde{\varphi}^2 \bullet [B, B]) < \infty$. Also gilt $E(\varphi' \bullet B_T - \widetilde{\varphi} \bullet B_T)^2 = E((\varphi' - \widetilde{\varphi}) \bullet B_T)^2 = E(\int_0^T (\varphi' - \widetilde{\varphi})^2 \, dt)$. Daraus folgt, dass die Hedgingstrategie $\widetilde{\varphi}$ bis auf eine Nullmenge bzgl. des Maßes $P \otimes \lambda$ auf $\Omega \times [0, T]$ eindeutig ist, wobei λ das Lebesguemaß auf $[0, T]$ bezeichne.

(Itô-Formel) eingesetzt für $\widehat{V}$ in (2.10), dass

$$[\widehat{V}, \widehat{S}^1] = [\partial_1 f(\widehat{S}^1, \cdot) \bullet \widehat{S}^1, \widehat{S}^1] + 0 + 0 = \partial_1 f(\widehat{S}^1, \cdot) \bullet [\widehat{S}^1, \widehat{S}^1]$$

und damit

$$\varphi_t^1 = \partial_1 f(\widehat{S}_t^1, t).$$

2.1 Exotische Optionen

Sogenannte Plain-Vanilla Optionen, deren Auszahlung nur vom *Endwert* des Basiswertpapiers abhängt, haben wir bereits in [10] kennengelernt. Nun werden wir uns sog. pfadabhängigen (exotische) Optionen ("Exoten") europäischen Typs zuwenden, deren Auszahlung H nicht nur vom Kurs des Basiswertpapiers zum Fälligkeitszeitpunkt T abhängt (d.h. von S_T^1), sondern in die der gesamte Pfad $t \mapsto S_t^1$ eingehen kann. Exotisch bedeutet nicht, dass diese Optionen nur selten gehandelt werden ! In diesem Abschnitt werden wir pfadabhängige Optionen behandeln, deren Auszahlung vom Endwert und vom pfadweisen Maximum des Basiswertpapiers abhängt.

Wichtige Beispiele sind **Barriere Optionen**:
Sei $S = S^1$ und $K > S_0$, d.h. die Option startet "out of the money"

$$H = (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{t\in[0,T]} S_t > L\}} \qquad \textbf{"Down and out call"}$$

mit $0 < L < S_0 < K$.

$$H = (S_T - K)^+ 1_{\{\max_{t\in[0,T]} S_t < L\}} \qquad \textit{"Up and out call"}$$

mit $0 < S_0 < K < L$.

$$H = (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{t\in[0,T]} S_t < L\}} \qquad \textit{"Down and in call"}$$

mit $0 < L < S_0 < K$.

$$H = (S_T - K)^+ 1_{\{\max_{t\in[0,T]} S_t > L\}} \qquad \textit{"Up and in call"}$$

mit $0 < S_0 < K < L$.

Bzw. die entsprechenden Puts. Insgesamt gibt es also 8 Varianten. Da die Barrier-Bedingung die Auszahlung der Option echt einschränken, aber andererseits eine positive Auszahlung nicht gänzlich unmöglich machen soll, ist die Festlegung, ob $L < K$ oder $L > K$ jeweils kanonisch.

Häufig emittierte Produkte sind auch sogenannte **Bonuszertifikate**

$$H = (S_T \vee K) 1_{\{S_t > L,\ \forall t \in [0,T]\}} + S_T 1_{\{S_t \leq L,\ \text{für ein}\ t \in [0,T]\}}, \quad L < \min\{S_0, K\},$$

oder sogenannte **Hebelzertifikate**

$$H = S_T 1_{\{S_t > L,\ \forall t \in [0,T]\}}, \quad L < S_0.$$

L wird Barriere und K Bonusgrenze genannt. Rechtlich sind Zertifikate Schuldverschreibungen. Neben der Analyse von S_T und $\min_{t \in [0,T]} S_t$ ist noch das Ausfallrisiko des Emittenten zu beachten (siehe Lehman-Zertifikate).

Des weiteren passen in den mathematischen Rahmen dieses Abschnitts sog. **Lookback-Optionen**

$$H = S_T - \min_{t \in [0,T]} S_t \qquad \textit{“Lookback call”}$$

$$H = \max_{t \in [0,T]} S_t - S_T \qquad \textit{“Lookback put”}$$

$$H = \left(\max_{t \in [0,T]} S_t - K \right)^+ \qquad \textit{“Forward lookback call”}$$

$$H = \left(K - \min_{t \in [0,T]} S_t \right)^+ \qquad \textit{“Forward lookback put”}$$

und auch *One-touch Optionen*

$$H = 1_{\left\{S_t = L \quad \text{für ein } t \in [0,T]\right\}}.$$

Mathematisches Hilfsmittel ist das *Spiegelungsprinzip* für die Brownsche Bewegung. Um im Black-Scholes Modell den fairen Preis $E_Q(e^{-rT} H)$ für obige Claims H zu bestimmen, reicht es aus, die gemeinsame Verteilung des Endwertes einer Brownschen Bewegung und ihres pfadweisen Maximums (bzw. Minimums) zu berechnen, d.h. die Verteilung von (B_T, M_T), wobei

$$M_T := \max_{t \in [0,T]} B_t.$$

Theorem 2.6 (Spiegelungsprinzip)**.**

$$\begin{aligned} P(M_T > m, B_T \leq b) &= P(B_T > 2m - b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{2m-b}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2T} \right) dx, \quad \forall m > 0, b < m. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Durch Ableiten von (2.11) nach m und b ergibt sich, dass das Bildmaß $P_{(M_T,B_T)}$ auf $\mathbb{R}^2$ absolutstetig bzgl. des zweidimensionalen Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^2$ ist, mit Dichte

$$(m,b) \mapsto 1(m>0,\ b<m)\frac{2(2m-b)}{\sqrt{2\pi T^3}}\exp\left(-\frac{(2m-b)^2}{2T}\right).$$

Schreibweise für diesen Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
&P(M_T \in dm, B_T \in db)\\
&= -\frac{\partial^2}{\partial m \partial b}\left(\int_{2m-b}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)dx\right)dm\,db\\
&= \frac{2(2m-b)}{\sqrt{2\pi T^3}}\exp\left(-\frac{(2m-b)^2}{2T}\right)dm\,db \quad \forall m>0, b<m. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Beweis von (2.11). Sei $m>0$, $b<m$. Definiere $\tau_m := \inf\{t \geq 0 \mid B_t \geq m\}$. Es gilt $\{\tau_m \leq T\} = \{M_T \geq m\}$. Betrachte nun den zur Stoppzeit τ_m neu gestarteten Prozess

$$B' := (B_{\tau_m+u} - B_{\tau_m})_{u\geq 0}$$

(man beachte, dass $P(\tau_m < \infty) = 1$). Wir wollen zeigen, dass B' eine Standard-Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}^B_{\tau_m+u})_{u\geq 0}$ ist. Dies beinhaltet, dass B' stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}^B_{\tau_m}$ ist. Dazu zeige man mit dem Optional Sampling Theorem, dass B' ein $(\mathcal{F}^B_{\tau_m+u})_{u\geq 0}$-Martingal ist und wende dann Lévy's Theorem an.

Es folgt

$$\begin{aligned}
P(\tau_m \leq T,\ B_T \leq b) &= P(\tau_m \leq T,\ B'_{T-\tau_m} \leq b-m)\\
&= P(\tau_m \leq T,\ B'_{T-\tau_m} > m-b)\\
&= P(\tau_m \leq T,\ B_T > 2m-b), \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

wobei in die zweite Gleichheit die stochastische Unabhängigkeit von B' und $T-\tau_m$ eingeht (was es erlaubt, die Symmetrie der Normalverteilung auszunutzen) sowie $m-b \neq 0$. Beachte, dass das Ereignis $\{B_T > 2m-b\}$ nur eintreten kann, wenn auch $\{M_T \geq m\}$ eintritt, also

$$\{B_T > 2m-b\} \subset \{\tau_m \leq T\}. \qquad (2.14)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
P(M_T \geq m, B_T \leq b) &= P(\tau_m \leq T, B_T \leq b)\\
&\overset{(2.13)}{=} P(\tau_m \leq T, B_T > 2m-b)\\
&\overset{(2.14)}{=} P(B_T > 2m-b)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{2m-b}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)dx.
\end{aligned}$$

Nun sieht man auch, dass

$$P(M_T > m, B_T \leq b) = \lim_{\widetilde{m}\downarrow m} P(M_T \geq \widetilde{m}, B_T \leq b) = P(M_T \geq m, B_T \leq b)$$

und es folgt (2.11). □

Corollary 2.7. *Es gilt*

$$P(M_T > m) = 2P(B_T > m), \quad \forall m \geq 0.$$

Beweis. Lässt man in (2.11) m von oben gegen b gehen, so gilt diese Gleichheit wegen der σ-Additivität von P auch für $m = b$. Es folgt

$$P(M_T > m) = P(M_T > m,\ B_T > m) + P(M_T > m,\ B_T \leq m) = 2P(B_T > m).$$

□

Man beachte, dass der Beweis von Theorem 2.6 an der Driftlosigkeit von B hängt: egal wann B das Niveau m erreicht, sind zu diesem Zeitpunkt die Ereignisse $\{B_T \leq b\}$ und $\{B_T > 2m - b\}$ gleich wahrscheinlich.

Die entsprechende gemeinsame Verteilung für eine Brownsche Bewegung mit Drift ergibt sich aber nun aus Theorem 2.6 und dem Girsanov Theorem. Definiere dazu für ein $\theta \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{B}_t := B_t + \theta t, \quad t \geq 0,$$

für eine P-Standard-Brownische Bewegung B. $\widetilde{B}$ ist nun mit dem Theorem von Girsanov eine Standard-Brownsche Bewegung unter dem Maß $\widetilde{P}$, das durch

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \exp\left(-\theta B_T - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) = \exp\left(-\theta \widetilde{B}_T + \frac{1}{2}\theta^2 T\right)$$

definiert wird. Es folgt, dass

$$\frac{dP}{d\widetilde{P}} = \frac{1}{\frac{d\widetilde{P}}{dP}} = \exp\left(\theta \widetilde{B}_T - \frac{1}{2}\theta^2 T\right).$$

Sei $\widetilde{M}_T := \max_{t\in[0,T]} \widetilde{B}_t$. Mit dem Transformationssatz für Integrale ergibt sich für die Bildmaße $P_{(\widetilde{M}_T,\widetilde{B}_T)}$ und $\widetilde{P}_{(\widetilde{M}_T,\widetilde{B}_T)}$ die Dichte**

$$\begin{aligned}&\frac{dP_{(\widetilde{M}_T,\widetilde{B}_T)}}{d\widetilde{P}_{(\widetilde{M}_T,\widetilde{B}_T)}}(\widetilde{m},\widetilde{b}) \\ &= \exp\left(\theta\widetilde{b} - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \quad \text{für alle } \widetilde{m},\widetilde{b} \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

**Sei X eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable, $\widetilde{P}_X$ das Bildmaß von $\widetilde{P}$ unter X und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Dann besagt der Transformationssatz $E_{\widetilde{P}}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\,\widetilde{P}_X(dx)$. Sei nun $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Man wende den Satz auf $X = (\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)$ und die Funktion $g(\widetilde{m},\widetilde{b}) := 1_A(\widetilde{m},\widetilde{b}) \exp\left(\theta\widetilde{b} - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)$ an.

Die Lebesgue-Dichte beider Bildmaße verschwinden, wenn $\widetilde{m} < 0$ oder $\widetilde{b} > \widetilde{m}$. Für diese $(\widetilde{m}, \widetilde{b})$ könnte (2.15) beliebig gewählt werden. Nun wendet man (2.12) auf $\widetilde{B}$ unter $\widetilde{P}$ an, also

$$\begin{aligned} &\frac{d\widetilde{P}_{(\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)}}{d\lambda^2}(\widetilde{m}, \widetilde{b}) \\ &= \frac{2(2\widetilde{m} - \widetilde{b})}{\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(2\widetilde{m} - \widetilde{b})^2}{2T}\right) 1_{(\widetilde{m}>0,\ \widetilde{b}<\widetilde{m})}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei λ^2 das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aus (2.16) und (2.15) folgt

$$\begin{aligned} &\frac{dP_{(\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)}}{d\lambda^2}(\widetilde{m}, \widetilde{b}) \\ &= \frac{d\widetilde{P}_{(\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)}}{d\lambda^2}(\widetilde{m}, \widetilde{b}) \frac{dP_{(\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)}}{d\widetilde{P}_{(\widetilde{M}_T, \widetilde{B}_T)}}(\widetilde{m}, \widetilde{b}) \\ &= \frac{2(2\widetilde{m} - \widetilde{b})}{\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(2\widetilde{m} - \widetilde{b})^2}{2T}\right) \exp\left(\theta\widetilde{b} - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) 1_{(\widetilde{m}>0,\ \widetilde{b}<\widetilde{m})}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Wir fassen zusammen:

Theorem 2.8 (Spiegelungsprinzip'). *Sei B eine Brownsche Bewegung mit Volatilität $\sigma = 1$ und Drift $\theta \in \mathbb{R}$. Die gemeinsame Dichte von (M_T, B_T) ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} &P(M_T \in dm, B_T \in db) \\ &= \exp\left(\theta b - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \frac{2(2m - b)}{\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(2m - b)^2}{2T}\right) dm\, db, \quad \forall m > 0,\ b < m. \end{aligned}$$

Sei

$$m_T = \min_{t \in [0,T]} B_t$$

zur Brownschen Bewegung mit Drift θ aus Theorem 2.8. Es gilt $m_T = -\max_{t \in [0,T]}(-B_t)$ und $(-B_t)_{t \geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung mit Drift $-\theta$. Daher folgt aus Theorem 2.8 der folgender Satz für die gemeinsame Verteilung von (m_T, B_T):

Theorem 2.9 (Spiegelungsprinzip"). *Sei B eine Brownsche Bewegung mit Volatilität $\sigma = 1$ und Drift $\theta \in \mathbb{R}$. Die gemeinsame Dichte von (m_T, B_T) ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} &P(m_T \in dm, B_T \in db) \\ &= \exp\left(\theta b - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \frac{2(b - 2m)}{\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(b - 2m)^2}{2T}\right) dm\, db, \quad \forall m < 0,\ b > m. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$P(m_T \in dm, B_T \in db) = P(M_T^{(-B)} \in -dm, -B_T \in -db)$$

wobei $M_T^{(-B)} = \max_{t\in[0,T]}(-B_t)$. Da $-B$ eine Brownsche Bewegung mit Drift $-\theta$ ist folgt aus Theorem 2.8

$$\begin{aligned}
&P(m_T \in dm, B_T \in db) \\
&= P(M_T^{(-B)} \in -dm, -B_T \in -db) \\
&= \exp\left(\theta b - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \frac{2(b-2m)}{\sqrt{2\pi T^3}} \exp\left(-\frac{(b-2m)^2}{2T}\right) dm\, db, \quad \forall m < 0,\ b > m.
\end{aligned}$$

□

Mit den Theoremen 2.8 und 2.9 lassen sich alle aufgeführten Optionspreise berechnen. Wir geben exemplarisch den Preis für den Down-and-out-call an:

Theorem 2.10. *Sei $p^{\text{call}}(s_0, T, K)$ wie in [10] der Black-Scholes-Preis eines Plain-Vanilla Calls mit Strike K und Fälligkeit T, wenn das Basiswertpapier den Startpreis s_0 besitzt. Dann gilt für den Preis des Down-and-out-calls mit Barriere $L < s_0$*

$$e^{-rT} E_Q\left((S_T - K)^+ 1_{\{\min_{t\in[0,T]} S_t > L\}}\right) = p^{\text{call}}(s_0, T, K) - \underbrace{\left(\frac{L}{s_0}\right)^{\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}} p^{\text{call}}\left(\frac{L^2}{s_0}, T, K\right)}_{\textit{price of down and in call}}.$$

Sei $S_t = s_0 \exp\left(rt + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$, wobei B unter Q eine Standard-Brownsche Bewegung sei. Die Auszahlung $H = (S_T - K)^+ 1_{\{\inf_{t\in[0,T]} S_t > L\}}$ lässt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned}
H &= \left(s_0 \exp\left(rT + \sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - K\right)^+ 1_{\{\inf_{t\in[0,T]} s_0 \exp\left(rt + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) > L\}} \\
&= \left(s_0 \exp\left(\sigma\left(B_T + \frac{r}{\sigma}T - \frac{1}{2}\sigma T\right)\right) - K\right)^+ 1_{\{\inf_{t\in[0,T]}\left(B_t + \frac{r}{\sigma}t - \frac{1}{2}\sigma t\right) > \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{L}{s_0}\right)\}}.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert $E_Q(H)$ lässt sich nun auf die gemeinsame Verteilung des Endwertes einer Brownschen Bewegung **mit Driftrate** $\theta := \frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$ und ihrem pfadweisen Infimum zurückführen, da $H = h(\widetilde{B}_T, \widetilde{m}_T)$ mit $\widetilde{B}_t := B_t + \frac{r}{\sigma}t - \frac{1}{2}\sigma t$, $m_T := \inf_{t\in[0,T]} \widetilde{B}_t$ und einer geeigneten Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$.

Der Beweis von Theorem 2.10 folgt nun aus Theorem 2.9 nach vielen Umformungen. Siehe z.B. Abschnitt 9.6 in Musiela und Rutkowski [12]. Für den Spezialfall $r = 0$ liefert (2.21) eine alternative Herleitung.

2.1.1 Statisches Hedgen von Barriere Optionen

Es stellt sich die Frage, ob und ggf. wie Barriere Optionen (also Down/Up and out/in Calls/Puts) durch gewöhnliche Calls/Puts „statisch" repliziert werden können. Mit „statisch" ist gemeint, dass die Position der Standard-Option möglichst selten verändert werden muss, also etwa nur beim erstmaligen Überqueren der Barriere L. Die weniger liquiden Exoten könnten dann mit den liquideren Plain Vanillas relativ einfach (ohne ständiges Umschichten) repliziert werden. Wir geben hierzu im Spezialfall des Black-Scholes Modells mit risikolosem Zins $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eine positive Antwort. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Theorem.

Theorem 2.11. *Sei $S_t = s_0 \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$, wobei B unter dem Martingalmaß Q eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Seien $p^{\text{call}}(s_0, K)$ und $p^{\text{put}}(s_0, K)$ die Black-Scholes Preise für Calls und Puts in Abhängigkeit vom Startpreis s_0 der Aktie und vom Strike K. Es gilt*

$$p^{\text{call}}(s_0, K) = p^{\text{put}}(K, s_0) \qquad \textit{Put-Call-Symmetrie} \tag{2.18}$$

und

$$p^{\text{call}}(\alpha s_0, \alpha K) = \alpha p^{\text{call}}(s_0, K) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \qquad \textit{Homogenitätseigenschaft} \tag{2.19}$$

Beweis. Die Gültigkeit der Put-Call-Symmetrie verifiziert man sofort mit den Formeln für den Call- und Put-Black-Scholes-Preis im Fall $r = 0$. Alternativ kann man sie wie folgt beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}
E_Q((S_T - K)^+) &= E_Q\left(\left(s_0 \exp\left(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - K\right)^+\right) \\
&= E_Q\left(\exp\left(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\left(s_0 - K\exp\left(-\sigma B_T + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^+\right) \\
&= E_{\widetilde{Q}}\left(\left(s_0 - K\exp\left(-\sigma B_T + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^+\right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{d\widetilde{Q}}{dQ} = \exp\left(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right).$$

Mit Theorem 3.100 aus dem Skript [10] wissen wir, dass unter $\widetilde{Q}$ der Prozess B eine Brownsche Bewegung mit Driftrate σ ist. Damit besitzt $-\sigma B$ die Driftrate $-\sigma^2$ und es folgt die Put-Call-Symmetrie. Die Homogenitätseigenschaft folgt unmittelbar aus $p^{\text{call}}(s_0, K) = E_Q\left(\left(s_0 \exp\left(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) - K\right)^+\right)$.

$\square$

Betrachte nun einen **Down-and-in-call** mit $K > L$ und $s_0 > L$. Kaufe zur Absicherung K/L Standard-Puts mit Strike L^2/K.

Fall 1: Der Aktienpreis S bleibt bis T über der Barriere L. Dann verfällt der Down-and-in-call. Andererseits ist auch der Standard-Put mit Strike L^2/K wertlos, da $S_T > L$ und damit $L^2/K < S_T$ (beachte, dass $L < K$).

Fall 2: Der Aktienpreis S erreicht bis T die Barriere L. Zu dieser Stoppzeit verkaufe man die K/L Standard-Puts mit Strike L^2/K und kaufe sich dafür *einen* Standard-Call mit Strike K und halte diesen bis T. Theorem 2.11 und die Tatsache, dass zu der Stoppzeit der Aktienkurs L beträgt, liefern, dass die Umschichtung selbstfinanzierend ist, d.h.

$$\frac{K}{L} p^{\mathrm{put}} \left(L, \frac{L^2}{K} \right) \overset{(2.18)}{=} \frac{K}{L} p^{\mathrm{call}} \left(\frac{L^2}{K}, L \right) \overset{(2.19)}{=} p^{\mathrm{call}}(L, K). \tag{2.20}$$

Zum Zeitpunkt T hat man genau die Optionsauszahlung.

Da der Down-and-out-call ein Standard-Call minus ein Down-and-in-call ist, lässt sich für ersteren damit auch eine ,,statische" Absicherungsstrategie finden (kaufe zum Zeitpunkt 0 *einen* Standard-Call mit Strike K und shorte die K/L Standard-Puts mit Strike L^2/K, im Fall 2 wird die Position dann ohne Kosten aufgelöst).

Bemerkung 2.12. *Man beachte, dass obige Überlegung nur für $r = 0$ gilt und zudem am Black-Scholes-Modell hängt. Im Fall $r = 0$ und für $K = L$ (was aber weniger interessant ist) gilt obige Überlegung jedoch modellunabhängig. Die Gleichheit (2.20) ergibt sich für $L = K$ aus der modellunabhängigen Put-Call-Parität: Call − Put = Aktie − Strike*

Die Überlegungen dieses Abschnittes liefern auch eine heuristische Herleitung des arbitragefreien Preises aus Theorem 2.10 im Fall für $r = 0$ ohne Benutzung des Spiegelungsprinzips. Der arbitragefreie Preis sind die Kosten der Absicherung, also der Wert der K/L Puts mit Strike L^2/K zum Startzeitpunkt, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{K}{L} p^{\mathrm{put}} \left(s_0, T, \frac{L^2}{K} \right) &\overset{(2.18)}{=} \frac{K}{L} p^{\mathrm{call}} \left(\frac{L^2}{K}, T, s_0 \right) \\
&\overset{(2.19)}{=} \frac{K}{L} \frac{s_0}{K} p^{\mathrm{call}} \left(\frac{L^2}{s_0}, T, K \right) \\
&= \left(\frac{L}{s_0} \right)^{-1} p^{\mathrm{call}} \left(\frac{L^2}{s_0}, T, K \right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Den Anforderungen an einen mathematischen Beweis genügt das obige Hedging-Argument aber natürlich nicht.

3 Wertpapiere mit Dividenden

Bislang haben wir angenommen, dass Wertpapiere keine Dividenden ausschütten. Dies hat die Darstellung vereinfacht, ist aber natürlich nicht realistisch. Zudem kann man Futures, die wir in diesem Kapitel behandeln wollen, als spezielle Wertpapiere mit Dividendenausschüttungen betrachten. Daher werden wir das Modell um Dividenden erweitern.

Gegeben seien die Wertpapierpreisprozesse $(S^0, S^1, \dots, S^d)$ mit den dazugehörigen **kumulativen Dividendenprozessen** $(D^0, D^1, \dots, D^d)$. Wie S^i sollen auch D^i Semimartingale sein. D^i_t steht für die kumulativen Dividendenausschüttungen pro Aktie des Typs i bis einschließlich zum Zeitpunkt t. Wir setzen keine Monotonie voraus, d.h. Ausschüttungen dürfen auch negativ sein (Zuschüttung). Wichtig werden Dividendenprozesse mit möglicherweise negativen Zuwächsen bei der Analyse von Futures.

Definition 3.1. *Eine Handelsstratgie ist wie gehabt eine $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersehbarer Prozess $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$. Der Vermögensprozess des Portfolios ist gegeben als*

$$V_t(\varphi) := \sum_{i=0}^{d} \varphi^i_t (S^i_t + \Delta D^i_t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

Eine Handelsstrategie φ heißt selbstfinanzierend, falls

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet (S + D)_t, \quad t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.2. *φ^i_t ist die Anzahl der Wertpapiere vom Typ i, die die Agentin zwischen $t-$ und t im Portfolio hält (also die Investition in den Sprung ΔS^i_t). Die Sprünge ΔS^i_t und ΔD^i_t sollte man sich als synchron vorstellen.*

- *S^i_t ist der Preis* **ex Dividende***, also der Preis nach Zahlung der Dividende in t.*
- *Im Gegensatz dazu ist S_{t-} der Preis* **cum Dividende***. Beim Kauf der Aktie zu diesem Preis bekommt man also noch die Dividende.*
- *In der Realität wird der Tag einer Dividendenzahlung vorher angekündigt (und ist zumeist einen Tag nach der Hauptversammlung). Dividendenberechtigt sind dann die Investoren, die die Aktien zum Handelsschluss des Vortages der Auszahlung besitzen.*

Typischerweise ist die Auschüttung ΔD^i_t „vorhersehbar", weil sie vom Vorstand vorher beschlossen wurde. Man kann dann erwarten, dass der Aktienkurs eine gegenläufige Bewegung macht, also

$$\Delta S^i_t + \Delta D^i_t = 0. \tag{3.3}$$

Es kann somit niemand davon profitieren, die Aktie unmittelbar vor der Dividendenausschüttung zu kaufen, die Dividende einzustreichen und danach sofort wieder zu verkaufen. Wir setzen (3.3) jedoch nicht voraus, da am Ex-Dividende-Tag neue (positive oder negative) Informationen am Markt sein können und den Preis beeinflussen. Eine schwächere Voraussetzung als (3.3) wäre die folgende No-Arbitrage Bedingung: $\nexists A \in \mathcal{F}_{t-}$ mit

$$P(A \cap \{\Delta S^i_t + \Delta D^i_t < 0\}) = 0 \quad \textit{und} \quad P(A \cap \{\Delta S^i_t + \Delta D^i_t > 0\}) > 0$$

oder

$$P(A \cap \{\Delta S^i_t + \Delta D^i_t > 0\}) = 0 \quad \textit{und} \quad P(A \cap \{\Delta S^i_t + \Delta D^i_t < 0\}) > 0.$$

Die Dividendenausschüttung für die Agentin zum Zeitpunkt t beträgt somit $\sum_{i=0}^d \varphi_t^i \Delta D_t^i$. *Diese wird nun „unmittelbar nach t" in die d + 1 Wertpapiere investiert. Wie bisher auch gibt es also* **keine dauerhafte Kassenhaltung**. *Deshalb erscheint in (3.1) nur* ΔD *und nicht* D. **Man beachte jedoch, dass die Wiederanlage der Dividendenausschüttung ΔD_t in die Wertpapiere noch nicht in die Anzahlen φ_t eingehen kann, da diese ja bereits das Investment zwischen $t-$ und t bezeichnen. Daher müssen die Auszahlungen in (3.1) gesondert eingehen.**

Bemerkung 3.3. *Wie im Falle ohne Dividenden ließe sich die Selbstfinanzierungsbedingung wieder durch eine diskrete Approximation motivieren. Sei im diskreten Modell* φ_n^i *die Anzahl der Wertpapiere, die zwischen* $n-1$ *und* n *gehalten werden (also nach dem Zuwachs* $S_{n-1}^i - S_{n-2}^i$*). Da die in* $n-1$ *angefallenen Dividenden* $\sum_{i=0}^d \varphi_{n-1}^i \Delta D_{n-1}^i$, *wobei* $\Delta D_{n-1}^i = D_{n-1}^i - D_{n-2}^i$, *noch reinvestiert werden müssen, lautet die Selbstfinanzierungsbedingung*

$$\sum_{i=0}^d \varphi_{n-1}^i (S_{n-1}^i + \Delta D_{n-1}^i) = \sum_{i=0}^d \varphi_n^i S_{n-1}^i, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

Die rechte Seite lässt sich zu

$$\sum_{i=0}^d \varphi_n^i \left(S_n^i + \Delta D_n^i\right) - \sum_{i=0}^d \varphi_n^i \left(S_n^i - S_{n-1}^i + \Delta D_n^i\right)$$

umformen und die linke Seite ist das Vermögen im zeitdiskreten Modell zum Zeitpunkt $n-1$. *Damit ist (3.4) äquivalent zu*

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^d \varphi_n^i \left(S_n^i + \Delta D_n^i\right)\\ &= \sum_{i=0}^d \varphi_{n-1}^i \left(S_{n-1}^i + \Delta D_{n-1}^i\right) + \sum_{i=0}^d \varphi_n^i \left(\Delta S_n^i + \Delta D_n^i\right), \quad n = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{3.5}$$

und (3.5) ist der zeitdiskrete Spezialfall von Bedingung (3.2).

Von nun an setzen wir voraus, dass S^0 vorhersehbar ist.

Diese Annahme wird später bei der Analyse von Futures essentiell sein. Für die folgende Definition ist sie nur bequem, da damit $\frac{1}{S^0} \in L(X)$ für jedes Semimartingal X (aus der Vorhersehbarkeit und der Bedingung $P(\inf_{t\in[0,T]} S_t^0 > 0) = 1$ an das Numeraire S^0 folgt mit Bemerkung 1.1, dass der Prozess $\frac{1}{S^0}$ lokal beschränkt ist).

Definition 3.4. *Mit*

$$\widehat{D}^i := \frac{1}{S^0} \bullet D^i, \quad i = 0, \ldots, d. \tag{3.6}$$

bezeichnen wir die **diskontierten Dividendenprozesse**. *Ferner heißt wie gehabt*

$$\widehat{V}(\varphi) := \frac{1}{S^0} V(\varphi) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i (\widehat{S}^i + \Delta \widehat{D}^i)$$

diskontierter Vermögensprozess. Beachte, dass $\Delta \widehat{D}^i = \frac{1}{S^0} \Delta D^i$.

Definition (3.6) trägt der Tatsache Rechnung, dass die Zuwächse von D zu verschiedenen Zeitpunkten ausgezahlt werden.

Der Übergang zu diskontierten Größen funktioniert analog zu Theorem 1.30 auch für den Fall mit Dividenden:

Theorem 3.5. *Wir setzen voraus, dass*

$$[S^0, D^i]^c = 0 \quad i = 0, \dots, d. \tag{3.7}$$

Sei $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *eine Handelsstrategie und* V *der dazugehörige Vermögensprozess.* φ *ist genau dann selbstfinanzierend zum Startkapital* v_0*, wenn*

$$\widehat{V}_t(\varphi) = \widehat{v}_0 + \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \bullet (\widehat{S}^i + \widehat{D}^i)_t, \quad t \in [0, T], \tag{3.8}$$

wobei $\widehat{v}_0 := \frac{v_0}{N_0}$.

Die Rechnungen im Beweis von Theorem 1.30 ergeben, dass die Zusatzbedingung (3.7) erforderlich ist. Man beachte, dass der stetige Anteil der quadratischen Kovariation in zeitdiskreten Modellen sowieso verschwindet, so dass (3.7) hier nicht gefordert werden muss.

Von nun an setzen wir voraus, dass $D^0 = 0$**.**

Wie im Fall ohne Dividenden, siehe (1.22), kann $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ frei gewählt werden. Der Prozess φ^0 ergibt sich dann eindeutig aus der Selbstfinanzierungbedingung. Da $\widehat{S}^0 + \widehat{D}^0 = 1$ kommt die nullte Komponente auf der rechten Seite von (3.8) nicht mehr vor. Die Bedingung $D^0 = 0$ ist also erforderlich, um weiterhin zu gewährleisten, dass mit S^0 keine Gewinne gemacht werden.

Definition 3.6. *Ein ÄMM im Modell mit Dividenden ist ein Wahrscheinlichkeitmaß* $Q \sim P$ *gibt, so dass* $\widehat{S}^i + \widehat{D}^i$, $i = 1, \dots, d$, *Q-lokale Martingale sind.*

Da die Vermögensprozesse die gleiche Form wie im Fall ohne Dividenden haben, müssen wir nur $\widehat{S}^i$ durch $\widehat{S}^i + \widehat{D}^i$ ersetzen und es ergibt sich sofort ein Analogon zum Satz 1.42.

Theorem 3.7. *[FTAP (Delbaen/Schachermayer) with dividents] Der Markt erfüllt genau dann (NFLVR), wenn es ein ÄMM gibt.*

Beispiel 3.8. *Nehme an, eine Aktiengesellschaft zahlt eine zeitkontinuierliche Dividende mit Rate $S_t\delta$ pro Aktie aus, wobei $\delta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Also $D_t = \delta \int_0^t S_u \, du$. Unter einem Martingalmaß Q ist dann nicht mehr der diskontierte Preisprozess $e^{-rt}S_t$ ein Martingal sondern der Prozess $e^{-rt}S_t + \delta \int_0^t e^{-ru} S_u \, du$.*

Beispiel 3.9 (Tracker-Zertifikat). *Bei einem Tracker-Zertifikat auf eine Aktie werden die Dividendenausschüttungen der Aktie automatisch in neue Aktien desselben Unternehmens angelegt. Die Einbehaltung von Gewinnen nennt man auch* **Thesaurierung**. *Startet das Zertifikat mit einer Aktie (bzw. dem Wert S_0), dann besteht in Beispiel 3.8 das replizierende Portfolio zum Zeitpunkt t aus $\varphi_t := \exp(\delta t)$ Aktien. Hierzu zeigen wir, dass die Strategie $(0, \varphi)$ die Selbstfinanzierungsbedingung (3.2) erfüllt. Mit der endlichen Variation von $t \mapsto \exp(\delta t)$ und "Integration by parts" folgt nämlich*

$$\begin{aligned}
\exp(\delta t) S_t \quad &\overset{[\varphi, S]=0}{=} \quad S_0 + \int_0^t \exp(\delta u) \, dS_u + \underbrace{\delta \int_0^t S_u \exp(\delta u) \, du}_{=\int_0^t S_u \, d\varphi_u} \\
&= \quad S_0 + \int_0^t \exp(\delta u) \, d(S + D)_u. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Alternativ zeigt man, dass $\varphi_t = \exp(\delta t)$ die Differentialgleichung

$$\varphi' = \delta \varphi \quad \mathit{mit} \quad \varphi_0 = 1$$

erfüllt und mit der Dividendenzahlung $\delta \varphi_t S_t \, dt$ der Zukauf von $\delta \varphi_t \, dt = \varphi_t' \, dt$ Aktien finanziert werden kann.

Der mit $\exp(rt)$ diskontierte Wert des Zertifikats beträgt

$$\widetilde{S}_t := e^{(\delta - r)t} S_t.$$

Mit Theorem 3.5 folgt die äquivalente Selbstfinanzierungsbedingung für $(0, \varphi)$

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + \int_0^t \exp(\delta u) \, d(\widehat{S} + \widehat{D})_u. \qquad (3.10)$$

Aus (3.10) folgt, dass für ein Maß Q der Prozess $\widehat{S} + \widehat{D}$ genau dann ein Q-lokales Martingal ist, wenn der Prozess $\widetilde{S}$ ein Q-lokales Martingal ist (Integrale von lokal beschränkten Integranden nach lokalen Martingalen sind lokale Martingale und aus (3.10) folgt auch $\widehat{S}_t + \widehat{D}_t = \widehat{S}_0 + \widehat{D}_0 + \int_0^t e^{-\delta u} \, d\widetilde{S}_u$). Wir setzen nun voraus, dass sich die Aktie auch im Modell mit Dividenden wie eine geometrische Brownsche Bewegung (Black-Scholes Modell) verhält, also

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Dann gilt

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left((\mu + \delta - r)t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Das eindeutige Martingalmaß Q im Black-Scholes Modell ist also gegeben durch

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\frac{r-\mu-\delta}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\frac{(r-\mu-\delta)^2}{\sigma^2}T\right)$$

und der Prozess $B_t^Q := B_t + \frac{\mu+\delta-r}{\sigma}t$ ist unter Q eine Standard-Brownsche Bewegung. Eingesetzt in den Preisprozess S_t ergibt dies

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &= S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t^Q + (r-\mu-\delta)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &= S_0 \exp\left((r-\delta)t + \sigma B_t^Q - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right). \end{aligned}$$

Die Dividendenausschüttungen führen also zu einer Verringerung der Drift der Aktie unter dem Martingalmaß Q. Der Aktienprozess ist jedoch auch unter Q eine geometrische Brownsche Bewegung.

3.1 Forwards

Ein Forward ist ein Kontrakt bei dem zum Zeitpunkt 0 folgende Vereinbarung getroffen wird: der Stillhalter (writer) verpflichtet sich zum Zeitpunkt T *ein* Basiswertpapier (z.B. Aktie) zu liefern. Als Ausgleich liefert der Halter (ebenfalls zum Zeitpunkt T) $K \in \mathbb{R}$ Geldeinheiten. Im Gegensatz zu einer Option ist ein Forward also ein **unbedingtes** Termingeschäft, bei dem der Austausch in jedem Fall stattfindet.

Ein arbitragefreier Forwardpreis O_0 ist ein $K \in \mathbb{R}$, bei dem 0 zum Zeitpunkt 0 ein arbitragefreier Preis für den oben beschriebenen Kontrakt ist.

Nehme an, dass das Basiswertpapier selber handelbar ist mit Preisprozess S^1. Für einen arbitragefreien Forwardpreis O_0 muss gelten

$$E_Q\left(\frac{S_T^1 - O_0}{S_T^0}\right) = 0, \quad \text{für ein ÄMM } Q. \tag{3.11}$$

Wenn das Basiswertpapier **keine Dividenden** auszahlt, der diskontierte Preisprozess S^1/S^0 unter Q sogar ein echtes Martingal ist, und zudem $E_Q\left(\frac{1}{S_T^0}\right) < \infty$, kann man (3.11) nach O_0 auflösen und

$$O_0 = \frac{E_Q\left(\frac{S_T^1}{S_T^0}\right)}{E_Q\left(\frac{1}{S_T^0}\right)} = \frac{S_0^1}{S_0^0 E_Q\left(\frac{1}{S_T^0}\right)}, \quad \text{für ein ÄMM } Q. \tag{3.12}$$

Wenn S_T^0 **deterministisch** ist, also S^0 z.B. ein risikoloses Bankkonto oder der Preisprozess eines Bonds ohne Ausfallrisiko, dann folgt aus (3.12)

$$O_0 = \frac{S_T^0}{S_0^0} S_0^1 \tag{3.13}$$

Da jedes positive Wertpapier als Numeraire gewählt werden kann, bedeutet dies folgendes:

Wenn es ein Wertpapier mit deterministischem Endwert gibt (etwa ein Bond mit Fälligkeit T ohne Ausfallrisiko), dann ist der Forwardpreis eindeutig. Er ist der Startpreis der Aktie aufgezinst auf den Zeitpunkt T. Beachte, dass diese Aussage modellunabhängig ist, also nicht davon abhängt, mit welchem stochastischen Prozess die Aktie modelliert wird.

Analoge Überlegungen kann man auch für einen Forward-Preis O_t zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ anstellen, also

$$O_t = \frac{E_Q\left(\frac{S_T^1}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right)}{E_Q\left(\frac{1}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right)} = \frac{S_t^1}{S_t^0 E_Q\left(\frac{1}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right)}, \quad \text{für ein ÄMM } Q.$$

Allerdings hält man dabei t stets fest, d.h. wir betrachten keinen Prozess, der gewisse No-Arbitrage-Bedingungen erfüllt.

Bemerkung 3.10. *O_0 ist kein Preis im engeren Sinne. Es sind nicht die Kosten, ein Wertpapier zum Zeitpunkt* 0 *zu erwerben. O_0 ist vielmehr ein Bestandteil eines Kontraktes, ähnlich dem Strikepreis bei Call- oder Put-Optionen.*

Bemerkung 3.11. *Für eine Aktie mit Dividendenprozess $D^1 \neq 0$ gilt (3.11) nach wie vor. Nun ist aber $E_Q\left(\frac{S_T^1}{S_T^0} + \frac{1}{S^0} \bullet D_T^1\right) = \frac{S_0^1}{S_0^0}$ und damit*

$$O_0 = \frac{E_Q\left(\frac{S_T^1}{S_T^0}\right)}{E_Q\left(\frac{1}{S_T^0}\right)} = \frac{\frac{S_0^1}{S_0^0} - E_Q\left(\frac{1}{S^0} \bullet D_T^1\right)}{E_Q\left(\frac{1}{S_T^0}\right)}, \quad \textit{für ein ÄMM } Q.$$

Da der Halter des Forwards die Dividendenauszahlung der Aktie nicht erhält, ist der Forwardpreis kleiner als der aufgezinste Startpreis der Aktie.

Bemerkung 3.12. *Häufig sind die Basisgrößen von Forwards selber nicht handelbar. Beispiele sind Forwards auf Energiepreise oder Rohstoffpreise. So verpflichtet sich etwa der Stillhalter, eine bestimmte Energiemenge zum Zeitpunkt T zum Preis O_0 zu liefern. Da Energie nicht effizient lagerbar ist (also die Liefermenge nicht schon heute erzeugt werden kann), wird mit dem Forward die Verpflichtung, eine bestimmte Energiemenge zum Zeitpunkt T zur Verfügung zu stellen, erst „handelbar" gemacht, d.h. es entsteht heute ein Preis für die spätere Lieferung. Bei nicht handelbarer Basisgröße lässt sich mit Hilfe der Arbitragetheorie nicht wie oben auf den Forwardpreis schließen.*

3.2 Futures

Ein Future unterscheidet sich von einem Forward eigentlich nur um ein buchhalterisches Detail, das allerdings das Verständnis erschwert. Auch beim Future wird im Zeitpunkt 0 ein Tausch "Aktie gegen Geldeinheiten" zum Zeitpunkt T vereinbart. Der tatsächliche Austausch (Aktie gegen Geld) soll aber nicht erst zum Fälligkeitszeitpunkt T erfolgen, sondern die entsprechenden Zahlungen sollen kontinuierlich in $[0,T]$ "gemäß der Wertentwicklung des quotierten Futurepreises" erfolgen. Wenn z.B. die Aktie am Anfang des Kontraktes ungewöhnlich stark steigt, soll der Halter sofort mit entsprechenden Zahlungen bedacht werden. Diese Zahlungen nennt man **Settlement Zahlungen**.

Die Settlement Zahlungen sollen so groß sein, dass nach den Zahlung der Future wieder ein Wertpapier ist, das den Preis Null hat (wie der Forward zum Zeitpunkt 0).

Formal kann man einen Future als ein Wertpapier betrachten, dessen Preisprozess S^2 identisch Null ist (in das bzw. aus dem man also jederzeit ohne Kosten ein- oder aussteigen kann) und das einen Dividendenprozess D^2 besitzt, der den Futurepreisprozess darstellt und dessen Zuwächse den Settlement Zahlungen entsprechen.

Der Futurepreisprozess (Dividendenprozess) besitzt die Endbedingung

$$D_T^2 = S_T^1, \tag{3.14}$$

da bei sofortigem Tausch die zu liefernden Geldeinheiten natürlich dem Aktienpreis entsprechen müssen.

> **Frage**: Bei welchen Prozessen D^2 mit Endbedingung (3.14) ist der Markt $((S^0,0),(S^1,D^1),(0,D^2))$, bei gegebenen Prozessen S^0,S^1,D^1, arbitragefrei ?

Nach Theorem 3.7 ist (NFLVR) in dem um den Future erweiterten Markt dazu äquivalent, dass

$$\widehat{S}^2 + \frac{1}{S^0} \bullet D^2 = \frac{1}{S^0} \bullet D^2$$

ein Q-lokales Martingal ist für ein $Q \in \mathcal{M}^e((S^0,0),(S^1,D^1))$ (letzteres soll die Menge der Martingalmaße im kleinen Markt bezüglich des dividendenfreien Wertpapiers S^0 als Numeraire sein). Da nach Voraussetzung der Prozess S^0 vorhersehbar ist und càdlàg Pfade besitzt, ist er lokal beschränkt. Damit ist nach Theorem 1.21(d) der Dividendenprozess $D^2 = S^0 \bullet (\frac{1}{S^0} \bullet D^2)$ ein Q-lokales Martingal. Ignorieren wir den Unterschied zwischen lokalen Martingalen und echten Martingalen so folgt mit (3.14), dass

$$D_t^2 = E_Q(S_T^1 \mid \mathcal{F}_t), \quad \text{für ein } Q \in \mathcal{M}^e((S^0,0),(S^1,D^1)).$$

Bemerkung 3.13. *Im zeitdiskreten Spezialfall bedeutet die Vorhersehbarkeit von S^0, dass S_n^0 $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist. Die Martingalbedingung lautet*

$$E_Q\left(\underbrace{\frac{1}{S_n^0}(D_n^2 - D_{n-1}^2)}_{=\frac{1}{S^0}\bullet D_n^2 - \frac{1}{S^0}\bullet D_{n-1}^2} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

was wegen der $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von S_n^0 äquivalent zu

$$E_Q\left(D_n^2 - D_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ist.

Man beachte, dass der Futurepreis und **nicht** der Prozess $\frac{\text{Futurepreis}}{\text{Numeraire}}$ ein Martingal sein muss. Dies ist kein Widerspruch zur bisherigen Theorie, da ein Futurepreis kein Wertpapierpreis im eigentlichen Sinne ist, sondern nur ein "quotierter Preis" der als Dividendenzahlung interpretiert werden kann. Möchte man in einem Future eine Long-Position einnehmen, so ist dies wegen $S^2 = 0$ jederzeit möglich ohne ein Gegengeschäft zu tätigen oder Kapital binden zu müssen. Der Gewinn ist dann dD_t^2. Somit muss nicht die Differenz der passend gewichteten Drifte zweier Wertpapiere Null sein, sondern die Drift der Dividendenauszahlung.

Beispiel 3.14. *Sei nun $D^1 = 0$, d.h. die Aktie zahlt keine Dividende aus. Falls S_T^0 deterministisch und S^0 vorhersehbar und von endlicher Variation ist (letzteres wird für (3.7) benötigt) folgt*

$$D_t^2 = E_Q(\widehat{S}_T^1 S_T^0 \mid \mathcal{F}_t) = S_T^0 E_Q(\widehat{S}_T^1 \mid \mathcal{F}_t) = S_T^0 \widehat{S}_t^1 = \frac{S_T^0}{S_t^0} S_t^1.$$

Der Futurepreisprozess stimmt also **in diesem Fall** *mit dem Forwardpreisprozess überein.*

Die Hedging-Strategien sind allerdings unterschiedlich. Es gilt

$$0 + \frac{1}{S^0} \bullet D^2 = \frac{1}{S^0} \bullet (S_T^0 \widehat{S}^1) = \frac{S_T^0}{S^0} \bullet \widehat{S}^1$$

Damit ist

$$\psi_t^1 := \frac{S_T^0}{S_t^0}, \quad t \in [0, T] \tag{3.15}$$

die bei positivem Zins dynamische (!) und i.A. auch nicht-deterministische Hedging-Strategie in der Aktie gegen den Future. Die entsprechende Hedging-Strategie gegen den Forward ist dagegen der konstante Prozess $\psi_t^1 := 1$, $t \in [0, T]$. I.A. unterscheiden sind also die beiden Kontrakte ökonomisch, auch wenn die ,,Preise" übereinstimmen. Die Hedging-Strategie ψ^1 für den Future ist Teil eines Paars (ψ^0, ψ^1). Sei (ψ_t^0, ψ_t^1) die Position des Hedging-Portfolios gegen den Future, wenn die Settlement-Zahlungen in $[0, t)$ bereits beglichen sind. Da nach Leistung der Settlement Zahlungen der Wert des Hedging-Portfolios gleich Null ist, muss gelten

$$\psi_t^0 S_{t-}^0 + \psi_t^1 S_{t-}^1 = 0.$$

Es folgt

$$\psi_t^0 = -\frac{\psi_t^1 S_{t-}^1}{S_{t-}^0} = -\frac{S_T^0 S_{t-}^1}{S_{t-}^0 S_t^0}.$$

Bemerkung 3.15 (Vergleich Forward/Future)**.** *Sei die Zeit diskret und $S_t^0 = (1 + r)^t$ mit $r > 0$. Die Auszahlung des Forwards in T beträgt $S_T^1 - S_0^1(1 + r)^T$ und kann wie folgt zerlegt werden*

$$S_T^1 - S_0^1(1 + r)^T = \sum_{t=1}^{T} (1 + r)^{T-t}(S_t^1 - S_{t-1}^1(1 + r)). \tag{3.16}$$

Der t-te Summand in (3.16) kann als Beitrag des ,,selbstfinanzierenden Aktiengewinns" in der t-ten Periode zur Auszahlung in T interpretiert werden. Der in Periode t angefallene Gewinn $S_t^1 - S_{t-1}^1(1 + r)$ *aus dem kreditfinanzierten Kauf einer Aktien in* $t - 1$ *wird zwischen t und T risikolos angelegt.*

Beim Future finden nun nominell die gleichen Auszahlungen statt, nur zu anderen Zeitpunkten. Der Betrag $(1+r)^{T-t}(S_t^1-S_{t-1}^1(1+r))$ *wird bereits zum Zeitpunkt t ausgezahlt. Daher müssen zur Absicherung* $(1+r)^{T-t}$ *Aktien (statt nur einer) in* $t-1$ *gekauft werden. Dies entspricht der Hedging-Strategie (3.15).*

Bemerkung 3.16. *Die konzeptionelle Schwierigkeit eines Futures (z.B. im Gegensatz zu einer Option) besteht darin, dass der Auszahlungsprozess nicht getrennt von der Preisbildung auf Futuremärkten gesehen werden kann. Nur die akkumulierten Auszahlungen bis T sind durch die Bedingung (3.14) exogen gegeben. Wann die Auszahlungen jedoch stattfinden, was bei nicht-verschwindendem Zins relevant ist, ergibt sich jedoch erst durch die Bewertung des Futures am Markt.*

Im Gegensatz dazu hängt die Auszahlung einer europäischen oder amerikanischen Option nur von den Preisen auf den Aktienmärkten ab (die hier exogen gegeben sind) und lediglich die Optionspreise, die Preise im eigentlichen Sinne sind, werden bestimmt.

4 Optimales Stoppen und amerikanische Optionen

Eine amerikanische Option ("Derivat", "Claim") zeichnet sich dadurch aus, dass der *Halter* den Ausübungszeitpunkt *wählen* kann. Somit hängt die Auszahlung – im Gegensatz zu europäischen Claims – nicht nur vom Zufall (zufällige Entwicklung von Aktienpreisen, etc.) ab, sondern zusätzlich auch von der Ausübungsstrategie des Halters. Diese "Strategie" wird dem Verkäufer i.A. nicht bekannt sein, was die Analyse des Kontraktes erschwert.

Ein amerikanischer Claim lässt sich durch einen nichtnegativen stochastischen Prozess $L = (L_t)_{t\in[0,T]}$ beschreiben. *Der Prozess L soll càdlàg-Pfade besitzen.* Die reellwertige Zufallsvariable L_t legt dabei die (auf den Zeitpunkt 0) *diskontierte* Auszahlung an den Halter fest, wenn dieser sich entscheidet, den Claim zum Zeitpunkt t auszuüben.

Definition 4.1. *Ein* **Hedge** *zum Startkapital* $v_0 \in \mathbb{R}$ *für einen amerikanischen Claim L ist eine zulässige Strategie* φ *mit*

$$v_0 + \varphi \bullet S_t \geq L_t, \quad \forall t \in [0,T], P\text{-a.s.} \tag{4.1}$$

(4.1) liefert eine Absicherungsstrategie für den *Verkäufer* der amerikanischen Option. Das minimale Startkapital zu dem sich eine Hedging-Strategie φ finden lässt, wird als Superhedgingpreis der Option bezeichnet.

Wenn der Verkäufer für die Option eine Prämie größer oder gleich v_0 bekommt, ist er auf der sicheren Seite: Er investiert gemäß der dynamischen Strategie φ bis der Halter (Käufer) sich zum Ausüben entschließt. Mit dem Wert des Portfolios $v_0 + \varphi \bullet S_t$ kann er den Auszahlungbetrag L_t begleichen.

Bemerkung 4.2. *Man beachte, dass für obige Überlegung nicht relevant ist, dass der Halter zu einer Stoppzeit ausübt. Der Halter der Option könnte auch ein* Insider *sein, d.h. zu einem* $\tau : \Omega \to [0, T]$ *ausüben, das bzgl. der Standard-Filtration keine Stoppzeit ist. Ein extremer Fall wäre, wenn der Käufer zum Zeitpunkt*

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \mid L_t = \max_{s \in [0,T]} L_s\}$$

ausüben könnte (i.A. keine Stoppzeit). Trotzdem ist der Verkäufer durch φ *abgesichert. Wir werden sehen, dass es zumindest in vollständigen Märkten nicht gefährlich ist, amerikanische Optionen an Insider zu verkaufen. Der Insider kann zwar eine größere Auszahlung erreichen als der Nicht-Insider. Diese Information wird aber gewissermaßen in Form des günstigeren Ausübungsverhaltens an den Verkäufer weitergegeben, der dann mit seinem Hedging-Portfolio mehr Gewinne macht.*

4.1 Optimales Stoppen

Wie wir später sehen werden bzw. wie man bereits jetzt vermuten wird, hängt die Analyse amerikanischer Optionen eng mit dem Lösen optimaler Stoppprobleme zusammen. Deshalb wird hier zunächst die Theorie des optimalen Stoppens dargestellt. Diese ist natürlich von sehr weitreichender Bedeutung und geht weit über die Anwendung auf amerikanische Optionen hinaus.

Sei L obiger Auszahlungsprozess. Bei einem optimalen Stoppproblem stellt man sich die Frage, wann man L optimal abstoppt, wobei in die Stoppentscheidung immer nur die jeweils zur Verfügung stehenden Informationen eingehen dürfen und eine solche Entscheidung später nicht mehr revidiert werden darf. Das Problem ist also

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(L_\tau) \tag{4.2}$$

wobei $\mathcal{T}$ die Menge der Stoppzeiten bezeichne. Q ist ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß mit dem man die möglichen Ereignisse gewichten will. Es muss natürlich nicht die Bedeutung eines Martingalmaßes (wie oben) haben. (4.2) ist ein wichtiges Beispiel für ein dynamisches Optimierungsproblem. "Dynamisch" bedeutet, dass die Stoppentscheidung nicht zu einem einzelnen Zeitpunkt getroffen wird, sondern in eine Dynamik eingebunden ist. Andere dynamisches Optimierungsproblem sind z.B. Portfoliooptimierungsprobleme mit vorhersehbaren Handelsstrategien φ. Diese sind jedoch wesentlich komplexer. Bei (4.2) gibt es zu jedem Zeitpunkt höchstens 2 Möglichkeiten: stoppen (wenn noch nicht geschehen) oder nicht stoppen.

4.1.1 Exkurs: Das Sekretärinnenproblem oder der optimale Immobilienkauf

Als interessantes Beispiel eines Stopp-Problemes betrachten wir das klassische **Sekretärinnenproblem**. Hier verfährt der Entscheider nach dem Motto "**Das Beste oder nichts**". Er möchte aus n zufälligen Auszahlungen $X_1, \dots, X_n$ mit einer möglichst hohen Wahrscheinlichkeit die größte Auszahlung erhalten. Dabei bekommt er die Auszahlungen der Reihe nach gezeigt. Er kann eine Auszahlung entweder nehmen oder ablehnen und auf eine höhere Auszahlung in der Zukunft hoffen. Lehnt er eine Auszahlung ab, ist diese für ihn unwiderruflich verloren.

Der Name des Problems ist durch die Auswahl einer Sekretärin motiviert. Kandidaten stellen sich nach und nach vor. Einem Kandidaten kann entweder zugesagt werden oder man sagt ihm ab, was bedeutet, dass er enttäuscht von dannen zieht und man ihn später nicht mehr für den Job gewinnen kann. Das Problem hat viele Anwendungen im alltäglichen Leben. Am nächsten kommt es vielleicht dem Kauf einer Immobilie. Es gibt nach und nach Immobilienangebote. Nach einer Besichtigung kann sich der Kaufinteressent entscheiden, ob er das Objekt kaufen will oder nicht (wobei wir der Einfachheit halber davon ausgehen, dass man jedes besichtigte Objekt auch bekommen würde). Allerdings muss man bei einem Objekt, das in Frage kommt, schnell zuschlagen. Man kann es also nur mit Objekten vergleichen, die man in der Vergangenheit besichtigt hat.

Wir modellieren die Auszahlungen $X_1, \ldots, X_n$ als i.i.d. stetig verteile Zufallsvariablen. Dabei soll kein Wissen über die stochastische Verteilung der Größen bekannt sein. Daher beobachten wir nur die Ordnungsrelation, also etwa ob $X_2 > X_1$ („die zweite Immobilie ist besser als die erste") oder $X_2 < X_1$. Formal betrachten wir folgendes optimale Stopp-Problem:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(X_\tau > X_t \quad \forall t = 1, 2, \ldots, n,\ t \neq \tau) \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} P(L_\tau = 1 \quad \text{und} \quad L_t = 0 \quad \forall t = \tau + 1, \ldots, n),
\end{aligned}$$

wobei

$$L_t := 1_{\{X_t > X_s \ \forall s < t\}}, \quad t = 1, \ldots, n$$

und

$$\mathcal{F}_t = \sigma(L_1, \ldots, L_t)$$

Man beachte, dass wegen der stetigen Verteilung $P(X_s = X_t) = 0$ für $s \neq t$. Eigentlich soll der Akteur zu jedem Zeitpunkt t die Ordnungsrelation der ersten $X_1, \ldots, X_t$ Objekte kennen. Für das Optimierungsproblem ist es jedoch nur relevant, ob ein neu hinzugekommenes Objekt besser als alle seine Vorgänger ist oder nicht (also ob $L_t = 1$ oder $L_t = 0$). Ob es das zweit- oder drittbeste ist, spielt bei obiger Zielfunktion und er i.i.d.-Annahme keine Rolle[††].

Wie sieht die optimale Stoppzeit τ für obiges Problem aus ?

[††] Man kann das Stopp-Problem in die Form (4.2) bringen. Betrachte hierzu den adaptierten Auszahlungsprozess $\widetilde{L}_t := E(1_{\{X_t > X_s \ \forall s \neq t\}} \mid \mathcal{F}_t) = 1_{\{X_t > X_s \ \forall s < t\}} E(1_{\{X_t > X_s \ \forall s > t\}} \mid \mathcal{F}_t) = \frac{t}{n} 1_{\{X_t > X_s \ \forall s < t\}}$. Für alle Stoppzeiten τ gilt mit dem Satz vom iterierten Erwartungswert $E(\widetilde{L}_\tau) = E(\sum_{t=1}^n 1_{\{\tau = t\}} E(1_{\{X_t > X_s \ \forall s \neq t\}} \mid \mathcal{F}_t)) = \sum_{t=1}^n E(E(1_{\{\tau = t\}} 1_{\{X_\tau > X_s \ \forall s \neq \tau\}} \mid \mathcal{F}_t)) = \sum_{t=1}^n E(1_{\{\tau = t\}} 1_{\{X_\tau > X_s \ \forall s \neq \tau\}}) = P(X_\tau > X_s \ \forall s \neq \tau)$.

Man überlege sich zunächst, dass τ von der Form

$$\tau = \min\{t > a \mid L_t = 1\} \wedge n \tag{4.3}$$

für ein festes $a \in \{0, \dots, n-1\}$ sein muss. Klar: ein Stoppen bei $L_t = 0$ und $t < n$ macht keinen Sinn, da der Kauf einer Immobilie, die schlechter ist als einer ihrer Vorgänger, nichts zur Erfolgswahrscheinlichkeit beiträgt. Wenn man für einen Zeitpunkt s im Fall $L_s = 1$ stoppt, würde man für einen Zeitpunkt t mit $t > s$ beim Eintreten des Ereignisses $L_t = 1$ erst recht stoppen. Also muss das optimale τ von der Form (4.3) sein und wir müssen nur noch über a maximieren. Für festes a ergibt sich die Erfolgswahrscheinlichkeit durch

$$p_n(0) = 1/n \quad \text{und} \quad p_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{t=a+1}^{n} \frac{a}{t-1} = \frac{a}{n}\sum_{t=a}^{n-1}\frac{1}{t} \quad \text{für } a \geq 1.$$

Begründung im Fall $a \geq 1$: Sei t die global beste Immobilie. t ist gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$. Im Fall $t > 1$ sei s die beste Immobilie vor t. Gegeben $t > 1$ ist s gleichverteilt auf $\{1, \dots, t-1\}$. Es gibt nun 3 Fälle

(1) $a \geq t$

(2) $s \leq a < t$

(3) $a < s$

Die beste Immobilie hat man dann und nur dann gefunden, wenn Fall 2 eintritt. Im Fall 1 ist die beste Immobilie zu früh gekommen: man musste sich erst einen Überblick verschaffen. Im Fall 3 kauft man Immobilie s oder eine davor.

Es gilt $p_n(1) \geq 1/n = p_n(0)$ und für $a \geq 2$:

$$p_n(a) - p_n(a-1) = \frac{a-1}{n}\left(\sum_{t=a}^{n-1}\frac{1}{t} - \sum_{t=a-1}^{n-1}\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{n}\sum_{t=a}^{n-1}\frac{1}{t} = \frac{1}{n}\left(-1 + \sum_{t=a}^{n-1}\frac{1}{t}\right).$$

Daher wird $p_n(a)$ durch

$$\widehat{a}_n = \max\{a \mid \sum_{t=a}^{n-1}\frac{1}{t} \geq 1\}$$

maximiert. Für n groß erhalten wir die Approximation

$$p_n(a) \approx \frac{a}{n}(\ln(n) - \ln(a)) = -(a/n)\ln(a/n).$$

$(-x\ln(x))' = -\ln(x) - 1 = 0$ ergibt $x = e^{-1}$ und damit

$$\widehat{a}_n \approx \frac{n}{e} \quad \text{und} \quad p_n(n/e) \approx e^{-1}.$$

Zusammenfassung: Man überlege sich einen maximalen Zeitraum, an dessen Ende man in jedem Fall eine Immobilie haben möchte. Diese Zeit teile man durch 2.718 und schaue sich in diesem ,,Orientierungszeitraum" alle verfügbaren Immobilien an ohne eine zu kaufen. Nach Ablauf dieser Zeit nehme man die erste Immobilie, die mindestens so gut ist wie die beste Immobilie in dem Orientierungszeitraum.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man mit diesem Algorithmus die beste Immobilie findet, beträgt immerhin $1/e \approx 37\%$.

Es ist überflüssig zu sagen, dass das Kriterium "Das Beste oder nichts" sehr risikofreudig ist. Wenn die beste Immobilie bei den ersten n/e zufällig dabei war, nimmt man die n-te Immobilie, was für große n i.A. eine ziemlich schlechte Entscheidung sein wird. Gewisse Abwandlungen des Kriteriums wären also sinnvoll.

Der Akteur arbeitet mit minimalen Informationen. Er verarbeitet nur, die Information $X_2 > X_1$ nicht aber die absolute Größe von X_2. Letzteres könnte die optimale Strategie natürlich i.A. verbessern. Allerdings würde die optimale Strategie dann auch von der stochastischen Verteilung der X_t abhängen, die hier nicht eingeht und das Ergebnis so wunderbar einfach macht. **Exkursende.**

In diesem Abschnitt wird auf das Essentielle Supremum zurückgegriffen, siehe Anhang B. Analog zu der zeitdiskreten Vorlesung definieren wir die Snell-Einhüllende (snell envelope)

Definition 4.3. *Für $t \in [0, T]$ ist*

$$\mathcal{T}_t := \{\tau \in \mathcal{T} \textit{ mit } t \leq \tau \leq T\}.$$

$\mathcal{T}_t$ ist also die Menge der $[t, T]$-wertigen Stoppzeiten. Ein Prozess $U = (U_t)_{t\in[0,T]}$ mit càdlàg Pfaden und

$$U_t = \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} E_Q(L_\tau \mid \mathcal{F}_t), \quad P-f.s., \ t \in [0, T], \tag{4.4}$$

wird **Snell-Einhüllende** *des Prozesses L bzgl. des Maßes Q genannt. Das essentielle Supremum in (4.4) wird über die Menge der Zufallsvariablen $\{E_Q(L_\tau \mid \mathcal{F}_t) \mid \tau \in \mathcal{T}_t\}$ gebildet und bezieht sich auf die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$, d.h. es ist die kleinste obere Schranke in der Menge der $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen (siehe Definition B.1).*

Theorem 4.4. *Sei L ein nichtnegativer stochastischer Prozess mit càdlàg-Pfaden und*

$$E_Q(\sup_{t\in[0,T]} L_t) < \infty. \tag{4.5}$$

Dann existiert die Snell-Einhüllende U aus (4.4) und erfüllt folgende Eigenschaften

(i) $U \geq L$ bis auf Ununterscheidbarkeit

(ii) U ist ein Q-Supermartingal

(iii) Für jedes Q-Supermartingal $\widetilde{U}$ gilt folgende Implikation

$$\widetilde{U} \geq L \text{ bis auf Ununterscheidbarkeit } \Longrightarrow \widetilde{U} \geq U \text{ bis auf Ununterscheidbarkeit .}$$

D.h. U ist das kleinste Q-Supermartingal, das L dominiert.

Theorem 4.5. *Es gelte (4.5). Im Spezialfall, dass die Zeit diskret ist, lässt sich die Snell-Einhüllende auch durch die folgende Rückwärtsrekursion definieren*

$$U_T = L_T, \qquad U_{t-1} = L_{t-1} \vee E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}),\ t = 1, \dots, T. \tag{4.6}$$

Beweis von Theorem 4.5. Wir müssen zeigen, dass U aus (4.6) die Bedingungen (i),(ii) und (iii) aus Theorem 4.4 erfüllt (es kann höchstens einen Prozess geben, der alle 3 Bedingungen erfüllt).

Ad (i): klar.

Ad (ii): Wir müssen nur zeigen, dass $U_{t-1} \geq E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Direkt aus (4.6) folgt

$$U_{t-1} = L_{t-1} \vee E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}) \geq E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Ad (iii): Sei $\widetilde{U}$ ein Supermartingal, das L dominiert. Dann gilt $\widetilde{U}_T \geq L_T = U_T$. Wir fahren mit einer Rückwärtsinduktion fort. Nehme an, wir wüssten bereits, dass $\widetilde{U}_t \geq U_t$. Damit gilt

$$E_Q(\widetilde{U}_t|\mathcal{F}_{t-1}) \geq E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{4.7}$$

Zu zeigen: $\widetilde{U}_{t-1} \geq U_{t-1}$. Da $\widetilde{U}$ ein Supermartingal ist, gilt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq E_Q(\widetilde{U}_t|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Zusammen mit $\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1}$ und (4.7) folgt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}.$$

□

Proposition 4.6. *Für einen adaptierten Prozess X mit $E|X_t| < \infty$ und $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$, P-f.s., $\forall s \leq t$ sind folgende Aussagen äquivalent*

(1) Zu X existiert eine càdlàg Version.

(2) Die Abbildung $t \mapsto E(X_t)$ ist càdlàg.

Beweis siehe Karatzas und Shreve [9], Theorem I.3.13.

Beweis von Theorem 4.4. Schritt 1: Zunächst soll gezeigt werden, dass U die Supermartingaleigenschaft

$$E_Q(U_t\ |\mathcal{F}_s) \leq U_s \quad P\text{-f.s.} \quad \forall s \leq t$$

erfüllt. Offenbar ist die Menge der Zufallsvariablen

$$\{E_Q(L_\tau \mid \mathcal{F}_t) \mid \tau \in \mathcal{T}_t\}$$

maximumsstabil, d.h. für $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_t$ existiert eine Stoppzeit $\tau_3 \in \mathcal{T}_t$ mit

$$E_Q(L_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_t) \vee E_Q(L_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_t) = E_Q(L_{\tau_3} \mid \mathcal{F}_t).$$

Man wähle

$$\tau_3 = \begin{cases} \tau_1 : \text{on the set } \{E_Q(L_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_t) \geq E_Q(L_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_t)\} \\ \tau_2 : \text{on the set } \{E_Q(L_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_t) < E_Q(L_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_t)\}. \end{cases}$$

Damit existiert mit Theorem B.4 eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_t$ mit

$$E_Q(L_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_t) \uparrow \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} E_Q(L_\tau \mid \mathcal{F}_t) = U_t. \tag{4.8}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz *für bedingte Erwartungswerte** impliziert

$$\begin{aligned} E(U_t \mid \mathcal{F}_s) &= E_Q\left(\lim_{n\to\infty} E_Q\left(L_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E_Q(E_Q(L_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \lim_{n\to\infty} E_Q(L_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s) \\ &\leq U_s \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Ungleichung gilt wegen $\tau_n \in \mathcal{T}_t \subset \mathcal{T}_s$. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Version von (4.4) mit càdlàg Pfaden gibt (damit ist dann auch die Existenz der Snell-Einhüllenden als Prozess gezeigt). Wir benutzen Proposition 4.6 und müssen nur noch zeigen, dass die Abbildung $t \mapsto E_Q(U_t)$ rechtsstetig ist. Bildet man in (4.9) auf beiden Seiten den Erwartungswert so folgt, dass $t \mapsto E_Q(U_t)$ monoton fallend ist (also insbesondere existieren rechte und linke Limiten der Erwartungswertfunktion). Mit $E(U_t) \geq E(E(L_\tau \mid \mathcal{F}_t))$ für alle $\tau \in \mathcal{T}_t$ und den Gleichungen in (4.9) für $s = 0$ folgt

$$E_Q(U_t) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t} E_Q(L_\tau).$$

Für $s \leq t$ folgt

$$|E_Q(U_t) - E_Q(U_s)| = E_Q(U_s) - E_Q(U_t) \leq E_Q(\sup_{s\leq u\leq t} L_u) - E_Q(L_t)$$

(zu jedem $\tau \in \mathcal{T}_s$ betrachte man die Stoppzeit $\tau \vee t \in \mathcal{T}_t$ und schätze ab: $E(L_\tau) - E(L_{\tau\vee t}) \leq E(\sup_{s\leq u\leq t} L_u) - E(L_t)$).

*Der Satz besagt: Für nichtfallende Folgen nichtnegativer Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $E(Y_n \mid \mathcal{G}) \uparrow E(\sup_{m\in\mathbb{N}} Y_m \mid \mathcal{G})$, $n \uparrow \infty$, P-f.s. Beweis: Offensichtlich gilt $\sup_{m\in\mathbb{N}} E(Y_m \mid \mathcal{G}) \leq E(\sup_{m\in\mathbb{N}} Y_m \mid \mathcal{G})$. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass die Erwartungswerte der beiden Zufallsvariablen gleich sind. Dies folgt aber aus $E(E(\sup_{m\in\mathbb{N}} Y_m \mid \mathcal{G})) = E(\sup_{m\in\mathbb{N}} Y_m) = \sup_{m\in\mathbb{N}} E(Y_m)$ (Satz vom iterierten Erwartungswert und Satz von der monotonen Konvergenz für absolute Erwartungswerte) und $E(\sup_{m\in\mathbb{N}} E(Y_m \mid \mathcal{G})) \geq E(E(Y_n \mid \mathcal{G})) = E(Y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Rechtsstetigkeit der Pfade von L und majorisierender Konvergenz wegen (4.5) folgt daraus, dass $t \mapsto E_Q(U_t)$ rechtsstetig ist und damit wegen Proposition 4.6 eine Version mit càdlàg Pfaden besitzt.

Schritt 2: Beweis der Eigenschaften: Wegen Schritt 1 ist U ein Supermartingal (Eigenschaft (ii)).

Wählt man $\tau = t$, so folgt $P(U_t \geq L_t) = 1$ und damit wegen Rechtsstetigkeit $P(U_t \geq L_t, \quad \forall t \in [0,T]) = 1$ (Eigenschaft (i)).

Ad (iii): Offenbar ist U das kleinste Supermartingal. Für $\widetilde{U} \geq L$ und $\tau \in \mathcal{T}_t$ folgt nämlich

$$\widetilde{U}_t \overset{\text{Optional Sampling Theorem}}{\geq} E_Q\left(\widetilde{U}_\tau \mid \mathcal{F}_t\right) \geq E_Q\left(L_\tau \mid \mathcal{F}_t\right), \quad P-\text{f.s.}.$$

Da dies für alle $\tau \in \mathcal{T}_t$ gilt, folgt

$$\widetilde{U}_t \;\; \geq \;\; \text{ess}\sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q(L_\tau \mid \mathcal{F}_t) = U_t, \quad P-\text{f.s.},$$

also $P(\widetilde{U}_t \geq U_t, \quad \forall t \in [0,T]) = 1$ wegen Rechtsstetigkeit beider Prozesse. □

Definition 4.7. *Ein Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ist von Klasse (D), wenn die Familie von Zufallsvariablen $(|X_\tau|)_{\tau\in\mathcal{T}}$ gleichgradig integrierbar ist, d.h.* $\sup_{\tau\in\mathcal{T}} E\left(|X_\tau| 1_{\{|X_\tau|>c\}}\right) \to 0$ *für $c \to \infty$.*

Proposition 4.8. *Jedes Martingal auf einem kompakten Zeitintervall ist von Klasse (D).*

Beweis. Sei M ein Martingal, d.h. für alle $\tau \in \mathcal{T}$ gilt $M_\tau = E(M_T \mid \mathcal{F}_\tau)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $d > 0$ groß genug, so dass $E\left(|M_T| 1_{\{|M_T|>d\}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und $c > d\frac{2}{\varepsilon}E(|M_T|)$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
E\left(|M_\tau| 1_{\{|M_\tau|>c\}}\right) &= E\left(|E(M_T \mid \mathcal{F}_\tau)| 1_{\{|M_\tau|>c\}}\right) \\
&\leq E\left(E(|M_T| \mid \mathcal{F}_\tau) 1_{\{|M_\tau|>c\}}\right) \\
&= E\left(|M_T| 1_{\{|M_\tau|>c\}}\right) \\
&\leq E\left(|M_T| 1_{\{|M_T|>d\}}\right) + E\left(d 1_{\{|M_\tau|>c\}}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d}{c} E(|M_\tau|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d}{c} E(E(|M_T| \mid \mathcal{F}_\tau)) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d}{c} E(|M_T|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $(|M_\tau|)_{\tau\in\mathcal{T}}$ gleichgradig integrierbar. □

Da für die Snell-Einhüllende U gilt

$$0 \leq U_t \leq E_Q(\sup_{t\leq u\leq T} L_u | \mathcal{F}_t) \leq E_Q(\sup_{0\leq u\leq T} L_u | \mathcal{F}_t)$$

(beachte, dass $L \geq 0$ vorausgesetzt wurde) folgt mit Proposition 4.8, dass auch U ein Prozess von Klasse (D) ist.

Theorem 4.9 (Doob-Meyer-Zerlegung). *Für jedes Supermartingal X von Klasse (D) existiert eine Zerlegung*

$$X = X_0 + M + A \tag{4.10}$$

mit $M_0 = A_0 = 0$, M Martingal und A nicht-wachsender vorhersehbarer Prozess.

(Siehe Theorem 8 in Kapitel III in [13] für einen Beweis)

Die Snell-Einhüllende besitzt also eine Doob-Meyer-Zerlegung, was später für das Superhedgen eines amerikanischen Claims im Black-Scholes Modell benötigt wird (siehe Beispiel 4.12).

Bemerkung 4.10. *Wenn der Auszahlungsprozess L von Klasse (D) ist, dann ist auch die Snell-Einhüllende U von Klasse (D). Der Beweis dieser Implikation bedarf jedoch mehr Vorarbeit, weswegen wir aus Bequemlichkeit die restriktivere Voraussetzung (4.5) gemacht haben.*

Definiere für alle $\varepsilon > 0$ die Stoppzeiten

$$\tau^\varepsilon := \inf\{t \geq 0 \mid L_t \geq U_t - \varepsilon\} \tag{4.11}$$

Theorem 4.11. *(1) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die abgestoppte Snell-Einhüllende U^{τ^ε}, d.h. der Prozess $(U_{t\wedge\tau^\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ ein Martingal.*

(2) τ^ε ist eine ε-optimale Stoppzeit, d.h.

$$E\left(L_{\tau^\varepsilon}\right) \geq \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E\left(L_\tau\right) - \varepsilon.$$

(3) Sei

$$\tau^\star := \sup_{\varepsilon>0} \tau^\varepsilon$$

($\tau^\star$ ist offenbar eine $[0,T]$-wertige Stoppzeit). $\tau^\star$ ist genau dann eine optimale Stoppzeit, d.h.

$$E\left(L_{\tau^\star}\right) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E\left(L_\tau\right),$$

wenn

$$E\left(\Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^\varepsilon<\tau^\star,\ \forall\varepsilon>0\}}\right) \geq 0. \tag{4.12}$$

(Zudem ist die linke Seite von (4.12) stets nichtpositiv)†.

†Wenn L keine negativen Sprünge besitzt, ist (4.12) natürlich erfüllt. Die Bedingung ist jedoch deutlich schwächer. Es darf keine negativen Sprünge zu vorhersehbaren Stoppzeiten geben (siehe Definition 1.19). Dies würde z.B. von Lévy-Prozessen erfüllt sein, deren Sprünge sich nicht vorher ankündigen.

Des weiteren folgt aus (4.12), dass

$$P(\tau^\star = \tau^0) = 1, \tag{4.13}$$

wobei

$$\tau^0 := \inf\{t \geq 0 \mid L_t = U_t\} = \inf\{t \geq 0 \mid L_t \geq U_t\}.$$

(Wenn der Auszahlungsprozess stetig ist, kann also in (4.11) ε gleich Null gesetzt werden. Ebenso in zeitdiskreten Modellen, vgl. Theorem 4.5. In zeitdiskreten Modellen gilt die pfadweise Implikation: $L_s(\omega) < U_s(\omega)$ für alle $s = 0, \ldots, t_0 - 1 \implies \exists \varepsilon > 0\ \tau^\varepsilon(\omega) \geq t_0$)

Beweis. Aussage (1) ist wohl am schwierigesten zu beweisen. Wir müssen zeigen, dass

$$E(U_{\tau^\varepsilon}) = U_0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.14}$$

Da die abgestoppte Snell-Einhüllende U^{τ^ε} ein Supermartingal ist, würde mit (4.14) Aussage (1) folgen. Jedes Supermartingal, dessen erwarteter Endwert mit seinem Startwert überinstimmt, ist nämlich ein Martingal. Bleibt also (4.14)zu zeigen. Aus der Eigenschaft des Supremums folgt, dass es eine Folge von Ausübungsstrategien $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$E(L_{\sigma_n}) \geq U_0 - \frac{1}{n}. \tag{4.15}$$

σ_n ist eine sog. $(1/n)$-optimale Strategie, d.h. der Wert der Zielfunktion, hier $\tau \mapsto E(L_\tau)$, ist höchstens um $1/n$ kleiner als das Supremum. Wir werden gleich sehen, dass τ^ε in diesem Sinne eine ε-optimale Strategie ist. Aus der Definition von τ^ε ist dies jedoch noch nicht klar, da $E(U_{\tau^\varepsilon}) < U_0$ noch nicht widerlegt ist.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} E(L_{\sigma_n}) &= E\left(L_{\sigma_n} 1_{\{\sigma_n < \tau^\varepsilon\}}\right) + E\left(L_{\sigma_n} 1_{\{\sigma_n \geq \tau^\varepsilon\}}\right) \\ &\leq E\left((U_{\sigma_n} - \varepsilon) 1_{\{\sigma_n < \tau^\varepsilon\}}\right) + E\left(U_{\sigma_n} 1_{\{\sigma_n \geq \tau^\varepsilon\}}\right) \\ &= E\left(U_{\sigma_n}\right) - \varepsilon P(\sigma_n < \tau^\varepsilon) \\ &\leq U_0 - \varepsilon P(\sigma_n < \tau^\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei die letzte Ungleichung mit dem Optional Sampling Theorem aus der Supermartingaleigenschaft von U folgt. Zusammen ergeben (4.15) und (4.16), dass

$$P(\sigma_n < \tau^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon n}. \tag{4.17}$$

(4.17) impliziert stochastische Konvergenz von $U_{\sigma_n \wedge \tau^\varepsilon}$ gegen U_{τ^ε} für $n \to \infty$.

Des weiteren folgt erneut mit dem Optional Sampling Theorem:

$$E(U_{\sigma_n \wedge \tau^\varepsilon}) \geq E(U_{\sigma_n}) \geq E(L_{\sigma_n}) \geq U_0 - \frac{1}{n}. \tag{4.18}$$

Da U von Klasse (D) ist, impliziert $P(\sigma_n < \tau^\varepsilon) \to 0$ für $n \to \infty$, dass

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} E\left(1_{\{\sigma_n < \tau^\varepsilon\}} |U_\tau|\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Somit folgt mit der Abschätzung

$$E(|U_{\sigma_n \wedge \tau^\varepsilon} - U_{\tau^\varepsilon}|) \leq E\left(1_{\{\sigma_n < \tau^\varepsilon\}} |U_{\sigma_n}|\right) + E\left(1_{\{\sigma_n < \tau^\varepsilon\}} |U_{\tau^\varepsilon}|\right),$$

auch $L^1(P)$-Konvergenz, also

$$E(U_{\sigma_n \wedge \tau^\varepsilon}) \to E(U_{\tau^\varepsilon}), \quad n \to \infty.$$

Zusammen mit (4.18) ergibt dies

$$E(U_{\tau^\varepsilon}) \geq U_0.$$

Da $\leq$ sowieso gilt, folgt (4.14).

Ad (2): Wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade von L und U gilt $L_{\tau^\varepsilon} \geq U_{\tau^\varepsilon} - \varepsilon$. Mit (1) folgt

$$E(L_{\tau^\varepsilon}) \geq E(U_{\tau^\varepsilon}) - \varepsilon = U_0 - \varepsilon.$$

Ad (3) Man beachte, dass $\tau^\varepsilon \leq \tau^\star$ und τ^ε mit fallendem ε nicht-fallend ist, d.h. $\tau^\star = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau^\varepsilon$.

Für jedes ω gibt es zwei Möglichkeiten: 1) $\tau^\varepsilon(\omega) = \tau^\star(\omega)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug, d.h. die Pfade $L_\cdot(\omega)$ und $U_\cdot(\omega)$ springen zum Zeitpunkt $\tau^\star(\omega)$ aufeinander. 2) $\tau^\varepsilon(\omega) < \tau^\star(\omega)$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $L_\cdot(\omega)$ und $U_\cdot(\omega)$ nähern sich kontinuierlich aneinander an.

Es gilt

$$L_{\tau^\varepsilon} \to L_{\tau^\star} - \Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^{\tilde{\varepsilon}} < \tau^\star,\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0\}}, \quad \varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0,\ \text{punktweise}.$$

Wegen majorisierter Konvergenz folgt

$$U_0 = \lim_{\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0} E(L_{\tau^\varepsilon}) = E(L_{\tau^\star}) - E\left(\Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^{\tilde{\varepsilon}} < \tau^\star,\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0\}}\right).$$

Daraus folgt, dass $E\left(\Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^{\tilde{\varepsilon}} < \tau^\star,\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0\}}\right) \leq 0$ (andernfalls wäre $E(L_{\tau^\star}) > U_0$). Zudem folgt, dass $E(L_{\tau^\star}) = U_0$ genau dann, wenn $E\left(\Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^{\tilde{\varepsilon}} < \tau^\star,\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0\}}\right) = 0$.

Wegen $U \geq L$ und $E(U_{\tau^\star}) \leq U_0$ (optional sampling theorem) muss also unter der Bedingung (4.12)

$$P(U_{\tau^\star} = L_{\tau^\star}) = 1$$

gelten. Da zudem $\tau^\star \leq \tau^0$ folgt (4.13). $\square$

Die Stoppzeit $\tau^\star$ ist also genau dann **keine** optimale Stoppzeit, wenn Fall (2) mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt und L gerade zum Annäherungszeitpunkt einen negativen Sprung machen kann mit $E\left(\Delta L_{\tau^\star} 1_{\{\tau^\varepsilon < \tau^\star,\ \forall \varepsilon > 0\}}\right) < 0$.

Beispiel 4.12 (Black-Scholes Modell)**.** *Im Black-Scholes Modell lässt sich mit dem Martingaldarstellungssatz der Martingalanteil M der Doob-Meyer-Zerlegung (4.10) der Snell-Einhüllenden U als stochastisches Integral $\varphi \bullet S$ schreiben. Damit folgt*

$$U_0 + \varphi \bullet S = U - A \geq U \geq L$$

und φ ist ein Hedge für L zum Startkapital U_0. Wenn der Preis des amerikanischen Claims L strikt größer als U_0 ist, kann also der Verkäufer einen risikolosen Gewinn erzielen. Dies nennt man dann **Verkäuferarbitrage**. *Umgekehrt folgt aus der Minimalität der Snell-Einhüllenden, dass U_0 minimales Startkapital ist, um L zu hedgen. Mehr noch, für $v_0 < U_0$ kann der Käufer eine Arbitrage erzielen. Dies nennt man* **Käuferarbitrage**. *Es gäbe dann nämlich eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}_0$ mit $E_Q(L_\tau) > v_0$. Der Käufer könnte parallel zu der Longposition in der amerikanischen Option eine Shortposition im europäischen Claim L_τ aufmachen. Dies würde zum Zeitpunkt 0 den Gewinn $E_Q(L_\tau) - v_0$ einbringen. Zum Zeitpunkt τ könnte die amerikanische Option ausgeübt werden und die beiden Zahlungsverpflichtungen würden sich gegeneinander aufheben. Die Bewertung amerikanischer Optionen im Black/Scholes-Modell führt also auf das Lösen von Stopp-Problemen der Form*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_Q(L_\tau). \tag{4.19}$$

Für amerikanische Call-Optionen (ohne Dividenden) gibt es eine einfache Lösung des Stopp-Problems (4.19). Die optimale Ausübungsstrategie des Calls besteht darin, die Option erst zum Verfallszeitpunkt T auszuüben. Damit stimmt der arbitragefreie Preis des amerikanischen Calls mit dem des europäischen Calls überein[‡].

Proposition 4.13. *Seien $r, K \geq 0$. Es gilt*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E_Q(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+) = E_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+).$$

Beweis. Sei $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& E_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+) \\
= \; & E_Q\left[E_Q((e^{-rT}S_T - e^{-rT}K)^+ | \mathcal{F}_\tau)\right] \\
\geq \; & E_Q\left[(E_Q(e^{-rT}S_T | \mathcal{F}_\tau) - e^{-rT}K)^+)\right] \\
= \; & E_Q\left[(e^{-r\tau}S_\tau - e^{-rT}K)^+\right] \\
\geq \; & E_Q\left[e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+\right].
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte und die zweite gilt wegen $r, K \geq 0$. □

[‡]Man beachte jedoch, dass dies nur gilt, wenn keine Dividenden an die Aktienbesitzer ausgeschüttet werden. Zahlt die Firma etwa eine zeitkontinuierliche Dividende mit Rate $S_t d$ pro Aktie, $d \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, dann ist nicht mehr der diskontierte Preisprozess $e^{-rt}S_t$ ein Q-Martingal sondern der Prozess $e^{-rt}S_t + d \cdot \int_0^t e^{-ru} S_u \, du$. S hat somit eine niedrigere Drift, was dazu führt, dass es sich lohnen kann (und für hohe Aktienpreise sich auch lohnt), den Call vorzeitig auszuüben.

4.2 Amerikanische Verkaufsoption (American put)

Definition 4.14. *Für* $0 \leq s \leq t \leq \infty$ *sei* $\mathcal{T}_{s,t}$ *die Menge aller* $[s,t]$*-wertigen Stoppzeiten, d.h.*

$$\mathcal{T}_{s,t} := \{\tau \in \mathcal{T} \mid s \leq \tau \leq t\}.$$

Setze

$$\mathcal{T}_t := \mathcal{T}_{t,T}$$

Nun wollen wir die amerikaische Put Option im BS-Modell näher untersuchen. $L = L^x$ ist also gegeben durch

$$L_t^x = e^{-rt}(K - S_t^x)^+, \quad t \in [0,T],$$

wobei $r \in \mathbb{R}_+$ und

$$S_t^x = x \exp\left(rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right), \quad t \geq 0.$$

Die Abbildung $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bezeichne den Startpreis der Put Option als Funktion des Startpreises x der Aktie und der Laufzeit T, d.h.

$$P(x,T) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E_Q\left(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+\right).$$

P wird auch als **Wertfunktion** bezeichnet. Es gilt

$$U_t^x = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+ \mid \mathcal{F}_t) = e^{-rt} P(S_t^x, T-t). \tag{4.20}$$

Anschaulich würde man argumentierten, dass aufgrund der Markoveigenschaft des Aktiepreisprozesses S^x auch der Optionspreisprozess U Markov ist und sein Wert zum Zeitpunkt t mit einer "neu aufgelegten" Option mit Laufzeit $T - t$ übereinstimmen muss (um diese mit U_t vergleichbar zu machen, diskontiert man auf den Zeitpunkt 0). Dieses Argument ist allerdings etwas wackelig. So sind zum Beispiel abgestoppte Prozesse $(S^x)^\tau$, $\tau \in \mathcal{T}$ nicht mehr notwendigerweise Markov. S_t^x eingesetzt in die "Wertfunktion" $P(\cdot, T-t)$ bedeutet, dass man zum Zeitpunkt t ein völlig neues Stoppproblem betrachtet (mit Startpreis S_t^x). Andererseits gehen in den Ausdruck $U_t^x = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_Q(L_\tau^x \mid \mathcal{F}_t)$ auch Stoppzeiten ein, die von der Information $\mathcal{F}_t$ nicht nur über den aktuellen Preis S_t^x abhängen. Allerdings sind diese "zusätzlichen" Stoppzeiten für das Optimum nicht wichtig, da gegeben S_t^x die Information $\mathcal{F}_t$ für die zukünftige Preisentwicklung von S^x nicht relevant ist. Bei der optimalen Stoppstrategie aus $\mathcal{T}_t$ bedingt man daher *nicht* auf diese zusätzliche Information.[§]

[§]Ein formaler Beweis von (4.20) findet sich in El Karoui, Lepeltier, Millet, A Probabilistic Approach of the Reduite, Probability and Mathematical Statistics 13, 97-121,1992, siehe Theorem 3.4 dort. Dies ist eng verbunden mit sog. randomisierten Stoppzeiten. Bei randomisierten Stoppzeiten darf man seine Stoppentscheidung zusätzlich zum Verlauf der Zustandsvariablen (hier Aktienpreis) noch von dem Ausgang stochastisch unabhängiger Experimente abhängig machen.

Wegen (4.20) und der Stetigkeit des Auszahlungsprozesses L folgt aus Theorem 4.11, dass für jedes $t \in [0,T]$ die Stoppzeit

$$\tau_t := \inf\{s \geq t \mid P(S_s^x, T-s) = (K - S_s^x)^+\}.$$

das Supremum in (4.20) annimmt. Für $P(x,T)$ ist kein analytischer Ausdruck bekannt. Wenn man $P(x,T)$ kennen würde, wäre τ_t einfach zu bekommen und umgekehrt. Leider sind aber beide nicht bekannt. Im Folgenden wollen wir Eigenschaften der Wertfunktion untersuchen.

Lemma 4.15. *(i)* $x \mapsto P(x,T)$ *ist konvex und monoton fallend.*

(ii) $T \mapsto P(x,T)$ *ist monoton wachsend.*

(iii) $P(x,T) > 0$, $\forall T > 0$.

(iv) Für alle $T \in \mathbb{R}_+$ *ist* $x \mapsto P(x,T)$ *Lipschitz-stetig mit Konstante* 1, *also*

$$0 \geq P(y,T) - P(x,T) \geq -(y-x) \quad \forall 0 \leq x \leq y < \infty.$$

(v) $(x,T) \mapsto P(x,T)$ *ist stetig.*

Beweis. Sei S^x eine geometrische Brownsche Bewegung mit $S_0^x = x$. D.h.

$$S_t^x = x \exp\left(rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right), \quad t \geq 0.$$

(i) Es gilt

$$P(x,T) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E_Q\left(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+\right) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E_Q\left(e^{-r\tau}(K - xS_\tau^1)^+\right)$$

Die Abbildung $x \mapsto (K - xs)^+$ ist für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ konvex. Somit ist auch für festes $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ der Erwartungswert $E_Q\left(e^{-r\tau}(K - xS_\tau^1)^+\right)$ konvex in x[¶]. Sumprema konvexer Funktionen sind konvex[‖]. Somit ist $x \mapsto P(x,T)$ konvex. Die gleiche Beweiskette gilt für “fallend” statt “konvex”.

[¶]Betrachte die Abbildung $y \mapsto Eg(X,y)$, wobei X eine Zufallsvariable ist und $g(x,\cdot)$ konvex. Für $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$E\left[g(X, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\right] \leq E\left[\lambda g(X,y_1) + (1-\lambda)g(X,y_2)\right] = \lambda E\left[g(X,y_1)\right] + (1-\lambda)E\left[g(X,y_2)\right].$$

[‖]Sei I eine beliebige Indexmenge und f_i, $i \in I$, konvexe Funktionen. Für $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f_i(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f_i(y_1) + (1-\lambda)f_i(y_2) \leq \lambda \sup\{f_j(y_1) \mid j \in I\} + (1-\lambda)\sup\{f_j(y_2) \mid j \in I\}$$

für alle $i \in I$ und damit

$$\sup\{f_i(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \mid i \in I\} \leq \lambda \sup\{f_j(y_1) \mid j \in I\} + (1-\lambda)\sup\{f_j(y_2) \mid j \in I\}.$$

(ii) Monotonie in der Laufzeit folgt sofort aus der Definition und $\mathcal{T}_{0,T_1} \subset \mathcal{T}_{0,T_2}$ für $T_1 \leq T_2$.

(iii) Es gilt

$$P(x,T) \geq E_Q(e^{-rT}(K - S_T^x)^+) \geq e^{-rT}\frac{K}{2}Q\left(S_T^x \leq \frac{K}{2}\right) > 0, \quad \forall x \geq 0, T > 0.$$

(iv) Für $x \leq y$ und beliebiges $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_Q(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+) - E_Q(e^{-r\tau}(K - S_\tau^y)^+) \\ &\leq E_Q(e^{-r\tau}(S_\tau^y - S_\tau^x)) \\ &= (y-x)E_Q(e^{-r\tau}S_\tau^1) \\ &= y - x, \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei in die letzte Gleichung eingeht, dass der diskontierte Preisprozess $(e^{-rt}S_t^1)_{0\leq t\leq T}$ ein Q-Martingal ist. Aus (4.21) folgt, dass

$$0 \leq P(x,T) - P(y,T) \leq y - x.$$

(v) Da $x \mapsto P(x,T)$ Lipschitz-stetig ist mit Konstante 1 (also Konstante insbesondere unabhängig von T), genügt es, die Stetigkeit von $T \mapsto P(x,T)$ zu zeigen.

Sei $0 \leq T_1 \leq T_2 < \infty$. Es gilt (nach (ii)) $P(x,T_1) \leq P(x,T_2)$. Sei $\tau \in \mathcal{T}_{0,T_2}$ eine beliebige Ausübungsstrategie für die Option mit Laufzeit T_2. Dann gilt $\tau \wedge T_1 \in \mathcal{T}_{0,T_1}$ und

$$\begin{aligned} &E_Q(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+) - E_Q(e^{-r(\tau\wedge T_1)}(K - S_{\tau\wedge T_1}^x)^+) \\ &\leq E_Q((e^{-r(\tau\wedge T_1)}K - e^{-r\tau}S_\tau^x)^+ - E_Q(e^{-r(\tau\wedge T_1)}(K - S_{\tau\wedge T_1}^x)^+) \\ &\leq E_Q(|e^{-r\tau}S_\tau^x - e^{-r(\tau\wedge T_1)}S_{\tau\wedge T_1}^x|) \\ &\leq E_Q(|e^{-rT_2}S_{T_2}^x - e^{-rT_1}S_{T_1}^x|). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da der Prozess $t \mapsto \left(e^{-rt}S_t^x - e^{-r(t\wedge T_1)}S_{t\wedge T_1}^x\right)$ ein Q-Martingal und damit wegen der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$t \mapsto \left|e^{-rt}S_t^x - e^{-r(t\wedge T_1)}S_{t\wedge T_1}^x\right|$$

ein Q-Submartingal ist. Aus (4.22) folgt

$$|P(x,T_2) - P(x,T_1)| \leq E_Q(|e^{-rT_2}S_{T_2}^x - e^{-rT_1}S_{T_1}^x|) \to 0, \quad \text{für } T_2 \downarrow T_1$$

und damit die Behauptung. Obige Konvergenz für $T_2 \downarrow T_1$ folgt aus punktweiser Konvergenz und der Tatsache, dass jedes nichtnegative Submartingal auf einem kompakten Zeitinterval betrachtet von Klasse (D) ist**. □

Definition 4.16. *Seien*

$$\mathcal{C} := \{(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid P(x,t) > (K-x)^+\}$$

$$\mathcal{D} := \{(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid P(x,t) = (K-x)^+\}$$

$\mathcal{C}$ wird Fortsetzungsbereich ("continuation region") und $\mathcal{D}$ Stoppbereich ("stopping region") genannt.

**Letzteres lässt sich genau wie im Beweis von Proposition 4.8 zeigen.

Da $P(x,t) \geq (K-x)^+$ gilt natürlich $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Man beachte, dass t hier die Restlaufzeit der Option bezeichnet. Wäre t die verstrichene Zeit und T die Fälligkeit der Option, müsste man also $T-t$ in das zweite Argument einsetzen.

Lemma 4.17. *Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und*

$$\mathcal{C}_t := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (x,t) \in \mathcal{C}\} = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid P(x,t) > (K-x)^+\}$$

der t-Schnitt der Menge $\mathcal{C}$. Dann ist für $t > 0$ $\mathcal{C}_t$ von der Form

$$\mathcal{C}_t = (b_t, \infty) \tag{4.23}$$

für ein $b_t \in [0,K)$ (es gilt natürlich $\mathcal{C}_0 = \emptyset$). Im Fall $r > 0$ gilt $b_t > 0$ für $t > 0$. Für $r = 0$ gilt $b_t = 0$ für $t > 0$.

Beweis. Natürlich wäre b_t durch (4.23) eindeutig bestimmt. Wir zeigen, dass

$$b_t := \inf \mathcal{C}_t$$

tatsächlich (4.23) erfüllt. Wir müssen zeigen

(1) $b_t \notin \mathcal{C}_t$

(2) Aus $y > x \in \mathcal{C}_t$ folgt $y \in \mathcal{C}_t$

Zu (1): Im Falle $b_t = 0$ folgt dies aus $P(0,t) = K$. Für $b_t > 0$ gilt nach Definition von b_t, dass $P(x,t) = (K-x)^+$ für alle $x \in (0, b_t)$ also aufgrund der Stetigkeit von P auch $P(b_t, t) = (K - b_t)^+$, d.h. $b_t \notin \mathcal{C}_t$.

Zu (2): Sei $y > x \in \mathcal{C}_t$. Nach Lemma 4.15(iv) gilt

$$P(y,t) \geq P(x,t) - (y-x) > (K-x)^+ - (y-x) \geq K - y$$

und wegen $P(y,t) > 0$ (Lemma 4.15(iii)) auch $P(y,t) > (K-y)^+$, d.h. $y \in \mathcal{C}_t$. Aus (1) und (2) folgt, dass $\mathcal{C}_t$ nur von der Gestalt (4.23) sein kann. Wegen Lemma 4.15(iii) ist $P(K,t) > 0 = (K-K)^+$, d.h. $K \in \mathcal{C}_t$. Aus (4.23) folgt $b_t < K$.

Für $r = 0$ kann man wie beim Call argumentieren. Es ist optimal, erst zum Zeitpunkt T auszuüben, also $b_t = 0$ (man beachte, dass der Nullpunkt nie erreicht wird).

Sei $r > 0$. Den Beweis, dass dann $b_t > 0$ für alle Restlaufzeiten $t > 0$ können wir an dieser Stelle noch nicht führen und verschieben dies daher auf den Beweis von Lemma 4.22, wo zunächst das Problem mit unendlicher Laufzeit behandelt wird.

□

Anschaulich kann man bereits jetzt argumentieren, dass für $r > 0$ der Prozess $e^{-rt}(K - S_t)$ ein striktes Supermartingal ist und dass für sehr kleine Werte von S_t die Wahrscheinlichkeit jemals aus dem Geld zu kommen klein ist, also $e^{-rt}(K-S_t)^+$ mit $e^{-rt}(K-S_t)$ mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit bis T übereinstimmt.

Proposition 4.18. *Die Abbilding $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to (0, K)$ mit $t \mapsto b_t$ ist monoton fallend.*

Bei größerer (Rest-)Laufzeit muss der Aktienpreis also niedriger sein, damit die Verkaufsoption ausgeübt wird.

Beweis. Weil $t \mapsto P(x,t)$ wachsend ist, gilt $\mathcal{C}_{t_1} \subset \mathcal{C}_{t_2}$ für alle $t_1 \leq t_2$, also

$$b_{t_1} = \inf \mathcal{C}_{t_1} \geq \inf \mathcal{C}_{t_2} = b_{t_2}.$$

□

4.2.1 Ewige Put-Option

Explizite Lösungen erhält man für die entsprechende Option mit *unendlicher Laufzeit* ("perpetual put"). Probleme mit unendlicher Laufzeit sind einfacher, da die Restlaufzeit t nicht in die Wertfunktion P eingeht. Ein Put mit unendlicher Laufzeit ist nach einer Woche immer noch ein Put mit unendlicher Laufzeit (wobei eine entsprechende Aussage für einen dreimonatigen Put sicher falsch wäre).

Der Auszahlungsprozess L ist also gegeben durch

$$L_t = e^{-rt}(K - S_t^x)^+, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad L_\infty = 0$$

wobei fortan $\mathbf{r > 0}$. Da die diskontierte Auszahlung L für $t \to \infty$ fast sicher gegen 0 konvergiert, könnten wir durch eine Zeitransformation, d.h. eine (monoton wachsende) Bijektion $\Gamma : [0,T] \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ das Problem auf ein Stoppproblem in endlicher Zeit zurückführen. Wir betrachten also den Auszahlungsprozess $\widetilde{L}$ mit

$$\widetilde{L} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}_+ \text{ mit } \widetilde{L}(\omega, t) = L(\omega, \Gamma(t)) \tag{4.24}$$

und die Filtration $\widetilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\Gamma(t)}$.

Da L für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, existiert der linke Limes von $\widetilde{L}$ an der Stelle T und ist 0 (in Formeln: $\widetilde{L}_{T-} = \lim_{t\to\infty} L_t = 0$), insbesondere ist $\widetilde{L}$ càdlàg/stetig. Die Auszahlung zum Zeitpunkt T im endlichen Problem wird also mit der Auszahlung für $\tau = \infty$ im unendlichen Fall identifiziert und soll hier 0 sein. **Damit können wir die für einen endlichen Zeithorizont entwickelte Theorie des optimalen Stoppens direkt übertragen** (dies ist i.A. nicht möglich, wenn $\lim_{t\to\infty} L_t$ nicht existiert, also etwa im Fall einer Brownschen Bewegung, oder die Stoppzeit nicht auch den Wert $+\infty$ annehmen darf).

Wir betrachten also das Problem

$$P(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} E_Q\left(e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+\right), \tag{4.25}$$

wobei

$$S_t^x = x \exp\left(rt + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right), \quad t \geq 0$$

mit der Konvention $e^{-r\infty}(K - S_\infty^x)^+ := 0$ und $\mathcal{T}_{0,\infty} := \{\tau \text{ ist } [0,\infty]\text{-wertige Stoppzeit}\}$.

Wegen $\lim_{t\to\infty} L_t = 0 =: L_\infty$ ist der zeittransformierte Prozess stetig. Damit wissen wir bereits, dass das Suprumum in (4.25) angenommen wird.

Bemerkung 4.19. *Beachte, dass hier τ auch den Wert ∞ annehmen darf. Auch wenn dies möglicherweise zu der Auszahlung 0 führt, kann es durchaus Sinn machen, unendlich lange auf ein günstiges Ereignis zu warten. Bei der Put-Option macht man dies im Fall $r > \frac{\sigma^2}{2}$, der bedeutet, dass $S_t^x \to \infty$, $t \to \infty$. Eine Put-Option, die aus dem Geld ist (d.h. $S_t^x > K$), kann dies mit positiver Wahrscheinlichkeit während der gesamten Laufzeit bleiben. Müsste die Stoppzeit τ Werte in $\mathbb{R}_+$ annehmen, so wäre man genötigt, die Option irgendwann auszuüben, auch wenn sie nicht im Geld ist. Dies käme einer Aufgabe der Option gleich, was natürlich nicht optimal sein kann. Durch $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}(K - S_t^x)^+ = 0$ ist aber sichergestellt, dass das Supremum durch Stoppzeiten mit Wertebereich $\mathbb{R}_+$ zumindest approximert werden kann.*

Ähnlich zum Fall mit endlicher Laufzeit (vgl. Lemma 4.15) gilt folgendes.

Lemma 4.20. *(i) $x \mapsto P(x)$ ist konvex und monoton fallend.*

(ii) $P(x) > 0$.

(iii) $x \mapsto P(x)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1, also

$$0 \geq P(y) - P(x) \geq -(y - x) \quad \forall 0 \leq x \leq y < \infty.$$

Beweis. Analog zu Lemma 4.15. □

Analog zum Fall mit endlicher Laufzeit definieren wir wieder Fortsetzungs- und Stoppbereich

Definition 4.21. *Seien*

$$\mathcal{C}_\infty := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid P(x) > (K - x)^+\}$$

$$\mathcal{D}_\infty := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid P(x) = (K - x)^+\}$$

Lemma 4.22. *Es gilt analog*

$$\mathcal{C}_\infty = (b_\infty, \infty)$$

und

$$\mathcal{D}_\infty = \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{C}_\infty = [0, b_\infty]$$

für ein $b_\infty \in (0, K)$.

Beweis. Der Beweis läuft wie in Lemma 4.17 mit endlicher Laufzeit. Es bleibt nur noch $b_\infty > 0$ zu zeigen.

Bei unendlicher Laufzeit können wir jedoch sofort ausschließen, dass die optimale Ausübungsgrenze 0 ist (ohne sie explizit zu bestimmen, was wir später machen werden). Wäre sie nämlich 0, dann würde mit Wahrscheinlichkeit 1 nie ausgeübt, was nicht optimal sein kann. Für dieses Argument brauchen wir, dass eine optimale Stoppzeit existiert, was mit der Zeittransformation in (4.24) im Fall $r > 0$ gezeigt wurde. Im Fall $r = 0$ gibt es dagegen nur ε-optimale Stoppzeiten im Problem mit unendlicher Laufzeit.

Aus $b_\infty > 0$ und $b_t \geq b_\infty$ folgt dann auch $b_t > 0$ für alle endlichen Restlaufzeiten $t > 0$. Man beachte, dass wir $b_t = 0$ für ein $t > 0$ nicht direkt ausschließen konnten, da bei endlicher Laufzeit, dann immer noch eine Ausübung zum Fälligkeitzeitpunkt möglich ist, dies also nicht mit einer verschwindenden Auszahlung einhergeht. $\square$

Die folgende Proposition werden wir später für die Bestimmung des Put-Preises benötigen. Die mathematische Aussage ist natürlich von unabhängigem Interesse.

Proposition 4.23. *Sei B eine Standard-Brownsche Bewegung. Definiere für $\mu \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$ die Stoppzeit*

$$\tau_{b,\mu} := \inf\{t \geq 0 \mid \mu t + B_t \geq b\}.$$

Es gilt

$$E\left[\exp\left(-\lambda \tau_{b,\mu}\right) 1_{\{\tau_{b,\mu}<\infty\}}\right] = \exp\left(\mu b - b\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\right), \quad \lambda \geq 0. \tag{4.26}$$

Speziell gilt

$$P(\tau_{b,\mu} < \infty) = \begin{cases} 1, & : \mu \geq 0 \\ e^{-2b|\mu|}, & : \mu < 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Die Abbildung: $\mathbb{R}_+ \to [0,1]$, $\lambda \to E\left[\exp\left(-\lambda\tau_{b,\mu}\right) 1_{\{\tau_{b,\mu}<\infty\}}\right]$ wird **Laplace-Transformierte** *der nichtnegativen Zufallsvariablen $\tau_{b,\mu}$ genannt.*

Beweis. (4.27) ist nichts anderes als (4.26) für $\lambda = 0$. Des weiteren reicht es aus, (4.26) für $\lambda > 0$ zu zeigen. Die entsprechende Aussage für $\lambda = 0$ folgt dann aus dem Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ (auf der linken Seite von (4.26) ist wegen $\exp\left(-\lambda\tau_{b,\mu}\right) \leq 1$ majorisierte Konvergenz anwendbar).

Sei also $\lambda > 0$. Betrachte den Prozess

$$\exp(a(B_t + \mu t) - \lambda t), \quad t \geq 0.$$

Damit dieser Prozess ein Martingal wird, muss $a \in \mathbb{R}$ die quadratische Gleichung

$$\frac{a^2}{2} + \mu a - \lambda = 0$$

lösen. Da $\lambda > 0$ gibt es zwei Lösungen. Wir betrachten die positive und bezeichen sie mit a_1, d.h.

$$a_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda},$$

und mit M^λ bezeichnen wir das Martingal

$$M_t^\lambda := \exp\left(a_1(B_t + \mu t) - \lambda t\right), \quad t \geq 0.$$

Damit folgt aus dem *Optional Sampling Theorem* angewandt auf die beschränkten Stoppzeiten $\tau_{b,\mu} \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} 1 &= E\left(M_0^\lambda\right) \\ &= E\left(M_{\tau_{b,\mu}\wedge n}^\lambda\right) \\ &= E\left(\exp(a_1 b - \lambda \tau_{b,\mu}) 1_{\{\tau_{b,\mu}<n\}}\right) + E\left(\exp(a_1(B_n + \mu n) - \lambda n) 1_{\{n \leq \tau_{b,\mu}\}}\right). \end{aligned}$$

Der erste Erwartungswert konvergiert mit dem Satz von der monotonen Konvergenz:

$$E\left(\exp(a_1 b - \lambda \tau_{b,\mu}) 1_{\{\tau_{b,\mu}<n\}}\right) \to E\left(\exp(a_1 b - \lambda \tau_{b,\mu}) 1_{\{\tau_{b,\mu}<\infty\}}\right), \quad n \to \infty.$$

Für den zweiten gilt

$$\exp(a_1(B_n + \mu n) - \lambda n) 1_{\{n \leq \tau_{b,\mu}\}} \leq \exp(a_1 b - \lambda n) \leq \exp(a_1 b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit folgt aus majorisierter Konvergenz:

$$E(\exp(a_1(B_n + \mu n) - \lambda n) 1_{\{n \leq \tau_{b,\mu}\}}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

also

$$1 = E\left(\exp(a_1 b - \lambda \tau_{b,\mu}) 1_{\{\tau_{b,\mu}<\infty\}}\right)$$

und damit

$$E\left[\exp\left(-\lambda \tau_{b,\mu}\right) 1_{\{\tau_{b,\mu}<\infty\}}\right] = \exp\left(-a_1 b\right) = \exp\left(\mu b - b\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\right).$$

□

Theorem 4.24. *Die Wertfunktion des Perpetual American Put ist gegeben durch*

$$P(x) = \begin{cases} K - x, & : x \leq b_\infty \\ (K - b_\infty)\left(\frac{b_\infty}{x}\right)^\lambda & : x > b_\infty. \end{cases}$$

mit $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$ *und*

$$b_\infty = \frac{\lambda}{\lambda + 1} K. \tag{4.28}$$

Interpretation: Wenn r klein oder σ groß, lohnt es sich lange zu warten.

Beweis. Wir müssen nach Lemma 4.22 nur noch zeigen, dass b_∞ in der Tat durch (4.28) gegeben ist und dass die erwartete diskontierte Auszahlung, wenn man in $x > b_\infty$ startet und beim erstmaligen Erreichen von b_∞ abstoppt $(K - b_\infty)\left(\frac{b_\infty}{x}\right)^\lambda$ beträgt. Um dies zu verifizieren, müssen wir nur noch (für festes $x \in \mathbb{R}_+$) den folgenden Ausdruck über $z \in \mathbb{R}$ maximieren:

$$u(z) := E_Q\left(e^{-r\tau^z}(K - S^x_{\tau^z})^+\right),$$

wobei

$$\tau^z := \inf\{t \geq 0 \mid S^x_t \leq z\}$$

wieder mit der Konvention, dass $e^{-r\infty}(K - S^x_\infty)^+ := 0$.

Fall 1: $z \geq x$, damit $\tau^z = 0$. Es folgt $u(z) = (K - x)^+$.

Fall 2: $z < x$. Es folgt $S^x_{\tau^z} = z$ auf der Menge $\{\tau^z < \infty\}$ und

$$u(z) = E_Q\left(e^{-r\tau^z}(K - S^x_{\tau^z})^+\right) = (K - z)^+ E_Q\left(e^{-r\tau^z} 1_{\{\tau^z < \infty\}}\right).$$

Beachte, dass $S^x_t = x\exp\left(rt + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$. Setze $\gamma := \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tau^z &= \inf\{t \geq 0 \mid S^x_t \leq z\} \\
&= \inf\{t \geq 0 \mid rt + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t \leq \ln\left(\frac{z}{x}\right)\} \\
&= \inf\{t \geq 0 \mid -W_t - \gamma t \geq \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{z}\right)\}
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der vorausgegangenen Proposition (für die Laplace-Transformierte dieser Stoppzeit)

$$\begin{aligned}
E_Q\left(e^{-r\tau^z} 1_{\{\tau^z < \infty\}}\right) &= \exp\left(-\gamma\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{z}\right) - \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x}{z}\right)\sqrt{\gamma^2 + 2r}\right) \\
&= \exp\left((\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2r})\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{z}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2r} = \frac{2r}{\sigma}$ ist dann $\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2r}}{\sigma} = \frac{2r}{\sigma^2} = \lambda$ und damit

$$u(z) = (K - z)^+\left(\frac{z}{x}\right)^\lambda, \quad z \leq x.$$

Fassen wir die Fälle 1 und 2 zusammen, so folgt

$$u(z) = \begin{cases} (K - x)^+, & : z \geq x \wedge K \\ (K - z)\left(\frac{z}{x}\right)^\lambda & : z < x \wedge K \end{cases}$$

(zu Fall 1 wird in der ersten Zeile noch $K \leq z < x$ hinzugenommen, was jedoch offensichtlich die Auszahlung 0 liefert, die zweite Zeile ist dann ein Unterfall von Fall 2).

Es folgt für $z < x \wedge K$

$$u'(z) = \frac{z^{\lambda-1}}{x^\lambda}(\lambda K - (\lambda+1)z).$$

Ist $x > z^* := \frac{\lambda}{\lambda+1}K$, dann ist u maximal in z^* und

$$u(z^*) = (K - z^*)\left(\frac{z^*}{x}\right)^\lambda.$$

Ist dagegen $x \leq z^*$, so ist u maximal in z^* und $u(x) = (K-x)^+$ (stoppe sofort). $\square$

5 Zinsmodelle

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Zinsmarktmodellen beschäftigen. Die Besonderheit von Zinsmarktmodellen besteht darin, dass sie typischerweise als Märkte mit unendlich vielen Wertpapieren idealisiert werden. Dies ist der (einzige) Grund, weswegen sie nicht in den bisherigen Rahmen passen. Es entstehen neue konzeptionelle und mathematische Probleme – etwa: "wie sehen Handelsstrategien bei einem Kontinuum von Wertpapieren aus ?". Im Rahmen unserer kurzen Einführung werden wir aber Problemen dieser Art aus dem Weg gehen.

Abweichend von der bisherigen Notation bezeichnen wir den Zeithorizont mit $\overline{T} \in \mathbb{R}_+$. Wir setzen die Existenz eines handelbaren **Geldmarktkontos** voraus, das gegeben ist durch

$$S_t^0 := \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right), \quad t \in [0, \overline{T}] \tag{5.1}$$

für einen vorhersehbaren und integrierbaren Prozess $r : \Omega \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$. Für **jedes** $T \in [0, \overline{T}]$ existiere eine handelbare **Nullkuponanleihe mit Fälligkeit** T, genannt T-**Bond**, die ein Wertpapier ist, das zum Zeitpunkt T den Wert 1 besitzt. Den Preisprozess bezeichnen wir mit

$$B(\cdot, T) = (B(t,T))_{t \in [0,T]}, \quad \text{wobei } B(T,T) = 1.$$

Bemerkung 5.1. *"Nullkupon" bedeutet, dass innerhalb der Laufzeit keine Auszahlungen stattfinden – also keine* **Zinskupons** *vereinbart sind. Der* **Emittent** *des Bonds verpflichtet sich lediglich, zum Zeitpunkt T eine Geldeinheit an den Halter des Bonds zu zahlen. Wegen der allgemein positiven Zeitpräferenz ist zu erwarten, dass die zukünftige Zahlung der Höhe 1 zu einem früheren Zeitpunkt weniger wert ist, d.h. $B(t,T) \leq 1$ für $t \leq T$. Der Ausgabe- bzw. Handelspreis $B(t,T)$ bestimmt sich natürlich am Markt.*

Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass der Emittent nicht ausfallen kann, also eine unendlich gute Bonität besitzt.

Bemerkung 5.2. *Im Gegensatz zu $B(\cdot,T)$ ist S^0 kein Wertpapier, das in der Praxis vorkommt. Es lässt sich aber durch sukzessives Investment in Bonds mit sehr kurzer Laufzeit approximativ replizieren:*

Heuristik: *Sei $\varepsilon > 0$ klein. Starte zum Zeitpunkt 0 mit* **einer** *Geldeinheit und*

$$\text{kaufe} \quad \frac{1}{B(0,\varepsilon)} \quad \text{Bonds mit Laufzeit } \varepsilon.$$

Zum Zeitpunkt ε verwende den Erlös $\frac{1}{B(0,\varepsilon)}$ und

$$\text{kaufe} \quad \frac{1}{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{B(\varepsilon,2\varepsilon)} \quad \text{Bonds mit Restlaufzeit } \varepsilon.$$

usw. Zum Zeitpunkt $n\varepsilon$ verwende den Erlös $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{B(k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)}$ und

$$\text{kaufe} \quad \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{B(k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)} \quad \text{Bonds mit Restlaufzeit } \varepsilon.$$

Zum Zeitpunkt t beträgt der Vermögensprozess zu dieser Strategie etwa

$$\prod_{k=0}^{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} \frac{1}{B(k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)} \tag{5.2}$$

Genügend Stetigkeit des Modells vorausgesetzt, würde man erwarten, dass (5.2) für $\varepsilon \to 0$ konvergiert. Wir würden dann S_t^0 als den Limites von (5.2) definieren. Da wir obige Heuristik nicht ohne weiteres rigoros machen können, definieren wir S^0 aber formal durch (5.1) mit einer vorgegebenen kurfristigen Zinsrate $(r_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$. und setzen die Handelbarkeit von S^0 (neben der Handelbarkeit von $B(\cdot,T)$) voraus.

In einem konkreteren Modell, das später eingeführt wird, kann gezeigt werden, dass der Vermögensprozess (5.2) aus der "Roll-over Strategie" für $\varepsilon \to 0$ in der Tat konvergiert und S^0 sich als Grenzprozess definieren lässt. S^0 besitzt zudem die Darstellung $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_s\,ds)$ für einen vorhersehbaren Prozess $(r_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$.

Bemerkung 5.3. *Es scheint in diesem Modell mehrere natürliche Numeraires zu geben. Welches Wertpapier als risikolose Anlage empfunden wird, hängt nämlich stark vom Anlagehorizont ab, d.h. dem Zeitpunkt zu dem die Investorin das Wertpapier liquidieren möchte. So garantiert S_t^0 zwar kurzfristig eine risikolose Verzinsung mit Rate r_t (bei einer Diskretisierung der Zeit für eine Periode). Bei einem längeren Investitionszeitraum wird der Wertzuwachs aber zufällig. Andererseits ist der T-Bond für einen Investor, der Geld zum Zeitpunkt T benötigt, natürlich risikolos. Der Prozess $B(\cdot,T)$ wird sich aber vor T i.A. stochastisch verhalten – typischer Weise mit nichtverschwindendem Diffusionsterm, siehe Abschnitt 5.1. Insbesondere ein Bond mit langer Laufzeit kann für einen Investor mit kurzem Anlagehorizont eine sehr spekulative Anlage sein.*

Für feste T sind die Prozesse $B(\cdot, T)$ wie gehabt Semimartingale, insbesondere sind die Pfade $t \mapsto B_\omega(t,T)$ also càdlàg. Des weiteren wird gefordert:

Annahme 5.4. *(i) Die Abbildung $T \mapsto B(t,T)$ sei für festes t (und ω) differenzierbar*

(ii) Wir nehmen an, dass es ein äquivalentes Martingalmaß Q gibt, so dass alle mit S^0 diskontierten Bondpreise

$$\frac{B(\cdot, T)}{S^0} \tag{5.3}$$

auf dem Intervall $[0,T]$ Q-Martingale sind.

Annahme 5.4(ii) ist natürlich eine starke Bedingung. Wir haben bereits in der Einführungsvorlesung gesehen, dass im Fall unendlich vieler Wertpapiere die Existenz eines gemeinsames Maßes, das alle diskontierten Wertpapierpreisprozesse zu Martingalen macht, i.A. **nicht** aus No-Arbitrage-Überlegungen hergeleitet werden kann. Umgekehrt sichert Annahme 5.4(ii) Arbitragefreiheit – zumindest unter der Bedingung, dass man nur mit endlich vielen Bonds handeln darf. Der in Aktienmärkten kritische Unterschied zwischen lokalem und echtem Martingal tritt hier dagegen nicht auf, solange $P(r_t \geq 0,\ \forall t \in [0, \overline{T}]) = 1$, da dann die Prozesse (5.3) beschränkt sind.

Bemerkung 5.5. *Aus den Bondpreisen zum Zeitpunkt t lassen sich schon die Marktzinsen zum Zeitpunkt t für die Anlage während aller späteren Zeiträume $[S,T] \subset [t, \overline{T}]$ bestimmen.*

Shorte dazu zum Zeitpunkt t einen S-Bond und kaufe dafür $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ Anteile an T-Bonds. Wegen

$$+B(t,S) - \frac{B(t,S)}{B(t,T)} B(t,T) = 0$$

ist diese Transaktion zum Zeitpunkt t kostenneutral. Zum Zeitpunkt S muss man eine Geldeinheit bezahlen und zum Zeitpunkt T bekommt man dafür $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ Geldeinheiten.

Man hat mit obiger Strategie im Intervall $[S,T]$ eine Geldeinheit angelegt (gebunden), die sich bis T zu $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$ Geldeinheiten "vermehrt" hat. Der Zinssatz wurde bereits zum Zeitpunkt t fixiert.

Die Forward-Rate L für den Zins im Intervall $[S,T]$ ist also durch

$$1 + L(t,S,T)(T-S) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)}$$

gegeben, d.h.

$$L(t,S,T) = \frac{B(t,S) - B(t,T)}{(T-S)B(t,T)}.$$

Aus den Bondpreisprozessen lassen sich analog eine ganze Reihe weiterer Zinsgeschäfte durch Replikationsargumente *modellunabhängig* ableiten, d.h. das konkrete stochastische Modell geht gar nicht in die Überlegungen ein. Möchte man dagegen Optionen auf zukünftige Zinssätze, Bondpreise etc. bewerten, braucht man wegen der nichtlinearen Auszahlungsstruktur ein konkretes stochastisches Modell.

Hierbei kann man **einfache** Zinsen, die sich auf einen endlichen Zeitraum beziehen von **stetigen** Zinsen unterscheiden, die hypothetisch für ein infinitesimal kleinen Zeitraum gezahlt werden und die aufgrund des Zinseszinseffektes zu einem exponentiellen Wachstum führen.

Außerdem ist zwischen **Spot-Raten** und **Forward-Raten** zu unterscheiden. Bei Spot-Raten beginnt der Anlagezeitraum sofort, während sich Forward-Raten auf Anlagezeiträume beziehen, die erst in der Zukunft beginnen.

Definition 5.6. *Seien* $0 \leq t < S < T \leq \overline{T}$

(1) Unter dem **augenblicklichen kurzfristigen Zins** *verstehen wir* r_t. *Er ist der auf dem Geldmarktkonto im unmittelbar folgenden "infinitesimalen Zeitintervall" gezahlte Zins*[††]

(2) Die einfache, zur Zeit t festgelegte Forward-Rate für $[S, T]$ *heißt* **LIBOR-Forward-Rate** *und ist definiert durch*

$$L(t, S, T) := \frac{B(t, S) - B(t, T)}{(T - S)B(t, T)}$$

(siehe Bemerkung 5.5). LIBOR = London Interbank Offered Rate

(3) Die einfache Spot-Rate für $[t, T]$ *heißt* **LIBOR-Spot-Rate** *und ist definiert als*

$$L(t, T) := L(t, t, T) = \frac{1 - B(t, T)}{(T - t)B(t, T)}.$$

(4) Die stetig verzinste, zur Zeit t festgelegte (durchschnittliche) **Forward-Rate** *für* $[S, T]$ *ist definiert durch*

$$R(t, S, T) := \frac{\ln(B(t, S)) - \ln(B(t, T))}{T - S}.$$

Es gilt also $\exp(R(t, S, T)(T - S)) = B(t, S)/B(t, T)$.

(5) Die zur Zeit t festgelegte **augenblickliche Forward-Rate** *für den Fälligkeitszeitpunkt T ist definiert durch*

$$f(t, T) := \lim_{S \uparrow T} R(t, S, T) = -\frac{d \ln(B(t, T))}{dT}.$$

[††]Zu beachten ist, dass gegeben der Prozess S^0, die Rate $t \mapsto r_t$ zunächst nur bis auf eine Lebesgue-Nullmenge in $[0, \overline{T}]$ eindeutig ist.

Im Englischen: (1) short rate (2) LIBOR forward rate (3) LIBOR spot rate (4) continuously compounded forward rate (5) instantaneous forward rate

Bemerkung 5.7. *Die Forward-Rate $f(t,T)$ entspricht dem "vom Markt erwarteten" zukünftigen Zins für den infinitesimalen Zeitraum $[T, T+ds]$, d.h. die "Erwartung" wird aus den momentanen Marktpreisen gewonnen (ggf. enthält der Marktpreis auch eine Risikoprämie). Für die Methodik der Finanzmathematik bedeutet dies, dass der Erwartungswert bzgl. eines Martingalmaßes Q und nicht bzgl. des tatsächlichen Maßes P gebildet wird. Trotzdem ist man aber an einem stochastischen Modell für die Dynamik $t \mapsto f(t,T)$,,unter P" interessiert !*

Aus Annahme 5.4(i) und der Definition von f folgt, dass

$$\int_t^T f(t,s)\,ds = -\int_t^T \frac{d\ln(B(t,s))}{ds}\,ds = \ln(B(t,t)) - \ln(B(t,T)) = -\ln(B(t,T))$$

und damit

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right). \tag{5.4}$$

Die Abbildung

$$T \mapsto R(t,t,T) = -\frac{\ln(B(t,T))}{T-t}$$

wird als **Zinsstrukturkurve** (zum Zeitpunkt t) bezeichnet (wobei der durchschnittliche stetige Zins eines Bonds i.A. in den durchschnittlichen Jahreszins umgerechnet wird). Sie ist in aller Regel monoton steigend, d.h. für längere Anlagen gibt es eine höhere durchschnittliche Verzinsung. Dies kann etwa mit einem höheren Risiko einer Inflation oder einer Verschlechterung der Bonität des Emittenten erklärt werden, das Bonds mit längerer Laufzeit haben. Wie stark R steigt, hängt natürlich wesentlich von der aktuellen Marktlage ab, da Mean-Reverting-Effekte des Zinsniveaus zu erwarten sind.

5.1 Heath, Jarrow, Morton

Heath, Jarrow und Morton führten die *Forward-Raten* als ein Kurve ein, die von endlich vielen unabhängigen Standard-Brownschen Bewegungen $(W^1, \dots, W^n)$ angetrieben wird. Jeder Prozess $f(\cdot, T)$ lässt sich schreiben als

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,T)\,dW_s^i, \quad t \in [0,T], \tag{5.5}$$

wobei $(\alpha(\cdot,T))_{T\in[0,\overline{T}]}$ und $(\sigma^i(\cdot,T))_{T\in[0,\overline{T}]}$, $i = 1, \dots, n$, Familien von vorhersehbaren Prozessen sind mit $\alpha(\cdot,T) \in L(\mathrm{Id})$ und $\sigma^i(\cdot,T) \in L(W^i)$. Mit der Dynamik (5.5), die HJM-Modellrahmen genannt wird, ist noch kein konkretes stochastisches Modell für die Dynamik der Forward-Raten festgelegt, aber die Gleichungen liefern uns bereits viel Struktur.

Im stochastischen Modell sind somit die Forward-Raten die ,,Basisgrößen" (was ökonomisch sinnvoll erscheint) und die Bondpreise leiten sich aus den Forward-Raten ab. (5.4) wird dann als Definition der *Bondpreisprozesse* verstanden (bei der Kalibrierung des Modells ist es natürlich umgekehrt).

Bemerkung 5.8. *Ein stochastisches Modell der Forward-Raten wie in (5.5) beinhaltet wesentlich mehr Informationen als nur ein stochastisches Modell der Short-Rate* $(r_t)_{t\in[0,T]}$. *In (5.5) steckt bereits die Risikopräferenz des Marktes bezüglich der zukünftigen Entwicklung des Zinses.*

Bemerkung 5.9. *Fange* alternativ *mit der Modellierung der Short-Rate* $(r_t)_{t\in[0,T]}$ *an, die nur von einer Brownschen Bewegung* W^1 *angetrieben sei, etwa wie im* **Vasiček Modell**

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t^1, \quad t \geq 0. \tag{5.6}$$

Der Markt bestehend nur aus dem Geldmarktkonto $S_t^0 := \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right)$ *ist noch* **nicht** *vollständig. So lässt sich zum Beispiel eine zum Zeitpunkt* $\overline{T}$ *stattfindende Auszahlung der Höhe* 1 *nicht mit* S^0 *replizieren. Der Markt ist aber bereits bei Hinzunahme des Bondes* $B(\cdot,\overline{T})$ *"typischerweise" vollständig. Mit der Dynamik für* $B(\cdot,\overline{T})$ *hätte man einen Marktpreis des Risikos für (5.6) spezifiziert*[‡‡] *Alle anderen* T*-Bonds mit* $T\in[0,\overline{T}]$ *ließen sich nun bewerten. Man sieht, dass dieses Modell nicht die nötige Flexibilität besitzt, um komplizierte Dynamiken der Forward-Raten (bzw. Bonds) adäquat abzubilden.*

Bemerkung 5.10. *In Modellen mit Brownschen Bewegungen gilt die ,,Faustregel", dass ein Markt vollständig ist, wenn es mindestens ein Wertpapier mehr gibt als unabhängige Brownsche Bewegungen. Da es in Zinsmodellen potentiell sogar unendlich viele Bonds gibt (oder zumindest Bonds mit sehr vielen verschiedenen Fälligkeiten), können wir ein vollständiges Marktmodell erwarten. Zudem werden bei* n *Brownschen Bewegungen sogar* $n+1$ *Bondspreisprozesse* $B(\cdot,T_1),\dots,B(\cdot,T_{n+1})$ *ausreichen, um jeden Claim replizieren zu können. Alle weiteren Bonds wären somit redundant.*

Aus der Dynamik für die Forwardraten und dem Zusammenhang (5.4) kann man nun die Dynamik für die Bondpreisprozesse herleiten:

Theorem 5.11. *Seien* $\alpha,\sigma^i : \Omega\times[0,\overline{T}]\times[0,\overline{T}]\to\mathbb{R}$, $(\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}([0,\overline{T}]))-\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-messbare mit der Eigenschaft, dass* $\int_0^{\overline{T}}\int_0^{\overline{T}}|\alpha(t,s)|\,ds\,dt<\infty$, $\int_0^{\overline{T}}\int_0^{\overline{T}}(\sigma^i(t,s))^2\,ds\,dt<\infty$, *P-f.s.,* $i=1,\dots,n$. *Definiere*

$$A(t,T) := -\int_t^T \alpha(t,s)\,ds$$

$$\Sigma^i(t,T) := -\int_t^T \sigma^i(t,s)\,ds, \quad i=1,\dots,n$$

[‡‡]Bedingung ist, dass der stochastische Prozess $B(\cdot,\overline{T})$ so spezifiert wird, dass stets ein dW_t^1-Term vorkommt.

für $T \in [0,\overline{T}]$, $t \in [0,T]$. Es existiert eine $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,\overline{T}]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Version der Abbildung $(\omega, t, T) \mapsto f_\omega(t,T)$. Definierte die Bondpreise (5.4) bzgl. dieser Version von f und setze

$$\bar{r}_t := f(t,t), \quad t \in [0,\overline{T}].$$

Der Prozess $t \mapsto \bar{r}_t$ ist vorhersehbar (in diesem Abschnitt setzen wir $r_t := \bar{r}_t$ bzw. $S_t^0 := \exp\left(\int_0^t f(s,s)\,ds\right)$).
Für jedes $T \in [0,\overline{T}]$ gilt

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left(\int_0^t (A(u,T) + \bar{r}_u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i\right), \quad \forall t \in [0,T],$$

und der Prozess $B(\cdot,T)$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} B(t,T) &= B(0,T) + \int_0^t B(s,T)\left(\bar{r}_s + A(s,T) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Sigma^i(s,T)\Sigma^i(s,T)\right) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t B(s,T)\Sigma^i(s,T)\,dW_s^i, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Zum Beweis benötigen wir den Satz für Fubini für stochastische Integrale. Dieser sagt aus, dass man die Reihenfolge von stochastischer Integration und Lebesgue-Stieltjes Integration vertauschen darf.

Die wesentliche Aussage des folgenden Satzes ist (5). Die vorherigen Aussagen braucht man, um Aussage (5) überhaupt formulieren zu können.

Theorem 5.12 (Satz von Fubini für stochastische Integrale). *Sei X ein Semimartingal. Wir betrachten einen parameterabhängigen Integranden $H : \Omega \times [0,\overline{T}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sein soll. Auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ betrachten wir ein endliches Maß μ. Nehme an, dass*

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} H^2(\cdot,\cdot,a)\,\mu(da)} \in L(X)$$

Dann gelten folgende Aussagen

(1) $H(\cdot,\cdot,a) \in L(X)$ für μ-fast alle $a \in \mathbb{R}$

(2) Es gibt eine $(\mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Version der Abbildung

$$(\omega, t, a) \mapsto Z(\omega, t, a) := (H(\cdot,\cdot,a) \bullet X)_t(\omega), \tag{5.7}$$

wobei $\mathcal{O}$ die optionale σ-Algebra auf $\Omega \times [0,\overline{T}]$ bezeichnet

(D.h. das für jedes feste $a \in \mathbb{R}$ nur bis auf Evaneszenz eindeutig definiere Integral $(\omega, t) \mapsto H(\cdot,\cdot,a) \bullet X_t(\omega)$ kann so gewählt werden, dass die Gesamtabbildung $(\omega, t, a) \mapsto H(\cdot,\cdot,a) \bullet X_t(\omega)$ messbar ist)*

Wenn X stetig ist, dann existiert auch eine $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Version von (5.7).

(3) $\int_{\mathbb{R}} Z(\cdot,\cdot,a)\,\mu(da)$ *existiert und ist ein Semimartingal*

(4) $\int_{\mathbb{R}} H(\cdot,\cdot,a)\,\mu(da) \in L(X)$

(5) *Bis auf Ununterscheidbarkeit gilt*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} H(\cdot,\cdot,a)\,\mu(da)\right) \bullet X = \int_{\mathbb{R}} Z(\cdot,\cdot,a)\,\mu(da) =: \int_{\mathbb{R}} (H(\cdot,\cdot,a) \bullet X)\,\mu(da). \tag{5.8}$$

Bemerkung 5.13. *(i) Für $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{a_i}$ (δ_{a_i} Dirac-Maß im Punkt $a_i \in \mathbb{R}$) bedeutet die Aussage, dass das stochastische Integral linear im Integranden ist.*

(ii) Aus Aussage (5) folgt, dass (bis auf eine P-Nullmenge) die rechte Seite von (5.8) nicht von den Versionen der Integrale abhängt, die für jedes $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden müssen.

Ein Beweis von Satz 5.12 findet sich z.B. in Protter [13]. Wir geben hier nur eine Beweisidee an.

Beweisidee. Wir wollen die Aussagen (2), (3) und (5), nachfolgend „die Aussagen" genannt, für alle *beschränkten* $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren H beweisen.

Dazu beweise man die Aussagen zuächst für alle H der Form

$$H(\omega, t, a) = 1((\omega, t) \in K) 1(a \in A), \tag{5.9}$$

wobei $K \in \mathcal{P}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Für solche H sind die Aussagen recht offensichtlich: Man wähle eine Version des Integralprozesses $1_K \bullet X$ aus (Wenn X stetig ist, dann ist auch der Integralprozess stetig und damit vorhersehbar).

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist dann $(1_K \bullet X)1(a \in A)$ eine Version des Integralprozesses $H(\cdot,\cdot,a) \bullet X$ und

$$\int_{\mathbb{R}} (H(\cdot,\cdot,a) \bullet X)\mu(da) = (1_K \bullet X)\mu(A) = (\mu(A)1_K) \bullet X = \left(\int_{\mathbb{R}} H(\cdot,\cdot,a)\mu(da)\right) \bullet X.$$

Nun wende man, wie bei der Eindeutigkeit der Fortsetzung das stochastische Elementarintegrals (Schritt 1 im Beweis von Theorem 1.2), ein Dynkin-Argument an. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Teilmengen von $\Omega \times [0, \overline{T}] \times \mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung von Mengen der Form $K \times A$ schreiben lassen. Wegen der Linearität des Integrals im Integranden gelten die Aussagen für alle $H = 1_M$ mit $M \in \mathcal{E}$. Die Menge der M, für die $H = 1_M$

*Eine Menge $A \subset \Omega \times [0, T]$ heißt evaneszent, wenn die Menge $\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in [0, T] \text{ mit } (\omega, t) \in A\}$ eine P-Nullmenge ist. Zwei Prozesse, die ununterscheidbar sind, stimmen also bis auf Evaneszenz überein.

die Aussagen erfüllt, ist ein Dynkinsystem (hierfür wird auch die Stetigkeit des Integrals benutzt). Da $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, gelten die Aussagen mit dem Dynkinschem π-λ-Satz (Theorem 1.10) für alle $H = 1_M$ mit $M \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wegen Linearität des Integrals im Integranden gelten die Aussagen dann für alle beschränken $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren H. □

Beweis von Theorem 5.11. Da die Integratoren in (5.5) stetige Prozesse sind, existiert gemäß Aussage (2) in Satz 5.12 eine $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0, \overline{T}]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Version der Abbildung $(\omega, t, T) \mapsto f_\omega(t, T)$. Diese Version nennen wir die Forwardraten-Kurve. Die Abbildung

$$(\omega, t) \mapsto f_\omega(t, t) = \bar{r}_t(\omega) \tag{5.10}$$

ist eine Komposition der Abbildungen $(\omega, t) \mapsto (\omega, t, t)$ und $(\omega, t, T) \mapsto f_\omega(t, T)$. Erstere ist $\mathcal{P} - (\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0, \overline{T}]))$-messbar und letztere ist $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0, \overline{T}]) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Damit ist die Komposition (5.10) $\mathcal{P} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, also vorhersehbar.

Es gilt mit dem (stochastischen) Fubini und Umformungen

$$\begin{aligned}
Z_t &:= \ln(B(t,T)) \\
&= -\int_t^T f(t,s)\,ds \\
&= -\int_t^T \left(f(0,s) + \int_0^t \alpha(u,s)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(u,s)\,dW_u^i \right) ds \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} -\int_t^T f(0,s)\,ds - \int_0^t \int_t^T \alpha(u,s)\,ds\,du - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_t^T \sigma^i(u,s)\,ds\,dW_u^i \\
&= -\int_0^T f(0,s)\,ds - \int_0^t \int_u^T \alpha(u,s)\,ds\,du - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_u^T \sigma^i(u,s)\,ds\,dW_u^i \\
&\quad + \int_0^t f(0,s)\,ds + \int_0^t \int_u^t \alpha(u,s)\,ds\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_u^t \sigma^i(u,s)\,ds\,dW_u^i \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} Z_0 + \int_0^t A(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i \\
&\quad + \int_0^t f(0,s)\,ds + \int_0^t \int_0^s \alpha(u,s)\,du\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_0^s \sigma^i(u,s)\,dW_u^i\,ds \\
&= Z_0 + \int_0^t (A(u,T) + \bar{r}_u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i.
\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Gleichheit $\bar{r}_s = f(s,s) = f(0,s) + \int_0^s \alpha(u,s)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^s \sigma^i(u,s)\,dW_u^i$, P-f.s. für alle $s \in [0,t]$ benutzt.

Achtung: Der Satz von Fubini für stochastische Integrale (Theorem 5.12) wird beim ersten mal für **festes** $t \in [0,T]$ auf die parameterabhängigen Prozesse $\alpha(\cdot, s)1(t \le s \le T)$,

$\sigma^i(\cdot,s)1(t \le s \le T)$, $s \in [0,T]$, das Lebesgue-Maß μ und die stochastischen Integrale bis zum Endwert t angewandt (t muss festgehalten werden, da hier die parameterabhängigen Integranden von t abhängen). Beim zweiten mal wird Theorem 5.12 auf die parameterabhängigen Prozesse $\alpha(\cdot,s)1(\cdot \le s)$, $\sigma^i(\cdot,s)1(\cdot \le s)$, $s \in [0,T]$ und das Lebesgue-Maß μ angewandt.

Die Gleichheit gilt somit zunächst nur bis auf eine P-Nullmenge, die von t abhängen kann. Da jedoch sowohl

$$t \mapsto -\int_t^T f(t,s)\,ds$$

als auch

$$t \mapsto \int_0^t (A(u,T) + \bar{r}_u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i$$

stetig sind, stimmen die Größen auch als Prozesse in t betrachtet bis auf Ununterscheidbarkeit überein. Ferner gilt

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp(Z_t) \\ &= B(0,T)\exp\left(\int_0^t (A(u,T)+\bar{r}_u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i\right) \end{aligned}$$

Mit der Itô-Formel folgt (vgl. Skript [10]), dass der Prozess $B(\cdot,T)$ (für festes T) die stochastische Differentialgleichung

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(\left(A(t,T) + \bar{r}_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\Sigma^i(t,T))^2\right)dt + \sum_{i=1}^n \Sigma^i(t,T)\,dW_t^i\right)$$

erfüllt. □

Bemerkung 5.14. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.11 kann gezeigt werden, dass die Erlöse aus der "Roll-over Strategie" in (5.2), die das Vermögen permanent in neue Bonds kurz vor ihrer Fälligkeit investiert, für $\varepsilon \to 0$ gegen S^0 konvergiert (Übungsaufgabe).*

Theorem 5.15. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Theorem 5.11 setzen wir voraus*

(i) Die Abbildungen $T \mapsto \alpha(t,T)$ und $T \mapsto \sigma^i(t,T)$ seien für festes $t \in [0,T]$ (und $\omega \in \Omega$) stetig differenzierbar mit Ableitung $\alpha'(t,T)$ und $(\sigma^i)'(t,T)$, $i = 1,\dots,n$, so dass $\int_0^{\overline{T}}\int_0^{\overline{T}} |\alpha'(t,s)|\,ds\,dt < \infty$, $\int_0^{\overline{T}}\int_0^{\overline{T}} |(\sigma^i)'(t,s)|\,ds\,dt < \infty$, P-f.s., $i = 1,\dots,n$.

(ii) Die Abbildung $T \mapsto f(t,T)$ ist für festes $t \in [0,T]$ differenzierbar mit in $(0,\overline{T})$ stetiger Ableitung $f'(t,T)$.

Dann gilt

$$\bar{r}_t = \bar{r}_0 + \int_0^t (f'(s,s) + \alpha(s,s))\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,s)\,dW_s^i. \tag{5.11}$$

Bemerkung 5.16. *Die Dynamik der Short-Rate setzt sich also aus zwei Komponenten zusammen. Die eine Komponente*

$$\int_0^t \alpha(s,s)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,s)\,dW_s^i \tag{5.12}$$

ist die zeitliche Veränderung der Forward-Rate mit sofortiger Fälligkeit, wie sie durch (5.5) induziert wird (man betrachte also $f(t,T) - f(t-\Delta t, T)$ für $T \approx t$). Die andere Komponente

$$\int_0^t f'(s,s)\,ds$$

kommt nicht durch die Dynamik der Prozesse in (5.5) zustande, sondern dadurch, dass sich die Short-Rate mit fortschreitender Zeit auf unterschiedliche Fälligkeiten bezieht.

Im **Spezialfall**, *dass f nicht von t abhängt, also $f(t,T) = f(T)$ für alle t (d.h. Zinsen, die sich auf unterschiedliche Zeitpunkte beziehen, können unterschiedlich sein, aber die Markterwartungen über zukünftige Zinsen ändern sich nicht), folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$\bar{r}_t = f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds = \bar{r}_0 + \int_0^t f'(s,s)\,ds.$$

Die Komponente (5.12) fällt in diesem Spezialfall also weg.

Bemerkung 5.17. *Man beachte, dass die in Theorem 5.15 vorausgesetzte stetige Differenzierbarkeit über die vorher gemachten Voraussetzungen hinausgeht. Bisher konnten Zinssätze, die sich auf benachbarte Zeitintervalle beziehen, sehr verschieden sein.*

Beweis von Theorem 5.15. Nach dem Satz von Fubini für stochastische Integrale (Theorem 5.12) gilt für alle $0 \le t \le T \le \overline{T}$ außerhalb einer zunächst von t und T abhängigen P-Nullmenge

$$\begin{aligned}
\int_t^T f'(t,u)\,du &= f(t,T) - f(t,t) \\
&= f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,T)\,dW_s^i \\
&\quad - f(0,t) - \int_0^t \alpha(s,t)\,ds - \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,t)\,dW_s^i \\
&= f(0,T) - f(0,t) + \int_0^t \int_t^T \alpha'(s,u)\,du\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_t^T (\sigma^i)'(s,u)\,du\,dW_s^i \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_t^T f'(0,u)\,du + \int_t^T \int_0^t \alpha'(s,u)\,ds\,du + \sum_{i=1}^n \int_t^T \int_0^t (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i\,du \\
&= \int_t^T \left(f'(0,u) + \int_0^t \alpha'(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i \right) du.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Da beide Seiten von (5.13) in t, T stetige Modifikationen besitzen, kann die Ausnahmenullmenge unabhängig von t, T gewählt werden. Wegen der Stetigkeit der Ableitungen folgt daraus, dass die Integranden in (5.13) (außerhalb einer globalen P-Nullmenge) übereinstimmen müssen, d.h. für **alle** $t \in [0, \overline{T}]$ und $u \in [t, \overline{T}]$ gilt

$$f'(t,u) = f'(0,u) + \int_0^t \alpha'(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i$$

(Es müssen also keine Ausnahmenullmengen betrachtet werden). Damit kann man $u = t$ setzen und es folgt

$$f'(u,u) = f'(0,u) + \int_0^u \alpha'(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^u (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i. \tag{5.14}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
f(t,t) &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,t)\,dW_s^i \\
&= f(0,t) + \int_0^t \left(\alpha(s,s) + \int_s^t \alpha'(s,u)\,du\right) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(\sigma^i(s,s) + \int_s^t (\sigma^i)'(s,u)\,du\right) dW_s^i \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} f(0,0) + \int_0^t f'(0,u)\,du + \int_0^t \alpha(s,s)\,ds + \int_0^t \int_0^u \alpha'(s,u)\,ds\,du \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(s,s)\,dW_s^i + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_0^u (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i\,du \\
&= \bar{r}_0 + \int_0^t \alpha(u,u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(u,u)\,dW_u^i \\
&\quad + \int_0^t \left(f'(0,u) + \int_0^u \alpha'(s,u)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^u (\sigma^i)'(s,u)\,dW_s^i\right) du \\
&\overset{(5.14)}{=} \bar{r}_0 + \int_0^t \alpha(u,u)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma^i(u,u)\,dW_u^i + \int_0^t f'(u,u)\,du.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt zunächst nur bis auf eine von t abhängige P-Nullmenge. Da jedoch von der letzten Zeile (als Prozess in t betrachtet) eine stetige Modifikation existiert und der Prozess $t \mapsto f(t,t)$ wegen den Voraussetzungen stetig ist, kann die Nullmenge unabhängig von t gewählt werden. □

Um Arbitragefreiheit sicherzustellen, haben wir gefordert, dass es ein Maß $Q \sim P$ gibt, so dass für alle $T \in [0, \overline{T}]$ die Prozesse $\frac{B(\cdot,T)}{S^0}$ Q-Martingale sind. Wir wollen nun untersuchen, wann dies für die in Satz 5.11 hergeleiteten Bondpreisprozesse $B(\cdot, T)$ und den Guthabenprozess S^0 erfüllt ist. **Im Folgenden setzen wir voraus, dass $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ die von der Brownschen Bewegung $W = (W^1, \dots, W^n)$ erzeugte Filtration ist.**

Zur Erinnerung:

Definition 5.18. *Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Das* **stochastische Exponential** *von X ist die eindeutige Lösung der Integralgleichung*

$$Z_t = 1 + Z_- \bullet X_t, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.15}$$

Man schreibt $\mathcal{E}(X) := Z$. $\mathcal{E}(X)$ wird auch das Doléans-Dade Exponential genannt.

Für *stetige* Semimartingale X gilt

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}[X,X]_t).$$

Lemma 5.19. *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,\overline{T}]}$ die von $W = (W^1, \dots, W^n)$ erzeugte Filtration und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T^W$. Zu jedem Maß Q auf $\mathcal{F}$ mit $Q \sim P$ existiert ein Prozess $H \in L(W)$ (d.h. ein vorhersehbarer $\mathbb{R}^n$-wertiger Prozess H, der nach W integrierbar ist) mit*

$$\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}(H \bullet W)_T.$$

Ferner ist der Prozess $\widetilde{W} = (\widetilde{W}^1, \dots, \widetilde{W}^n)$ mit

$$\widetilde{W}^i := W^i - H^i \bullet I \tag{5.16}$$

eine Q-Standard-Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^n$ (wobei $I(\omega, t) := t$).

Wir werden das Lemma auf eines der äquivalenten Martingalmaße Q anwenden (Existenz haben wir vorausgesetzt).

Beweis. Sei $Q \sim P$ und Z der zu Q gehörige Dichteprozess, d.h.

$$Z_t = E_P\left(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t^W\right), \quad \forall t \in [0, \overline{T}].$$

Nach dem Martingaldarstellungssatz (Theorem 2.2) lässt sich der Prozess $Z - Z_0$ mit $Z_0 = 1$ als ein Integral nach W schreiben. Es existiert also ein $K \in L(W)$ mit $Z = 1 + K \bullet W$. Wegen $Q \sim P$ gilt $Z > 0$. Setze $H := \frac{K}{Z}$. Z ist als Martingal bzgl. einer Brownschen Filtrierung stetig und damit ist $\frac{1}{Z}$ lokal beschränkt. Folglich ist mit K auch $H \in L(W)$. Es gilt

$$Z = 1 + (ZH) \bullet W = 1 + Z \bullet (H \bullet W) \tag{5.17}$$

also $Z = \mathcal{E}(H \bullet W)$. Nach dem Girsanov-Meyer-Theorem (siehe [10]) ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ der Prozess $\widetilde{W}^i := W^i - \frac{1}{Z} \bullet [Z, W^i]$ ein Q-lokales Martingal. Mit Lévys

Theorem (siehe Theorem 2.5) folgt, dass $\widetilde{W}^i$ unter Q Standard-Brownsche Bewegungen sind und stochastisch unabhängig voneinander. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} \bullet [Z, W^i] &\overset{(5.17)}{=} \frac{1}{Z} \bullet \left[Z \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} H^j \bullet W^j \right), W^i \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} H^j \bullet W^j, W^i \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (H^j \bullet [W^j, W^i]) \\ &= H^i \bullet I.\end{aligned}$$

$\widetilde{W}^i$ stimmt also mit der rechten Seite von (5.16) überein.

□

5.1.1 Martingale Modeling

Sei im Folgenden S^0 das Numeraire und Q ein äquivalentes Martingalmaß bzgl. S^0, d.h. die Prozesse $\frac{B(\cdot,T)}{S^0}$ sind Q-Martingale. $\widetilde{W}^1, \ldots, \widetilde{W}^n$ seien unter Q Standard-Brownsche Bewegungen und stochastisch unabhängig. Häufig modelliert man die Preisprozesse direkt unter Q, d.h. das zugrunde liegende Modell unter P wird gar nicht spezifiziert. Diese Vorgehensweise nennt man “Martingale Modeling”. Das folgende Theorem besagt, wie die Drifts der Forward-Raten unter Q auszusehen haben.

Theorem 5.20 (Heath/Jarrow/Morton-Drift Bedingung)**.** *Sei $f(\cdot, T)$ wie in (5.5) unter P spezifiziert und sei Q ein äquivalentes Martingalmaß. Für alle $T \in [0, \overline{T}]$ gilt*

$$f(\cdot, T) = f(0, T) - \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^i(\cdot, T) \Sigma^i(\cdot, T) \right) \bullet I + \sum_{i=1}^{n} \sigma^i(\cdot, T) \bullet \widetilde{W}^i$$

$$B(\cdot, T) = (B(\cdot, T)\bar{r}) \bullet I + \sum_{i=1}^{n} (B(\cdot, T)\Sigma^i(\cdot, T)) \bullet \widetilde{W}^i \tag{5.18}$$

$$\bar{r}_t = \bar{r}_0 + \int_0^t f'(s, s)\, ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma^i(s, s)\, d\widetilde{W}^i_s, \quad t \geq 0. \tag{5.19}$$

Hierbei sind $\widetilde{W}^1, \ldots, \widetilde{W}^n$ unter Q stochastisch unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen, die sich von den Prozessen $W^1, \ldots, W^n$ aus (5.5) nur um Prozesse von endlicher Variation unterscheiden.

Beweis. Nach Satz 5.11 gilt

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left(\int_0^t (A(u, T) + \bar{r}_u)\, du + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \Sigma^i(u, T)\, dW^i_u \right)$$

und damit

$$\frac{B(t,T)}{S_t^0} = B(0,T)\exp\left(\int_0^t A(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,dW_u^i\right). \tag{5.20}$$

Sei nun Q ein äquivalentes Martingalmaß. Aus $Q \sim P$ folgt mit Lemma 5.19 die Existenz eines n-dimensionalen vorhersehbaren Prozesses H, so dass $\widetilde{W}^i := W^i - H^i \bullet I$ unter Q stochastisch unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen sind und $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}(H \bullet W)_T$. Eingesetzt in (5.20) ergibt dies

$$\frac{B(t,T)}{S_t^0} = B(0,T)\exp\left(\int_0^t A(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)H_u^i\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,d\widetilde{W}_u^i\right).$$

Mit der Itô-Formel kann der Prozess $t \mapsto \frac{B(t,T)}{S_t^0}$ nun in seinen dt-Anteil und seinen $d\widetilde{W}_t$-Anteil zerleget werden (also in seinen Drift- und seinen Martingalanteil ,,unter Q"). Damit er ein Q-Martingal wird, muss sein dt-Anteil verschwinden, also

$$\int_0^t \frac{B(u,T)}{S_u^0}\left(A(u,T) + \sum_{i=1}^n \Sigma^i(u,T)H_u^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\Sigma^i(u,T)\right)^2\right) du = 0, \forall t \in [0,T]. \tag{5.21}$$

Wegen $P\left(\inf_{u\in[0,T]} B(u,T)/S_u^0 > 0\right) = 1$ folgt aus (5.21)

$$\int_0^t \left(A(u,T) + \sum_{i=1}^n \Sigma^i(u,T)H_u^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\Sigma^i(u,T)\right)^2\right) du = 0,\ \forall t \in [0,T]. \tag{5.22}$$

Somit folgt zum einen, dass

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left(\int_0^t \left(\bar{r}_u - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\Sigma^i(u,T))^2\right) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Sigma^i(u,T)\,d\widetilde{W}_u^i\right)$$

und damit (5.18). Da (5.22) für alle T verschwindet, muss zum anderen auch die Ableitung nach T verschwinden, was zu

$$\int_0^t \left(\alpha(u,T) + \sum_{i=1}^n \sigma^i(u,T)H_u^i + \sum_{i=1}^n \sigma^i(u,T)\Sigma^i(u,T)\right) du = 0 \tag{5.23}$$

führt. Es folgt

$$\begin{aligned}
f(\cdot,T) &= f(0,T) + \alpha(\cdot,T) \bullet I + \sum_{i=1}^n \sigma^i(\cdot,T) \bullet W^i \\
&= f(0,T) + \alpha(\cdot,T) \bullet I + \sum_{i=1}^n \sigma^i(\cdot,T) \bullet \widetilde{W}^i + \sum_{i=1}^n (\sigma^i(\cdot,T)H^i) \bullet I \\
&\overset{(5.23)}{=} f(0,T) - \left(\sum_{i=1}^n \sigma^i(\cdot,T)\Sigma^i(\cdot,T)\right) \bullet I + \sum_{i=1}^n \sigma^i(\cdot,T) \bullet \widetilde{W}^i.
\end{aligned}$$

Wendet man nun Theorem 5.15 auf obige Dynamik der Forwardraten unter Q an, dann folgt unter Benutzung von $\sum_{i=1}^n \sigma^i(t,t)\Sigma^i(t,t) = 0$ Gleichung (5.19), also die Q-Dynamik der Short-Rate. $\square$

Bemerkung 5.21. *Aus (5.23) folgt, dass*

$$\sum_{i=1}^n \sigma^i(t,T)H_t^i = -\alpha(t,T) - \sum_{i=1}^n \sigma^i(t,T)\Sigma^i(t,T), \quad T \in [0,\overline{T}]. \tag{5.24}$$

Für festes t (und ω) ist zu erwarten, dass in typischen Modellen das lineare Gleichungssystem (5.24) $H_t^i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$, eindeutig bestimmt (T durchläuft die reellen Zahlen und für jedes T gibt es eine Gleichung). Damit sind Zinsmärkte wegen der vielen handelbaren Wertpapiere i.d.R. vollständig.

Bemerkung 5.22. *$-H^i$ ist der Marktpreis des Risikos W^i. Jede der n Risikoquellen kann also einen anderen Marktpreis des Risikos besitzen. $-H^i$ ist das Negative der Q-Driftrate von W^i. Die Bezeichnungen verallgemeinern natürlich die Überlegungen aus dem Black-Scholes Modell mit nur einer Risikoquelle (vgl. [10])*

Bemerkung 5.23. *Wir sind von einem Martingalmaß Q ausgegangen und haben gezeigt, dass für den zugehörigen Integranden H mit $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}(H \bullet W)_T$ die Bedingung (5.24) gelten muss. "Im Wesentlichen" gilt auch die Umkehrung.* **Wenn man einen Prozess H findet, der (5.24) erfüllt, so kann man i.d.R. durch $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}(H \bullet W)_T$ ein Martingalmaß definieren.** *Hierzu beachte man, dass umgekehrt (5.22) aus (5.23) folgt, da $A(T,T) = \Sigma^i(T,T) = 0$. Es tritt allerdings das technische Problem auf, dass H nicht in $L(W)$ sein muss und dass $\mathcal{E}(H \bullet W)$ nur ein lokales Martingal sein kann – und kein echtes Martingal. In diesem Fall lässt sich zu H kein Wahrscheinlichkeitsmaß definieren, dass die notwendige Veränderung der Driftrate bewerkstelligt.*

Bemerkung 5.24. *Im sogenannten* **Einfaktormodell**, *d.h. im Fall $n = 1$, kann man (5.24) nach H^1 auflösen und Arbitragefreiheit liegt vor, wenn für festes t (und ω) die Implikation $\sigma(t,T) = 0 \implies \alpha(t,T) = 0$ gilt und im Fall von nicht-verschwindender Volatilität der Ausdruck*

$$-\frac{\alpha(t,T)}{\sigma(t,T)} - \Sigma(t,T)$$

nicht von T abhängt.

Geht man statt von (5.23) von (5.22) aus, dann folgt

$$\frac{A(t,T) + \frac{1}{2}(\Sigma(t,T))^2}{\Sigma(t,T)} = -H_t^1. \tag{5.25}$$

Analog zum Black-Scholes Modell (siehe [10]) wird der Quotient auf der linken Seite von (5.25) als **Marktpreis des Risikos** *des T-Bonds (zum Zeitpunkt t und möglicherweise abhängig von ω) bezeichnet. Der Marktpreis des Risikos muss für alle Bonds gleich sein,* *sonst gäbe es in dem Einfaktormodell eine Arbitragemöglichkeit, die darin bestünde, den Bond mit dem höheren Marktpreis des Risikos zu kaufen und einen passenden Anteil des Bonds mit dem geringeren Marktpreis des Risikos zu shorten. Ökonomisch bedeutet diese Definition, dass die Investorin einen kurzfristiges Anlagehorizont besitzt und daher das Wertpapier S^0 als risikolos einstuft.*

5.1.2 Optionen auf Bonds

Für die Bondpreisprozesse, die in Theorem 5.11 hergeleitet wurden, wollen wir Call- und Put-Optionen europäischen Typs bewerten. Sei $T \leq S$. Der Halter des Calls erwerbe das Recht, einen Bond mit Fälligekit S zum Zeitpunkt T zum vorher festgelegten Preis $K \in \mathbb{R}_+$ zu erwerben. Die i.A. zufällige Auszahlung zum Zeitpunkt T ist also

$$(B(T,S) - K)^+ . \tag{5.26}$$

Wegen der Put-Call-Parität, die hier lautet

$$\text{Callpreis}_{t=T} - \text{Putpreis}_{t=T} = (B(T,S) - K)^+ - (K - B(T,S))^+ = B(T,S) - K$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Callpreis}_{t=0} - \text{Putpreis}_{t=0} = B(0,S) - KB(0,T),$$

ergibt sich der Callpreis unmittelbar aus dem Putpreis. Wir machen im Folgenden die Voraussetzung, dass $n = 1$ (**Einfaktormodell**) und dass die **Volatilitäten deterministisch** sind, d.h. wir setzen voraus, dass für alle $\widetilde{T} \in [0, \overline{T}]$ die Prozesse

$$\sigma(\cdot, \widetilde{T})$$

nur von der Zeit t nicht aber von ω abhängen. Zur Erinnerung:

$$B(t,T) \quad = \quad B(0,T) \exp\left(\int_0^t (A(u,T) + \bar{r}_u)\, du + \int_0^t \Sigma(u,T)\, dW_u\right).$$

Natürlich sind mit unserer Forderung auch die Prozesse $\Sigma(\cdot, \widetilde{T})$ deterministisch. Der entscheidende Punkt beim weiteren Vorgehen ist nun, dass sich der Prozess $\frac{B(\cdot,S)}{B(\cdot,T)}$ für $S \geq T$ schreiben lässt als

$$\begin{aligned} &\frac{B(t,S)}{B(t,T)} \\ &= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\left(\int_0^t (A(u,S) - A(u,T))\, du + \int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))\, dW_u\right) \end{aligned} \tag{5.27}$$

für alle $t \leq T$. Nehmen wir nun den Bond mit Fälligkeit T, also $B(\cdot, T)$, als neues Numeraire, dann ist in (5.26) der diskontierte Strike wie im Black-Scholes-Modell deterministisch. Der mit $B(\cdot, T)$ diskontierte Bond mit Fälligkeit S hat nach (5.27) die gleiche Struktur wie die Aktie im Black-Scholes-Modell. Dazu beachte, dass die möglicher Weise stochastische Driftrate $A(u,S) - A(u,T)$ beim Übergang zum Martingalmaß verschwindet.

Eine zeitabhängige, aber deterministische Volatilität $\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T)$ ist mathematisch genauso zu handhaben wie eine konstante Volatilität. Die Verteilung des diskontierten Bonds ist unter dem Martingalmaß lognormal mit einer angepassten Varianz. Dies liegt daran, dass für *deterministische* Integranden Integrale nach der Brownschen Bewegung normalverteilt sind (wie Summen unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind).

Bemerkung 5.25. *Wenn $\sigma(\cdot,\cdot)$ deterministisch ist, ist auch $\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T)$ deterministisch. Damit ist die Bedingung $n = 1$ keine wirkliche Einschränkung. Die gewichtete Summe unabhängiger Brownscher Bewegungen ist wieder eine Brownsche Bewegung und da die Volatilität (weil deterministisch) nicht von der Vergangenheit der Brownschen Bewegungen abhängen darf, vergrößert die Existenz mehrerer Brownscher Bewegungen die Möglichkeiten der Modellierung* **eines** *nicht-konstanten diskontierten Preisprozesses nicht.*

Zunächst machen wir die Beobachtung, dass beim Wechsel vom Numeraire S^0 zu $B(\cdot,T)$ sich auch das Martingalmaß Q verändert.

Theorem 5.26. *Sei Q ein Martingalmaß für die Bonds bzgl. des Numeraires S^0, d.h. die Prozesse $\frac{B(\cdot,\widetilde{T})}{S^0}$, die auf $[0,\widetilde{T}]$ definiert sind, $\widetilde{T} \in [0,\overline{T}]$, sind Q-Martingale. Dann sind die* **auf $[\mathbf{0},\widetilde{\mathbf{T}} \wedge \mathbf{T}]$ eingeschränkten** *Prozesse*

$$\frac{B(\cdot,\widetilde{T})}{B(\cdot,T)}$$

Q^T-Martingale†*, wobei*

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{S_0^0}{S_T^0}\frac{B(T,T)}{B(0,T)} = \frac{1}{S_T^0 B(0,T)}. \tag{5.28}$$

Definition 5.27. *Das in (5.28) definierte Maß wird T-***Forwardmaß** *genannt.*

Mit den bisherigen Rechnungen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{B(t,S)}{B(t,T)} &= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\left(\int_0^t (A(u,S) - A(u,T))\, du + \int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))\, dW_u\right) \\
&= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\left(\int_0^t (A(u,S) - A(u,T))\, du + \frac{1}{2}\int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))^2\, du\right) \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))\, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))^2\, du\right) \\
&= \frac{B(0,S)}{B(0,T)} \exp\left(\int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))\, d\widehat{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))^2\, du\right),
\end{aligned}$$

$t \in [0,T]$, wobei $\widehat{W}$ eine Standard-Brownsche-Bewegung unter dem Forwardmaß Q^T ist. Damit sind wir im Black-Scholes-Modell. Es gilt

$$\mathrm{Var}^{Q^T}\left(\ln\left(\frac{B(T,S)}{B(T,T)}\right)\right) = \int_0^T (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))^2\, du$$

†Allgemein: Seien S^i die Preisprozesse und Q ein Martingalmaß bzgl. des Numeraires N. Nun möchte man zum Numeraire S^{i_0} wechseln. Wir setzen voraus, dass S^{i_0}/N ein *echtes* Q-Martingal ist und dass $P(S_T^{i_0} > 0) = 1$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
& \frac{S^i}{N} \quad \text{sind } Q\text{-lokale Martingale} \\
\Rightarrow\ & \frac{S^i}{S^{i_0}}\frac{S^{i_0}}{N}\frac{N_0}{S_0^{i_0}} \quad \text{sind } Q\text{-lokale Martingale} \\
\Rightarrow\ & \frac{S^i}{S^{i_0}} \quad \text{sind } \widetilde{Q}\text{-lokale Martingale}
\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{d\widetilde{Q}}{dQ} = \frac{S_T^{i_0}}{N_T}\frac{N_0}{S_0^{i_0}}$$

Für die letzte Implikation braucht man, dass der Prozess $\frac{S^{i_0}}{N}$ ein echtes Q-Martingal ist. Damit ist $\frac{S^{i_0}}{N}\frac{N_0}{S_0^{i_0}}$ der Dichteprozess von $\widetilde{Q}$ bzgl. Q (es gilt $E_Q\left(\frac{d\widetilde{Q}}{dQ} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{S_t^{i_0}}{N_t}\frac{N_0}{S_0^{i_0}}$ und $\widetilde{Q}$ ist wegen $Q\left(\frac{d\widetilde{Q}}{dQ} > 0\right) = 1$ und $E_Q\left(\frac{d\widetilde{Q}}{dQ}\right) = 1$ ein zu Q äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. $P(N_T > 0) = 1$ und $N_0 > 0$ müssen sowieso gelten und wegen $P(S_T^{i_0} > 0) = 1$ gilt auch $P(S_T^{i_0}/N_T > 0) = 1$ und $S_0^{i_0} > 0$) und die Aussage gilt mit [10].

Setze

$$\sigma^2 := \int_0^T (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T))^2 \, du.$$

Wir erhalten für die Auszahlung (5.26) den Optionspreis zum Zeitpunkt 0

$$\boxed{\text{Callpreis} = B(0,S)\Phi\left(\frac{\log(\frac{B(0,S)}{KB(0,T)}) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) - KB(0,T)\Phi\left(\frac{\log(\frac{B(0,S)}{KB(0,T)}) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Die Formel ist völlig analog zur Black-Scholes-Formel (siehe z.B. [10]). Die Rolle des risikolosen Bankkontos nimmt jetzt das Investment in den Bond mit Fälligkeit T ein und die Aktie wird durch den Bond mit Fälligkeit S ersetzt. $A(\cdot,S) - A(\cdot,T)$ geht wie im Black-Scholes-Modell nicht in den Optionspreis ein. Der Markt ist vollständig und es existiert die Hedging-Strategie wie im Black-Scholes-Modell.

Mit der Put-Call-Parität erhält man den entsprechenden Putpreis.

5.1.3 Erweiterung um Kreditrisiko

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass der Emittent der Bonds sicher zahlt, also $B(T,T) = 1$. Nun modellieren wir ausfallbehaftete Bonds, die neben den sicheren Bonds gehandelt werden können. Der Emittent des ausfallbehafteten Bonds (ein Unternehmen oder Staat) wird geratet mit Ratingklassen $\mathcal{K} := \{1, \ldots, K\}$. Eine kleinere Zahl entspricht einem besseren Rating und K steht für den bereits erfolgten Ausfall. Der Zustand K ist absorbierend, ansonsten kann sich das Rating mit der Zeit in beide Richtungen ändern.

Wie in der Zinsmodellierung ohne Ausfallrisiko arbeiten wir mit Forwardraten: Ein T-Bond, der zum Zeitpunkt t in Ratingklasse i ist, besitzt den Preis

$$D_i(t,T) := \exp\left(-\int_t^T g_i(t,s)\, ds\right), \quad i = 1, \ldots, K-1 \quad \text{und} \quad D_K(t,T) = 0.$$

Interpretation: $g_i(t,T)\Delta T$ ist der Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für eine Anlage zwischen $T - \Delta T$ und T vereinbart wird, wenn der Schuldner zum Zeitpunkt t das Rating i besitzt. Man beachte, dass die Überrendite $(g_i(t,T) - f(t,T))\Delta T$ nur das Ausfallrisiko im Anlageintervall $[T - \Delta T, T]$ ausgleicht. Fällt der Schuldner bereits zwischen t und $T - \Delta T$ aus, finden bei dieser Vereinbarung überhaupt keine Zahlungen statt.

$s_i(t,u) := g_i(t,u) - f(t,u)$ ist der i-te **forward credit spread**.

Für die Dynamik von $g_i(\cdot,T)$ setzen wir analog um HJM-Ansatz voraus

$$g_i(t,T) = g_i(0,T) + \int_0^t \alpha_i(s,T)\, ds + \int_0^t \sigma_i(s,T)\, dW_s, \quad t \in [0,T],$$

wobei $W = (W^1, \dots, W^n)$ dieselbe n-dimensionale Brownsche Bewegung ist, die bereits die Forwardraten $f(\cdot, T)$ ohne Ausfall antreibt (wir verzichten hier auf die mehrdimensionale Schreibweise). Sinnvollerweise sollte gelten

$$g_{K-1}(t,T) > g_{K-2}(1,T) > \dots > g_1(t,T) > f(t,T).$$

Zunächst rechnen wir die Dynamik der Prozesse $D_i(\cdot, T)$ aus.

Proposition 5.28. *Es gilt*

$$dD_i(t,T) = D_i(t,T)\left(\left(g_i(t,t) + \alpha_i^\star(t,T) + \frac{1}{2}|\sigma_i^\star(t,T)|^2\right) dt + \sigma_i^\star(t,T)\, dW_t\right),$$

wobei $\alpha_i^\star(t,T) := -\int_t^T \alpha_i(t,u)\, du$ *und* $\sigma_i^\star(t,T) := -\int_t^T \sigma_i(t,u)\, du$.

Proof. Völlig analog zu Theorem 5.11. □

Wie gehabt ist nun $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t f(u,u)\, du\right)$ das Numeraire und $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\bar{T}]} = (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,\bar{T}]}$. Da die sicheren Bonds weiter am Markt gehandelt werden, besitzt jedes W^i bereits einen Marktpreis des Risikos (vgl. Bemerkung 5.21). Sei $\widetilde{W}$ die Standard-Brownsche Bewegung unter dem Maß Q, das die diskontierten sicheren Bonds zu Martingalen macht. Die Dynamik des Prozesses

$$Z_i(t,T) := \frac{D_i(t,T)}{S_t^0}$$

mit $\widetilde{W}$ ergibt:

$$\begin{aligned} dZ_i(t,T) &= Z_i(t,T)\left(\left(g_i(t,t) - f(t,t) + \alpha_i^\star(t,T) + \frac{1}{2}|\sigma_i^\star(t,T)|^2 + \gamma_t\sigma_i^\star(t,T)\right) dt \right.\\ &\qquad \left. +\sigma_i^\star(t,T)\, d\widetilde{W}_t\right), \end{aligned}$$

wobei γ durch $d\widetilde{W}_t = dW_t - \gamma_t\, dt$ gegeben ist.

Condition M.1: Der Prozess

$$\lambda_t^i := g_i(t,t) - f(t,t) + \alpha_i^\star(t,T) + \frac{1}{2}|\sigma_i^\star(t,T)|^2 + \gamma_t\sigma_i^\star(t,T)$$

hängt nicht von T ab.

Interpretation: λ^i ist die Driftrate des Prozesses $Z_i(\cdot, T)$ unter dem Maß Q, das die diskontierten sicheren Bonds zu Martingalen macht.

Condition M.2: Es existieren matrixwertige vorhersehbare Prozesse $(\lambda^{ij})_{i,j=1,\dots,K}$ s.d.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1, j\neq i}^{K-1} (Z_j(t,T) - Z_i(t,T))\lambda_t^{ij} - Z_i(t,T)\lambda_t^{i,K} + Z_i(t,T)\lambda_t^i \\ &\qquad = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, K-1,\ \forall T. \end{aligned} \tag{5.29}$$

λ^i ist die Driftrate des diskontierten Prozesses $D_i(\cdot, T)$ unter dem Martingalmaß. Da die sog. Pre-Default Prozesse keine handelbaren Wertpapiere sind, muss diese Driftrate nicht verschwinden. Der tatsächliche Bondpreis switcht zwischen den Pre-Default-Preisen, was zu weiteren Drifts führt.

Bemerkung 5.29. *Für den wichtigen Spezialfall $K = 2$ (kein Rating, außer Feststellung des Ausfalls) bedeutet Condition M.2, dass $\lambda_t^{1,K} = \lambda_t^1$.*

Nun modelliere man das Switchen zwischen den verschiedenen Ratingklassen (einschließlich des Ausfalls). Dazu wird der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum, der bisher nur von W erzeugt war, geeignet erweitert.

Konstruktion einer bedingten Markov-Kette in stetiger Zeit

Wir wollen nun eine Markov-Kette mit Rate $\lambda_t^{ij}(\omega)$ konstruieren ‡. Hierzu erweitern wir den Grundraum von Ω zu $\Omega \times \widetilde{\Omega}$. Alle bereits definierten Zufallsvariablen hängen von $(\omega, \widetilde{\omega})$ nur über ω ab. Das Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ ist durch das Martingalmaß Q gegeben und soll im folgenden zu einem Maß $Q^\star$ auf dem erweiterten Raum erweitert werden (der Prozess $\widetilde{W}$ ist also auch unter $Q^\star$ eine Standard-Brownsche Bewegung, statt $\mathcal{F}_T \times \widetilde{\Omega}$ etc. schreiben wir weiter $\mathcal{F}_T$ etc.).

Die neuen Zufallsvariablen $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}, U_{2,2}, U_{1,3}, U_{2,3}, \ldots$ hängen dagegen von $(\omega, \widetilde{\omega})$ nur über $\widetilde{\omega}$ ab. Mit Hilfe von $U_{1,k}$ konstruierten wir die Wartezeit auf die k-te Veränderung der Markov-Kette und mit $U_{2,k}$ deren neuen Wert. Die $U_{i,k}$ sind voneinander und von allen „alten Zufallsvariablen", die nur von ω abhängen, stochastisch unabhängig. Sie sind zudem gleichverteilt auf $(0, 1)$. Es gilt $\lambda^{Kj} = 0$. Man setzt $\lambda_t^{ii}(\omega) := -\sum_{j \neq i} \lambda_t^{ij}(\omega)$ für alle $i = 1, \ldots, K-1$.

Sei $i_0 \in \mathcal{K}$ das Rating zum Zeitpunkt 0. Das Rating ändert sich erstmals zum Zeitpunkt

$$\tau_1(\omega, \widetilde{\omega}) := \inf \left\{ t \geq 0 \mid \exp \left(- \int_0^t |\lambda_s^{i_0, i_0}(\omega)| \, ds \right) \leq U_{1,1}(\widetilde{\omega}) \right\}.$$

Das neue Rating beträgt

$$\xi_1(\omega, \widetilde{\omega}) := j \quad \text{wenn} \quad \sum_{l=1, l \neq i}^{j-1} \frac{\lambda^{i_0 l}_{\tau_1(\omega,\widetilde{\omega})}(\omega)}{|\lambda^{i_0 i_0}_{\tau_1(\omega,\widetilde{\omega})}(\omega)|} \leq U_{2,1}(\widetilde{\omega}) < \sum_{l=1, l \neq i}^{j} \frac{\lambda^{i_0 l}_{\tau_1(\omega,\widetilde{\omega})}(\omega)}{|\lambda^{i_0 i_0}_{\tau_1(\omega,\widetilde{\omega})}(\omega)|}$$

Die Konstruktion von $(\tau_2, \xi_2), (\tau_3, \xi_3), \ldots$ geht analog. Schließlich ist der càdlàg Prozess C, der das Rating des Emittenten modellieren soll, gegeben durch

$$C := \sum_{k=0}^{\infty} 1_{[\![\tau_k, \tau_{k+1}[\![} \xi_k \quad \text{mit } \tau_0 := 0, \ \xi_0 := i_0.$$

Die vergrößerte Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, \ C_s, s \leq t),$$

‡Für eine genauere Ausführung verweisen wir auf den Artikel von Bielecki und Rutkowski [2], an dem wir uns orientieren.

also $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ for all $t \geq 0$.

Die Konstruktion stellt sicher, dass

$$E_{Q^\star}\left(h(C_t) \mid \mathcal{G}_s\right) = E_{Q^\star}\left(h(C_t) \mid \mathcal{F}_s \vee \sigma(C_s)\right), \quad s \leq t.$$

für alle Funktionen $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Dies nennt man eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-bedingte $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$-Markov-Kette.

Die Prozesse $M_t^{ij} := H_t^{ij} - \int_0^t \lambda_s^{ij} 1_{(C_s=i)}\, ds$ sind $Q^\star$-Martingale unter der Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, wobei H_t^{ij} die Übergänge von i nach j bis zum Zeitpunkt t zählt. λ^{ij} ist also die Rate, mit der das Rating von i nach j wechselt.

Die Ausfallzeit ergibt sich durch $\tau := \inf\{t \geq 0 \mid C_t = K\}$. Der Preis des ausfallbehafteten Bonds ist formal definiert als

$$D(t,T) := \sum_{i=1}^{K-1} 1_{\{C_t=i\}} D_i(t,T). \tag{5.30}$$

Theorem 5.30. *Unter Bedingungen M.1 und M.2 und „geeigneten Integrierbarkeitbedingungen", die sicherstellen, dass die auftretenden lokalen Martingale echte Martingale sind, sind die diskontierten Bondpreise $D(\cdot,T)/S^0$ $Q^\star$-Martingale und es gilt*

$$D(t,T) = S_t^0 E_{Q^\star}\left(\frac{1_{\{\tau>T\}}}{S_T^0} \mid \mathcal{G}_t\right). \tag{5.31}$$

Proof. Mit (5.30) und (5.29) rechnet man schnell nach, dass die $Q^\star$-Drift von $D(\cdot,T)/S^0$ verschwindet. □

Bemerkung 5.31. *Wir wollen nun den ausfallbehafteten Bond durch den sicheren Bond und die Überlebenswahrscheinlichkeit ausdrücken (in (5.31) soll also das Geldmarktkonto durch den sicheren Bond ersetzt werden). Dies ist möglich, wenn wir zum sog. T-Forwardmaß aus Definition 5.27 übergehen also*

$$\frac{dQ^T}{dQ^\star} = \frac{1}{S_T^0 B(0,T)}.$$

Aus (5.31) und

$$E_{Q^\star}\left(\frac{dQ^T}{dQ^\star} \mid \mathcal{G}_t\right) = \frac{B(t,T)}{S_t^0 B(0,T)}.$$

folgt

$$D(t,T) = B(t,T) Q^T(\tau > T \mid \mathcal{G}_t).$$

Der kurze Abstecher ins Kreditrisiko ist hiermit beendet. Für eine ausführliche Behandlung verschiedener dynamischer Kreditrisikomodelle verweisen wir auf die Monographie von Bielecki und Rutkowski [1].

5.2 Affine Modelle

Im folgenden werden wir uns mit einer Klasse von Zinsmodellen beschäftigen, die analytisch vergleichsweise einfach handhabbar sind. Zum einen wird vorausgesetzt, dass die gesamte Zinsstruktur nur von der Short-Rate $(r_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ abhängt, d.h. $B(t,T) = F(t,r_t,T)$. Zudem soll die deterministische Funktion $\ln(F(t,r,T))$ affin (d.h. linear plus eine Konstante) im zweiten Argument sein.

Definition 5.32. *Ein Zinsmodell heißt* **affines Modell***, wenn es deterministische Funktionen* $A, C: \ [0,\overline{T}] \times [0,\overline{T}] \to \mathbb{R}$ *gibt mit*

$$B(t,T) = F(t,r_t,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r_t).$$

Annahme 5.33. *Die Short-Rate* $(r_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ *besitze die Dynamik*

$$dr_t = \mu(t,r_t)\,dt + \sigma(t,r_t)\,dW_t^Q, \tag{5.32}$$

wobei $\mu: [0,\overline{T}]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma: [0,\overline{T}]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *und* W^Q *eine Standard-Brownsche Bewegung unter einem Martingalmaß* Q *ist.*

Man beachte, dass $\mu(t,r_t)$ und $\sigma(t,r_t)$ (nur) über r_t von ω abhängen dürfen.

Bemerkung 5.34. *Aus der* **Q***-Dynamik der Short-Rate ergeben sich offenbar die Bondpreise. Aus der Martingaleigenschaft von* $\frac{B(\cdot,T)}{S^0}$ *folgt nämlich*

$$B(t,T) = E_Q\left(\exp(-\int_t^T r_u\,du) \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{5.33}$$

(Die Forward-Raten $f(t,u)$ *gehen in die Gleichung „indirekt" über das Martingalmaß* Q *ein). Der Zusammenhang (5.33) gilt in allen Zinsmodellen. Solange* r_t *unter* Q *jedoch kein Markov-Prozess ist, liefert er noch nicht die Darstellung* $B(t,T) = \widetilde{F}(t,r_t,T)$.

(5.32) nennt man auch ein **Einfaktormodell**. Da unter Voraussetzung (5.32) die Shortrate r (unter Q) ein Markov-Prozess ist, folgt mit (5.33), dass $B(t,T) = \widetilde{F}(t,r_t,T)$ für eine geeignete Funktion $\widetilde{F}$. Folglich enthält r_t alle Informationen aus der Vergangenheit $[0,t]$, die für zukünftige Zinsen relevant sein könnten.

Theorem 5.35. *Sei Annahme 5.33 erfüllt mit Funktionen* μ *und* σ^2*, die affin im zweiten Argument sind, d.h.*

$$\mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t) \quad \text{und} \quad \sigma(t,r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}.$$

Dann ist das Zinsmodell affin im Sinne von Definition 5.32, wobei die Funktionen $A(\cdot,T)$ *und* $C(\cdot,T)$ *die ODE*

$$C_t(t,T) + \alpha(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T) = -1 \quad \text{und} \quad C(T,T) = 0 \tag{5.34}$$

und

$$A_t(t,T) = \beta(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)C^2(t,T) \quad \textit{und} \quad A(T,T) = 0$$

(in der Variablen t) erfüllen (C_t etc. symbolisiert die erste partielle Ableitung von C nach der ersten Komponente).

(5.34) wird **Riccati Gleichung** genannt.

Bemerkung 5.36. *Für die Forward-Rates folgt*

$$f(t,T) = -\frac{d\ln(B(t,T))}{dT} = -A_T(t,T) + C_T(t,T)r_t. \tag{5.35}$$

Beweis. Schritt 1: Sei $F \in \mathcal{C}^{1,2,0}$ (also hinreichend glatt, um die Itô-Formel anwenden zu können). Mit Annahme 5.33 und der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} & F(t,r_t,T) \\ & = F(0,r_0,T) + \int_0^t F_t(u,r_u,T)\,du + \int_0^t F_r(u,r_u,T)\mu(u,r_u)\,du \\ & \quad + \frac{1}{2}\int_0^t F_{rr}(u,r_u,T)\sigma^2(u,r_u)\,du + \int_0^t F_r(u,r_u,T)\sigma(u,r_u)\,dW_u^Q. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Erneut aus der Itô-Formel, der endlichen Variation des Bankkontoprozesses $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_u\,du)$ und aus $dS_t^0 = r_t S_t^0\,dt$ folgt

$$\begin{aligned} d\left(\frac{F(t,r_t,T)}{S_t^0}\right) &= \frac{1}{S_t^0}dF(t,r_t,T) - \frac{1}{(S_t^0)^2}F(t,r_t,T)\,dS_t^0 \\ &= \frac{1}{S_t^0}\left(\underbrace{dF(t,r_t,T)}_{\text{siehe (5.36)}} - F(t,r_t,T)r_t\,dt\right). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Wenn es also umgekehrt eine Lösung $F(\cdot,\cdot,T)$ der partiellen Differentialgleichung (PDE)

$$F_t(t,r,T) + \mu(t,r)F_r(t,r,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)F_{rr}(t,r,T) - rF(t,r,T) = 0 \tag{5.38}$$

mit Endbedingung $F(T,r,T) = 1$ gibt, dann sind die Prozesse

$$\frac{F(t,r_t,T)}{\exp(\int_0^t r_u\,du)}$$

für alle $T \in [0,\overline{T}]$ Q-lokale Martingale, da der dt-Term in (5.37) wegfällt. Wir gehen hier davon aus, dass durch die Lösung der PDE sichergestellt ist, dass die Prozesse auch (echte) Q-Martingale sind. Da auch $\frac{B(t,T)}{S_t^0}$ Q-Martingale mit gleichem Endwert sind, folgt

$B(t,T) = F(t, r_t, T)$. Die PDE (5.38) muss also in der Klasse der Funktionen F mit Darstellung $F(t,r,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r)$ gelöst werden.

Schritt 2: Machen wir für F den Ansatz $F(t,r,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r)$, dann ergibt die PDE (5.38)

$$A_t(t,T) - [1 + C_t(t,T)]\, r - \mu(t,r)C(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)C^2(t,T) = 0. \tag{5.39}$$

Aus der Endwertbedingung $F(T,r,T) = 1$ folgt $A(T,T) = C(T,T) = 0$. I.A. wird (5.39) keine Lösung haben: die Gleichung muss für alle $r \in \mathbb{R}$ gelten, aber A und C dürfen nur von t (und T) abhängen. Sind jedoch sowohl μ als auch σ^2 affin in r, d.h. $\mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t)$ und $\sigma^2(t,r) = \gamma(t)r + \delta(t)$, dann ergibt (5.39)

$$A_t(t,T) - \beta(t)C(t,T) + \frac{1}{2}\delta(t)C^2(t,T) \tag{5.40}$$

$$- \left[1 + C_t(t,T) + \alpha(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T)\right] r =: \widetilde{a} + \widetilde{b}r = 0. \tag{5.41}$$

Hier müssen also nur noch die von r unabhängigen Terme $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ für alle t verschwinden. Die Riccati Gleichung

$$C_t(t,T) + \alpha(t)C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)C^2(t,T) = -1$$

mit Endbedingung $C(T,T) = 0$ besitzt offenbar eine Lösung. Setzt man diese Lösung in den ersten Term von (5.40) ein, so erhält man für A

$$A_t(t,T) - \beta(t)C(t,T) + \frac{1}{2}\delta(t)C^2(t,T) = 0,$$

d.h. $A(t,T) = -\int_t^T A_t(u,T)\,du + A(T,T) = \int_t^T \left[(-\beta(u))C(u,T) + \frac{1}{2}\delta(u)C^2(u,T)\right] du.$ □

5.2.1 Beispiel: Vasiček Modell

Das Vasiček Modell ist gegeben durch

$$dr_t = (b - ar_t)\,dt + \sigma\, dW_t^Q \tag{5.42}$$

Wir können also Theorem 5.35 anwenden und erhalten

$$B(t,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r_t),$$

wobei C die ODE

$$C_t(t,T) - aC(t,T) = -1$$

erfüllt, also

$$C(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - \exp(-a(T-t))\right).$$

Zusammen mit

$$A(t,T) = \int_t^T \left[-bC(u,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(u,T)\right] du$$

impliziert dies

$$A(t,T) = \frac{[C(t,T) - T + t]\left[ab - \frac{1}{2}\sigma^2\right]}{a^2} - \frac{\sigma^2 C^2(t,T)}{4a}.$$

Mit $f(t,T) = -A_T(t,T) + C_T(t,T) r_t$ folgt, dass im Vasiček Modell auch die Vola der Forward-Rates (und nicht nur der Short-Rate) deterministisch ist. Damit lässt sich die Optionsbewertung aus Abschnitt 5.1.2 anwenden. Insbesondere gilt

$$C_T(t,T) = \exp(-a(T-t))$$

und

$$A_T(t,T) = \frac{(\exp(-a(T-t)) - 1)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} + \frac{\sigma^2}{2a}\exp(-a(T-t))\frac{1}{a}\left(\exp(-a(T-t)) - 1\right)$$

Man sieht, dass

$$f(t,T) \to \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}, \quad \text{für } T \to \infty$$

(unabhängig von der Short-Rate in t). Wegen des Mean-Reverting Effekts hängt also der langfristige Zins nicht mehr wesentlich vom kurfristiges Zins ab.

Definition 5.37. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz, wenn ein $k \in \mathbb{R}_+$ existiert mit*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathbb{R}$$

und die Abbildung $t \mapsto f(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ càdlàg ist.
f heißt autonom, wenn $f(t,x) = f(0,x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}$.

Theorem 5.38. *Sei $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$ ein Semimartingal und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz, dann existiert für die* **stochastische Differentialgleichung**

$$X = X_0 + f(\cdot, X_-) \bullet Z \tag{5.43}$$

eine eindeutige (starke) Lösung in der Menge $\mathbb{D}$ (reellwertige, adaptierte Prozesse mit càdlàg Pfaden). Die Lösung ist ein Semimartingal. Andere Schreibweise für (5.43)

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t f^i(s, X_{s-})\, dZ_s^i, \quad \forall t \in [0,T].$$

Differentielle Schreibweise von (5.43)

$$dX_t = \sum_{i=1}^n f^i(t, X_{t-})\, dZ_t^i.$$

Beweis: siehe Protter, Theorem 6 auf Seite 194.

Beispiel 5.39 (Ornstein-Uhlenbeck Prozess). *Betrachte für $\alpha > 0$ den Mean-Reverting Prozess*

$$X_t = X_0 - \alpha \int_0^t X_s \, ds + Z_t \tag{5.44}$$

mit $Z_0 = 0$ (meistens Z Brownsche Bewegung, bzw. im Vasiček Modell $Z_t = bt + \sigma W_t^Q$). Formal setzt man $\widehat{Z}_t = (t, Z_t)$, $f(t,x) = (-\alpha x, 1)$. Die Lösung von (5.44) ist offenbar gegeben durch

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(s-t)} \, dZ_s, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.45}$$

Man rechnet dies nach: Für X aus (5.45) gilt:

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t \left(e^{\alpha(s-t)} - 1\right) dZ_s + \int_0^t dZ_s \\
&= X_0 e^{-\alpha t} - \alpha \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(0 \le s \le u \le t)} e^{\alpha(s-u)} \, du \, dZ_s + \int_0^t dZ_s \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} X_0 e^{-\alpha t} - \alpha \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(0 \le s \le u \le t)} e^{\alpha(s-u)} \, dZ_s \, du + \int_0^t dZ_s \\
&= X_0 \left(1 - \alpha \int_0^t e^{-\alpha u} \, du\right) - \alpha \int_0^t \left(\int_0^u e^{\alpha(s-u)} \, dZ_s\right) du + \int_0^t dZ_s \\
&= X_0 \left(1 - \alpha \int_0^t e^{-\alpha u} \, du\right) - \alpha \int_0^t \left(X_u - X_0 e^{-\alpha u}\right) du + \int_0^t dZ_s \\
&= X_0 - \alpha \int_0^t X_u \, du + Z_t.
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung benutzt man $e^{\alpha(s-t)} - 1 = -\alpha \int_s^t e^{\alpha(s-u)} \, du$, $s \le t$. Die dritte Gleichheit folgt aus dem Theorem 5.12, dem Satz von Fubini für stochastische Integrale. Für die fünfte Gleichheit benutzt man die Definition von X in (5.45) an der Stelle u.

Für das Vasiček Modell wählt man $\alpha = a$ und $Z_t = bt + \sigma W_t^Q$. (5.45) ergibt dann

$$\begin{aligned}
r_t &= r_0 e^{-at} + b \int_0^t e^{a(s-t)} \, ds + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)} \, dW_s^Q \\
&= r_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)} \, dW_s^Q, \quad t \ge 0.
\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung der Shortrate im Vasiček Modell können wir nun die Optionspreisberechnung aus Abschnitt 5.1.2 anwenden. Nicht alle der im folgenden gemachten Berechnungen werden für die Optionspreisbestimmung zwingend benötigt – insbesondere würde die Driftrate der Shortrate unter dem Forwardmaß nicht gebraucht. Zur besseren

Übersicht rechnen wir sie jedoch aus.

Der Call mit Auszahlung $(B(T,S)-K)^+$ für $T \leq S$ soll bewertet werden.

$$Z_t = \frac{B(t,T)}{B(0,T)S_t^0}$$

ist der Dichteprozess des T-Forwardmaßes bzgl. des eindeutigen Martingalmaßes Q bzgl. des Numeraires S^0. Mit Girsanov-Meyer folgt, dass

$$W_t^{Q^T} := W_t^Q - \int_0^t \frac{1}{Z_u}\, d[Z, W^Q]_u$$

eine Standard-Brownsche Bewegung unter Q^T ist.

Mit Itô gilt

$$dB(t,T) = -C(t,T)B(t,T)\sigma\, dW_t^Q + \ldots dt$$

und

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{B(0,T)S_t^0}\, dB(t,T) + \ldots dt \\ &= -\frac{B(t,T)}{B(0,T)S_t^0} C(t,T)\sigma\, dW_t^Q + \ldots dt \\ &= -Z_t C(t,T)\sigma\, dW_t^Q + \ldots dt. \end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{Z_t}\, d[Z, W^Q]_t = -C(t,T)\sigma\, dt$$

und damit

$$W_t^{Q^T} = W_t^Q + \sigma \int_0^t C(u,T)\, du.$$

Eingesetzt in die SDE der Shortrate folgt

$$dr_t = (b - \sigma^2 C(t,T) - ar_t)\, dt + \sigma\, dW_t^{Q^T}$$

und

$$
\begin{aligned}
r_t &= r_0 e^{-at} + b\int_0^t e^{a(s-t)}\,ds - \sigma^2 \int_0^t e^{a(s-t)} C(s,T)\,ds \\
&\quad + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)}\,dW_s^{Q^T} \\
&\overset{C(t,T)=\frac{1}{a}(1-\exp(-a(T-t)))}{=} r_0 e^{-at} + \left(b - \frac{\sigma^2}{a}\right)\frac{1}{a}(1-e^{-at}) + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{a(2s-t-T)}\,ds \\
&\quad + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)}\,dW_s^{Q^T} \\
&= r_0 e^{-at} + \left(\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{a^2}\right)(1-e^{-at}) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(e^{a(t-T)} - e^{-a(t+T)}\right) \\
&\quad + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)}\,dW_s^{Q^T}.
\end{aligned}
$$

Damit ist $\ln\left(\frac{B(T,S)}{B(T,T)}\right) = A(T,S) - C(T,S)r_T$ *unter* Q^T *normalverteilt mit*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{Q^T}\left(\ln\left(\frac{B(T,S)}{B(T,T)}\right)\right) &= \mathrm{Var}^{Q^T}(-C(T,S)r_T) \\
&= C^2(T,S)\mathrm{Var}^{Q}(r_T) \\
&= C^2(T,S)\sigma^2\int_0^T \exp(2\alpha(s-T))\,ds \\
&= \frac{1}{a^2}(1-\exp(-aT))^2\,\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-\exp(-2\alpha T)) \\
&=: \widetilde{\sigma}^2.
\end{aligned}
$$

Für den Callpreis zum Zeitpunkt 0 *gilt (vgl. Abschnitt 5.1.2)*

$$
\boxed{\text{Callpreis} = B(0,S)\Phi\left(\frac{\log(\frac{B(0,S)}{KB(0,T)}) + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}}{\widetilde{\sigma}}\right) - KB(0,T)\Phi\left(\frac{\log(\frac{B(0,S)}{KB(0,T)}) - \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}}{\widetilde{\sigma}}\right)}
$$

wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet.*

5.2.2 Beispiel: Cox-Ingersoll-Ross Modell (CIR Modell)

Das CIR Modell ist gegeben durch die SDE

$$
dr_t = (b - ar_t)\,dt + \sigma\sqrt{|r_t|}\,dW_t^Q \quad \text{mit} \quad r_0 = x, \tag{5.46}
$$

wobei $a, b, x > 0$. (5.46) besitzt eine eindeutige **nichtnegative** Lösung (mit diesem Wissen kann der Absolutbetrag in (5.46) auch weggelassen werden)[§]. Die Nichtnegativität ist

[§]Beweisskizze: (5.46) besitzt eine eindeutige Lösung (siehe Proposition 5.2.13 in Karatzas und Shreve [9]). Gleiches gilt für die SDE $d\widetilde{r}_t = -a(\widetilde{r}_t \vee 0) + \sigma\sqrt{|\widetilde{r}_t|}\,dW_t^Q$ mit $\widetilde{r}_0 = x$. Die eindeutige Lösung natürlich gegenüber dem Vasiček Modell ein bedeutender Vorteil. Wir können zunächst wieder Theorem 5.35 anwenden und erhalten

$$B(t,T) = \exp(A(t,T) - C(t,T)r_t).$$

Die Funktionen A und C kann man nach wieder ausrechnen, was wir im folgenden machen wollen. Es ist nur etwas aufwendiger.

C erfüllt die ODE

$$C_t(t,T) - aC(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T) = -1, \quad \forall t < T \quad \text{and} \quad C(T,T) = 0. \tag{5.47}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$C(t,T) = \frac{2\left(\exp(c(T-t)) - 1\right)}{(a+c)\left(\exp(c(T-t)) - 1\right) + 2c} \tag{5.48}$$

mit $c = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. Zusammen mit

$$A(t,T) = -b \int_t^T C(u,T)\, du$$

impliziert dies

$$A(t,T) = \frac{2b}{\sigma^2} \ln\left(\frac{2c \exp\left(\frac{1}{2}(a+c)(T-t)\right)}{(a+c)\left(\exp(c(T-t)) - 1\right) + 2c} \right).$$

Aus (5.48) folgt $\lim_{T\to\infty} C_T(t,T) = 0$. Wie im Vasiček Modell verschwindet also der Einfluss des kurzfristigen Zinses r_t asymptotisch auf den langfristigen Zins.

Weitere beliebte Short-Rate Modelle, die Annahme 5.33 erfüllen, sind

Dothan Modell: $\quad dr_t = ar_t\, dt + \sigma r_t\, dW_t^Q$

Ho-Lee Modell: $\quad dr_t = b(t)\, dt + \sigma\, dW_t^Q$

Hull-White (erweitertes Vasiček Modell): $\quad dr_t = (b(t) - a(t)r_t)\, dt + \sigma(t)\, dW_t^Q$

Hull-White (erweitertes CIR Modell): $\quad dr_t = (b(t) - a(t)r_t)\, dt + \sigma(t)\sqrt{|r_t|}\, dW_t^Q$

dieser SDE bleibt 0, sobald sie das erste Mal 0 erreicht hat (wieso ?). Damit gilt $\widetilde{r} \geq 0$. Andererseits ist die Driftrate als Funktion von r_t bzw. $\widetilde{r}_t$ bei der ersten SDE größer, während die Volatilitäten als Funktionen von r_t bzw. $\widetilde{r}_t$ gleich sind. Mit einem Vergleichssatz für SDEs (comparison theorem, siehe Proposition 5.2.18 in [9]) impliziert dies, dass $r \geq \widetilde{r}$.

5.2.3 Beispiel: Hull-White Modell

In den Modellen von Vasiček und Cox-Ingersoll-Ross konnte eine gewisse funktionale Abhängigkeit der Bondpreise in der Fälligkeit T hergeleitet werden. Dies ist einerseits erfreulich, andererseits bedeutet dies, dass das Modell leicht **falsifizierbar** ist: Da reale Bondpreiskurven typischerweise nicht genau diese Form haben werden, können die Parameter nicht so gewählt werden, dass die Bondpreiskurve $T \mapsto B(0,T)$ im Modell mit dem Markt übereinstimmt. Daher wurden die Modelle von Hull/White entsprechend verallgemeinert, um sie an beliebige Bondpreiskurven $T \mapsto B(0,T)$ anpassen (kalibrieren) zu können.

Wird werden folgende Erweiterung des Vasiček Modells betrachten:

$$dr_t = (b(t) - ar_t)\, dt + \sigma\, dW_t^Q$$

(d.h. der Parameter b aus (5.42) wird zeitabhängig, während die anderen Parameter konstant bleiben). Für die Funktion C verändert sich durch die Verallgemeinerung nichts, d.h.

$$\partial_t C(t,T) - aC(t,T) = -1$$

und damit

$$C(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - \exp(-a(T-t))\right).$$

Für A gilt nun

$$A(t,T) = \int_t^T \left[-b(u)C(u,T) + \frac{\sigma^2}{2} C^2(u,T)\right] du. \tag{5.49}$$

Zu einer vorgegebenen Funktion $T \mapsto f(0,T)$ wollen wir $t \mapsto b(t)$ nun so wählen, dass die zum Zeitpunkt 0 beobachtete Forwardkurve mit dem Modell übereinstimmt. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(0,T) &\overset{(5.35)}{=} -\partial_T A(0,T) + \partial_T C(0,T) r(0) \\
&\overset{(5.49)\text{ und } C(T,T)=0}{=} \int_0^T b(u)\partial_T C(u,T)\, du - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \partial_T C^2(u,T)\, du + \partial_T C(0,T) r(0) \\
&\overset{\partial_T C^2(u,T) = -\partial_u C^2(u,T)}{=} \underbrace{\int_0^T b(u)\exp(-a(T-u))\, du}_{=\Theta(T)} \underbrace{- \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\exp(-aT) - 1\right)^2 + \partial_T C(0,T) r(0)}_{=g(T)}.
\end{aligned}$$

Zudem erfüllt die Funktion Θ die Differentialgleichung

$$\partial_T \Theta(T) = -a\Theta(T) + b(T).$$

Es folgt

$$b(T) = \partial_T \Theta(T) + a\Theta(T) = \partial_T(f(0,T) + g(T)) + a(f(0,T) + g(T)). \tag{5.50}$$

Wählt man die Funktion b wie in (5.50), wobei

$$f(0,T) = -\partial_T \ln(B(0,T)) \quad \text{und} \quad \partial_T f(0,T) = -\partial_{TT} \ln(B(0,T))$$

natürlich durch Differenzenquotienten zu ersetzen sind, dann ist das Modell an die zum Zeitpunkt 0 am Markt beobachteten Bondpreise kalibriert.

Setzt man alles in $f(t,T) = -\partial_T A(t,T) + \partial_T C(t,T) r(t)$ ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) - \exp(-a(T-t)) f(0,t) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(\exp(-a(T-t)) - 1\right) \left(\exp(-a(T-t)) - \exp(-a(T+t))\right) \\ &\quad + \exp(-a(T-t)) r(t). \end{aligned}$$

Man sieht natürlich, dass das zum Zeitpunkt 0 kalibrierte Modell zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ typischerweise trotzdem unverträglich mit den Bondpreisen am Markt sein wird.

5.2.4 Mehrfaktormodelle

Der Nachteil von Einfaktormodellen ist, dass $T \mapsto f(0,T)$ zwar perfekt an die Bondpreise zum Startzeitpunkt kalibriert werden kann (siehe Abschnitt 5.2.3), die Dynamik der Zinsstrukturkurve aber ausschließlich von der Shortrate bestimmt wird. Es ist offensichtlich, dass sich daher gewisse Phanömene nicht gut abbilden lassen: so sind kurz und langfristige Zinsen eng aneinander gekoppelt. In der Realität gibt es aber z.B. Marktphasen, in denen ein kurzfristiger Zins voraussagbar niedrig ist, während die Markterwartungen über langfristige Zinsen stark schwanken.

Um mehr Flexibilität zu erlauben, kann man einen mehrdimensionalen Prozess einführen, dessen aktueller Wert alle relevanten Informationen über zukünftige Zinsen widerspiegelt. Natürlich gibt es hierzu viele verschiedene Modelle. Ein sehr gut interpretierbares Modell ist das folgende:

Beispiel 5.40 (Hull-White Zweifaktor-Modell)**.** *Im Unterschied zu dem Modell aus Abschnitt 5.2.3 ist der ,,Zielprozess" (also $b(t)/a$ mit den Bezeichnungen dort) stochastisch. Das Modell ist definiert durch*

$$dr_t = (\theta(t) + u_t - ar_t)\, dt + \sigma\, dW_t^Q, \quad r_0 = \bar{r},$$

und

$$du_t = -\widetilde{a} u_t\, dt + \widetilde{\sigma}\, d\widetilde{W}_t^Q, \quad u_0 = 0,$$

wobei $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ein vorgegebener deterministischer Prozess ist (etwa wie in Abschnitt 5.2.3 gewählt, um sicherzustellen, dass die Forwardratenkurve zum Startzeitpunkt *den beobachteten Daten entspricht).* $(W^Q, \widetilde{W}^Q)$ *ist eine zweidimensionale Brownsche Bewegung mit* $[W^Q, \widetilde{W}^Q]_t = \rho t$ *für ein* $\rho \in [-1, 1]$.

Man kann zeigen, dass das Modell affin ist, wenn man in Definition 5.32 die Shortrate durch einen geeigneten zweidimensionalen stochastischen Prozess ersetzt. Dies erlaubt eine Optionspreisbewertung ähnlich wie im Vasiček Modell. Der interessierte Leser sei hierzu auf Abschnitt 4.2.5 in Brigo und Mercurio [3] verwiesen.

5.3 Duration und Konvexität

Definition 5.41. *Eine Anleihe sei gegeben durch die folgenden deterministische Zahlungen: Einzahlung* $P_0 > 0$ *in* t_0 *und Auzahlungen* $c_1, c_2, \ldots, c_n > 0$ *in* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *mit* $t_1 > t_0$.

(c_n *könnte als Endauszahlung und* c_k, $k = 1, \ldots, n-1$ *als vorzeitige Zinszahlungen (Kupons) interpretiert werden)*

Die **kontinuierliche Rendite (yield)** *des Kontraktes ist definiert als das eindeutige* $\bar{r} \in \mathbb{R}$, *das*

$$P_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(-r(t_k - t_0)) \tag{5.51}$$

löst[¶].

Die **Macaulay-Duration** *der Anleihe ist definiert als*

$$D := \frac{\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_0) c_k \exp(-\bar{r}(t_k - t_0))}{P_0}$$

wobei $\bar{r}$ *die Yield bezeichnet*[‖].

Die Duration bezeichnet also die durchschnittliche Zeit, die das Kapital P_0 gebunden ist, wobei die Auszahlungen mit ihren Diskontierungsfaktoren gewichtet werden. Im Extremfall der Nullkuponanleihe (d.h. $c_k = 0$ für $k < n$) stimmt die Duration mit der Laufzeit der Anleihe überein.

Interpretation: Nehme an, zum Zeitpunkt t_0 steigt/fällt der Zins. Dies hat zur Folge, dass P_0 fällt/steigt. Nehme ferner an, dass sich das Zinsniveau danach nicht mehr verändert. Die Duration ist nun der Zeitpunkt, an dem der Wert der Anleihe wieder sein altes Niveau erreicht – vorausgesetzt, dass Auszahlungen zum zeitlich konstanten Zinssatz

[¶] Es existiert eine eindeutige Lösung, da die rechte Seite von (5.51) strikt monoton fallend in r ist und gegen ∞ bzw. 0 konvergiert für $r \to -\infty$ bzw. $r \to \infty$.

[‖] Im Zeitdiskreten gibt es eine Unterscheidung zwischen der „Macaulay-Duration" und der sog. „modifizierten Duration", die jedoch bei stetiger Verzinsung verschwindet.

wieder neu angelegt werden. Anders ausgedrückt: der Wert der Anleihe zur Duration ist immun gegenüber Zinsänderungen zum Startzeitpunkt – vorausgesetzt, dass Auszahlungen vor der Duration wieder neu angelegt werden**.

Hierzu beachte man: ein Zinsanstieg führt einerseits zu einem geringeren Barwert der Anleihe. Andererseits werden vorzeitige Auszahlungen bei Reinvestition höher verzinst, was zu einem höheren Erträgen führt. Zur Duration neutralieren sich die beiden Effekte.

Man beachte, dass obige Überlegungen implizit vorausgesetzen, dass das Zinsniveau nach t_0 konstant bleibt, genauer: $f(t,s) = r$ für alle $t, s \in [t_0, t_n]$, $s \geq t$.

Proposition 5.42. *Sei $p(r)$ die rechte Seite von (5.51) als Funktion in r. Es gilt*

$$\left.\frac{dp(r)}{dr}\right|_{r=\bar{r}} = -Dp(\bar{r})$$

und damit

$$D = -\frac{1}{p(r)}\left.\frac{dp(r)}{dr}\right|_{r=\bar{r}}.$$

Beweis. Es gilt

$$\left.\frac{dp(r)}{dr}\right|_{r=\bar{r}} = -\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)c_k \exp(-\bar{r}(t_k - t_0)) = -Dp(\bar{r}).$$

□

Die Duration ist ein wichtige Größe, mit der man einfache Portfolios konstruieren kann, die gegen Zinsänderungsrisiken zum Startzeitpunkt näherungsweise immun sind.

**Werden Auszahlungen wieder neu angelegt, dann beträgt der Wert der Anleihe zu einem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_n]$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \exp(r(t - t_k)).$$

Die Ableitung nach r in $r = \bar{r}$ beträgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(t - t_k)c_k \exp(\bar{r}(t - t_k)) \\
&= \exp(\bar{r}(t - t_0)) \left[(t - t_0)\sum_{k=1}^{n} c_k \exp(-\bar{r}(t_k - t_0)) - \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0)c_k \exp(-\bar{r}(t_k - t_0))\right] \\
&= \exp(\bar{r}(t - t_0))\left[(t - t_0)P_0 - DP_0\right]
\end{aligned}$$

und verschwindet genau dann, wenn $t = t_0 + D$.

Definition 5.43. *Die* **Konvexität** *der Anleihe ist definiert als*

$$C := \frac{1}{p(r)} \frac{d^2 p(r)}{dr^2}\bigg|_{r=\bar{r}}.$$

Man beachte, dass der Wert der Anleihe konvex im Zinsniveau ist. Die lineare Approximation

$$\frac{p(\bar{r} + \Delta r) - p(\bar{r})}{p(\bar{r})} \approx -D\Delta r$$

überschätzt daher Kursverluste bei steigenden Zinsen und unterschätzt Kursgewinne bei fallenden Zinsen. Eine entsprechende Korrektur liefert eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung mit der Konvexität $C > 0$:

$$\frac{p(\bar{r} + \Delta r) - p(\bar{r})}{p(\bar{r})} \approx -D\Delta r + \frac{1}{2} C (\Delta r)^2.$$

A Appendix: Selbstfinanzierungsbedingung

Für den interessierten Leser sind hier ein paar Überlegungen zur Selbstfinanzierungsbedingung in zeitstetigen Modellen zu finden. **Dies ist nicht Bestandteil der Vorlesung.**

Motivierendes zur Selbstfinanzierungsbedingung in zeitstetigen Modellen

Selbstfinanzierende Handelstrategien zeichnen sich dadurch aus, dass Portfolioumschichtungen kostenneutral erfolgen. D.h. der Kauf neuer Wertpapiere eines bestimmten Typs muss durch den Verkauf anderer Wertpapiere finanziert werden. Ausschlaggebend ist natürlich das Preisverhältnis der Wertpapiere zum Zeitpunkt der Portfolioumschichtung.

Der Einfachheit halber seien für die folgenden Überlegungen alle Preisprozesse S^i **stetig**. Sei $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1_t, \dots, \varphi^d)$ eine Handelsstrategie, d.h. ein vorhersehbarer stochastischer Prozess. Nehme zunächst an, dass φ stückweise konstant ist, der Wert von φ soll sich nur zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_k$ verändern. Die Selbstfinanzierungsbedingung aus der zeitdiskreten Finanzmathematik lautet dann

$$\sum_{i=0}^{d} (\varphi^i_{t_l} - \varphi^i_{t_{l-1}}) S^i_{t_l} = 0, \quad l = 1, \dots, k \tag{1.1}$$

d.h. zum Zeitpunkt t_l werden $\varphi^i_{t_l} - \varphi^i_{t_{l-1}}$ Wertpapiere vom Typ i zum Preis $S^i_{t_l}$ hinzugekauft. (Die Notationen stimmen hier allerdings nicht mit der diskreten Vorlesung überein !!!)

(1.1) ist offenbar äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{d} \varphi^i_{t_l} S^i_{t_l} - \sum_{i=0}^{d} \varphi^i_{t_{l-1}} S^i_{t_{l-1}} = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i_{t_{l-1}} (S^i_{t_l} - S^i_{t_{l-1}}), \quad l = 1, \dots, k \tag{1.2}$$

(siehe zeitdiskrete Vorlesung). (1.1) bezieht sich direkt auf die **Portfolioumschichtungen** und besagt, dass diese kostenneutral erfolgen müssen. Dagegen besagt (1.2), dass Vermögensveränderungen des Portfolios ausschließlich aus den Preisveränderungen der in ihm enthaltenen Wertpapiere resultieren. (1.1) hat gegenüber (1.2) den Vorteil, dass sich eine solche Bedingung auch für sog. unvollkommene Finanzmärkte formulieren lässt (Märkte mit Transaktionskosten, illiquide Märkte). Dies liegt daran, dass sich (1.1) nur auf die tatsächlichen Transaktionspreise und Zeitpunkte, an denen das Portfolio umgeschichtet wird, bezieht. Es muss kein Marked-to-Market derjenigen Aktien vorgenommen werden, die sich im Portfolio befinden, aber gar nicht getauscht werden. Man stelle sich etwa einen Markt mit einem Bid-Ask-Spread vor, d.h. es gibt einen Kaufspreisprozess und einen Verkauftspreisprozess (letzterer ist natürlich niedriger). Dies entspricht proportionalen Transaktionskosten. Bedingung (1.1) ließe sich analog mit Bid- und Ask-Preisen formulieren. Da es aber nicht *den* Marktpreisprozess gibt (ebenso wie es nicht den (eindimensionalen) kanonischen Vermögensprozess gibt), würde die Bedingung (1.2) keinen Sinn ergeben.

Nun wollen wir (wieder für den Standardfall vollkommener Märkte) schauen, wie man die Selbstfinanzierungseigenschaft bei beliegigem $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1_t, \dots, \varphi^d)$ formulieren kann, d.h. es darf zeitstetig umgeschichtet werden. Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine verfeinernde Folge von Gittern, d.h. $\sigma_n = (t_0^n, t_1^n, \dots, t_{k_n}^n)$. Statt φ_t^i betrachte zunächst den Prozess $\varphi_t^{i,n} = \sum_{l=1}^{k_n} \varphi^i_{t^n_{l-1}} 1_{(t^n_{l-1},t^n_l]}(t)$. Ein selbstfinanzierender Vermögensprozess mit Startkapital 0 wäre definiert durch $V_t^n = \sum_{l=1}^{k_n} \varphi^i_{t^n_{l-1}}(S^i_{t^n_l\wedge t} - S^i_{t^n_{l-1}\wedge t})$. Wegen der Stetigkeit des stochastischen Integrals besitzten die Handelsgewinne $\sum_{l=1}^{k_n} \varphi^i_{t^n_{l-1}}(S^i_{t^n_l\wedge t} - S^i_{t^n_{l-1}\wedge t})$ *komponentenweise* einen Limes und zwar das stochastische Integral $\int_0^t \varphi_u^i \, dS_u^i$. Der Fehler im Handelsgewinn, den man macht, indem man zum Zeitpunkt t nicht φ_t^i sondern $\varphi^i_{t^n_{l-1}}$ Aktien hält, wobei $t \in (t^n_{l-1}, t^n_l]$, geht also gegen Null (und zwar für jedes i separat). Die zeitstetige Selbstfinanzierungsbedingung lautet also

$$\sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d} \varphi_0^i S_0^i + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t \varphi_u^i \, dS_u^i, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Für die approximierenden Prozesse $\varphi_t^{i,n} = \sum_{l=1}^{k_n} \varphi^i_{t^n_{l-1}} 1_{(t^n_{l-1},t^n_l]}(t)$ sind natürlich die Bedingungen (1.1) und (1.2) noch äquivalent. Ausgehend von (1.1) entsteht aber das Problem, dass $\sum_{l=1}^{k_n}(\varphi^i_{t^n_l} - \varphi^i_{t^n_{l-1}})S^i_{t^n_l}$ i.A. nicht komponentenweise konvergiert. Handelsstrategien müssen keine Semimartingale sein. Die Anzahlen an Aktien im Portfolio können sehr viel stärker schwanken als die Aktienpreise (in der Theorie der vollkommenen Finanzmärkte). Für den allgemeinen Fall gibt es daher keine zeitstetige Selbstfinanzierungsbedingung, die wie (1.1) ausschaut. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k_n}\sum_{i=0}^{d}(\varphi^i_{t^n_l\wedge t} - \varphi^i_{t^n_{l-1}\wedge t})S^i_{t^n_l} &= \sum_{l=1}^{k_n}\sum_{i=0}^{d} S^i_{t^n_{l-1}}(\varphi^i_{t^n_l\wedge t} - \varphi^i_{t^n_{l-1}\wedge t}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k_n}\sum_{i=0}^{d}(S^i_{t^n_l} - S^i_{t^n_{l-1}})(\varphi^i_{t^n_l\wedge t} - \varphi^i_{t^n_{l-1}\wedge t})\end{aligned} \tag{1.4}$$

Wenn die φ^i **Semimartingale** sind (was i.A. nicht sein muss, was aber z.B. der Fall ist, wenn $\varphi_t^i = f(S_t^i, t)$ für eine glatte Funktion f) dann konvergiert (1.4) für $n \to \infty$ gegen

$$\sum_{i=0}^{d} \int_0^t S_u^i \, d\varphi_u^i + \sum_{i=0}^{d} [S^i, \varphi^i]_t \overset{!}{=} 0, \quad , \forall t \in [0,T]. \tag{1.5}$$

Wenn φ^i sogar **endliche Variation** haben, dann ist (1.5) äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{d} \int_0^t S_u^i \, d\varphi_u^i = 0, \quad , \forall t \in [0,T].$$

(siehe auch (1.7) für den allgemeinen Fall, dass S^i Sprünge haben können)

Bemerkung A.1. *Statt wie in (1.18) erschiene es natürlicher, die Selbstfinanzierungseigenschaft direkt über die Kostenneutralität der Umschichtungen im Portfolio zu definieren* *(wie es in zeitdiskreten Modellen gemacht wird, siehe z.B. Skript "Stochastische Finanzmathematik").*

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie eine entsprechende Bedingung in zeitstetigen Modellen aussehen könnte.

Nehme dazu an, dass $\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^d$ (vorhersehbare) Semimartingale sind (i.A. müssen Integranden keine Semimartingale sein !). Insbesondere haben die φ^i (in dieser Bemerkung) càdlàg Pfade. Für den Prozess $V = \sum_{i=0}^d \varphi^i S^i$ gilt

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i_- \bullet S^i_t + \sum_{i=0}^d S^i_- \bullet \varphi^i_t + \sum_{i=0}^d [\varphi^i, S^i]_t \\ &= V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet S^i_t - (\Delta\varphi^i) \bullet S^i_t + \sum_{i=0}^d S^i_- \bullet \varphi^i_t + \sum_{i=0}^d [\varphi^i, S^i]^c_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta\varphi^i_s \Delta S^i_s \\ &= V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet S^i_t + \sum_{i=0}^d S^i_- \bullet \varphi^i_t + \sum_{i=0}^d [\varphi^i, S^i]^c_t \end{aligned} \tag{1.6}$$

Begründung für (1.6): Die erste Gleichheit ist die Definition des Kovariationsprozesses. Wegen Bemerkung 1.1 ist $\Delta\varphi^i$ ein lokal beschränkter vorhersehbarer Prozess (und das Integral $(\Delta\varphi^i) \bullet S^i$ damit definiert). Betrachte den vorhersehbaren Prozess $\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}}$ bzw. das Integral $\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}} \bullet S^i$. Da der Prozess $\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}}$ nur zu endlich vielen Zeitpunkten ungleich Null ist, folgt mit Theorem 1.21(b), dass

$$(\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}}) \bullet S^i_t = \sum_{0<s\leq t,\ |\Delta\varphi^i_s| \geq 1/n} \Delta\varphi^i_s \Delta S^i_s.$$

Da die Folge $\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}}$ (sogar gleichmässig) gegen $\Delta\varphi^i$ konvergiert (für $n \to \infty$), konvergieren auch die entsprechenden Integrale $\Delta\varphi^i 1_{\{|\Delta\varphi^i| \geq 1/n\}} \bullet S^i$ gegen $\Delta\varphi^i \bullet S^i$, und zwar gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit (vgl. Theorem 1.2, und es folgt

$$(\Delta\varphi^i) \bullet S^i_t = \sum_{0<s\leq t} \Delta\varphi^i_s \Delta S^i_s.$$

(dritte Gleichung in (1.6)). Für zwei Semimartingale X und Y sind die abzählbar vielen Produkt-Sprünge $\Delta X_s \Delta Y_s$ (für $s \in (0,t]$) absolut summierbar, vgl. (2.21) in [10].

(1.6) liefert, dass die Selbstfinanzierungbedingung (1.18) äquivalent ist zu

$$\sum_{i=0}^d S^i_- \bullet \varphi^i_t + \sum_{i=0}^d [\varphi^i, S^i]^c_t = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.7}$$

(1.18) ist also erstaunlicher Weise i.A. nicht äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^d S^i_- \bullet \varphi^i_t = 0, \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.8}$$

wie die Überlegungen in diskreten Modellen vermuten lassen. (1.7) und (1.8) sind z.B. äquivalent, wenn φ^i von endlicher Variation sind, was aber bei "typischen" Strategien nicht der Fall ist (z.B. $\varphi^1_t = f(S^1_t, t)$ im Black-Scholes Modell. Dann gilt $[\varphi^1, S^1]^c = \partial_1 f(S^1, \cdot) \bullet [S^1, S^1]^c$). Eine Begründung für dieses Phänomen ist, dass die $\varphi^i_{t_k} - \varphi^i_{t_{k-1}}$ Aktien, die zum Zeitpunkt t_k- hinzugekauft werden, den Stückpreis $S^i_{t_k-}$ haben. Die akkumulierten Kosten betragen also $\sum_k S^i_{t_k-}(\varphi^i_{t_k} - \varphi^i_{t_{k-1}})$. Das stochastische Integral $S^i_- \bullet \varphi^i$ wird jedoch durch die Summe $\sum_k S^i_{t_{k-1}}(\varphi^i_{t_k} - \varphi^i_{t_{k-1}})$ approximiert. Der Fehler beträgt $\sum_k(\varphi^i_{t_k} - \varphi^i_{t_{k-1}})(S^i_{t_k-} - S^i_{t_{k-1}})$ und konvergiert gegen $[\varphi^i, S^i]^c$, den stetigen *Anteil der quadratischen Kovariation von φ^i und S^i, d.h. der Fehler konvergiert i.A. nicht gegen Null.*

Man beachte, dass das oben beschriebene Phänomen nicht von den Sprüngen verursacht wird, sondern vom stetigen Anteil der quadratischen Kovariation.

B Appendix: Essentielles Supremum

Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge von $\mathcal{G}$-messbaren $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$-wertigen Zufallsvariablen ($\mathcal{M}$ ist i.A. überabzählbar). Wir wollen nun das Supremum der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{M}$ bilden. Wenn $\mathcal{M}$ abzählbar ist, können wir einfach das *punktweise Supremum* der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{M}$ bilden, d.h. $X^\star(\omega) := \sup_{X \in \mathcal{M}} X(\omega)$. $X^\star$ ist dann auch wieder ($\mathcal{G}$-)messbar, also eine Zufallsvariable. Im überabzählbaren Fall muss dies nicht mehr der Fall sein. Aber auch in Fällen, in denen das punktweise Supremum messbar ist, kann es zu unerwünschten Ergebnissen kommen, wenn man auf "P-fast-sicher"-Aussagen hinaus will. Betrachte dazu das folgende Beispiel: $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{M} = \{1_{\{y\}} | y \in [0,1]\}$ und P ist das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Dann gilt $\sup_{X \in \mathcal{M}} X(\omega) = 1$, $\forall \omega \in [0,1]$, aber $P(X = 0) = 1$ für jedes einzelne $X \in \mathcal{M}$.

Definition B.1. *Eine Zufallsvariable Z ist ein essentielles Supremum von $\mathcal{M}$ bezüglich einer σ-Algebra $\mathcal{G}$ und eines Maßes P, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt*

(i) Z ist $\mathcal{G}$-messbar

(ii) $P(Z \geq X) = 1\ \forall X \in \mathcal{M}$

(iii) Für jede $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z' die Eigenschaft (ii) erfüllt, gilt $P(Z' \geq Z) = 1$

Wir werden sehen, dass es P-f.s. ein eindeutiges essentielles Supremum gibt. Wir schreiben dann ess sup$\mathcal{M} := Z$. Das essentielle Infimum kann man dann durch

$$\text{ess inf}\mathcal{M} := -\text{ess sup}(-\mathcal{M}) \tag{2.1}$$

definieren.

Bemerkung B.2. *Das Maß P brauchen wir bei der Definition nur zur Festlegung der Nullmengen, d.h. der Mengen $N \in \mathcal{G}$ mit $P(N) = 0$. Gehen wir also zu einem äquivalenten Martingalmaß Q über, so ändert sich die Definition nicht.*

Bemerkung B.3. *Analog zu dem Supremum in $\mathbb{R}$ sucht man hier auch die kleinste Schranke, die alle $X \in \mathcal{M}$ dominiert. Nur sucht man diese Schranke in der Menge der $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen und versteht Dominanz im P-f.s. Sinne.*

Theorem B.4. *Für jede nichtleere Menge von $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$-wertigen Zufallsvariablen $\mathcal{M}$, gibt es ein bis auf P-Nullmengen eindeutiges essentielles Supremum (mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).*
Ist darüberhinaus $\mathcal{M}$ maximumsstabil, d.h. $X_1, X_2 \in \mathcal{M} \implies X_1 \vee X_2 \in \mathcal{M}$, dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \text{ess sup}\mathcal{M} \ P\text{-f.s.} \tag{2.2}$$

Wenn $\mathcal{M}$ maximumsstabil ist und $E(X^-) < \infty$ für ein $X \in \mathcal{M}$, dann existiert $E(\text{ess sup}\mathcal{M})$ als Element in $(-\infty, \infty]$ und es gilt

$$E(\text{ess sup}\mathcal{M}) = \sup_{\{X\in\mathcal{M} \ | \ E(X) \ \textit{existiert}\}} E(X). \tag{2.3}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien Z_1, Z_2 zwei Zufallsvariablen, die (i)-(iii) erfüllen. Dann gilt $P(Z_2 \geq Z_1) = P(Z_1 \geq Z_2) = 1$.

Existenz: Sei $f : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \to [0,1]$ eine strikt monotone, stetige Funktion. Definiere folgende Menge $\widetilde{\mathcal{M}} := \{X_1 \vee \ldots \vee X_k | X_i \in \mathcal{M}, \ k \in \mathbb{N}\}$. Sei $m := \sup_{X\in\widetilde{\mathcal{M}}} E_P f(X)$. Wegen $f \leq 1$ gilt auch $m \leq 1$. Nach Definition des Supremums in $\mathbb{R}$ existiert eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ mit

$$m = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(Y_n). \tag{2.4}$$

Da $\widetilde{M}$ maximumsstabil und f monoton ist, kann die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die (2.4) erfüllen soll, monoton aufsteigend gewählt werden, d.h. $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \ldots$. Wir wollen zeigen, dass das punktweise Supremum

$$Z := \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$$

eine Version des essentiellen Supremums ist. Z kann Werte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ annehmen. Offenbar ist Z $\mathcal{G}$-messbar. Sei $X \in \mathcal{M}$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und der geforderten Stetigkeit von f folgt $E_P f(X \vee Z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(X \vee Y_n)$. Da $X \vee Y_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$ folgt weiter

$$E_P f(X \vee Z) \leq m = E_P f(Z).$$

Wegen $P(X \vee Z \geq Z) = 1$ und der strikten Monotonie von f folgt daraus, dass $P(X > Z) = P(f(X \vee Z) > f(Z)) = 0$ und damit (ii). Sei nun Z' eine Zufallsvariable mit $P(Z' \geq X) = 1 \ \forall X \in \mathcal{M}$. Dann gilt $P(Z' \geq Y_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und damit $P(Z' \geq Z) = 1$.

Wenn $\mathcal{M}$ maximumsstabil ist, dann gilt $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem Existenzbeweis erfüllt dann (2.2).

Sei $X_0 \in \mathcal{M}$ mit $E(X_0^-) < \infty$. Wegen ess sup$\mathcal{M} \geq X_0$ P-f.s., hat auch der Negativanteil von ess sup$\mathcal{M}$ endlichen Erwartungswert und $E(\text{ess sup}\mathcal{M})$ existiert als Element in $(-\infty, \infty]$. Die Abschätzung $E(\text{ess sup}\mathcal{M}) \geq \sup_{\{X\in\mathcal{M} \mid E(X) \text{ existiert}\}} E(X)$ folgt aus der Monotonie des Erwartungswertes. Für die Umkehrung betrachte die Folge $(X_0 \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, wobei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder die Folge aus dem Existenzbeweis ist. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz (angewandt auf die nichtnegative Folge $(X_0 \vee Y_n + X_0^-)_{n\in\mathbb{N}}$) folgt $\lim_{n\to\infty} E(X_0 \vee Y_n) = E(\text{ess sup}\mathcal{M})$ und damit (2.3). □

Bemerkung B.5. *Der Existenzbeweis in Theorem B.4 beruht darauf, dass die Zufallsvariablen aus $\mathcal{M}$ messbar bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{G}$ sind, bzgl. der das essentielle Supremum erklärt ist. Das essentielle Supremum bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{G}$ lässt sich aber auch für eine Menge $\mathcal{M}$ von Zufallsvariablen definieren, die nur bzgl. der größeren σ-Algebra $\mathcal{F}$ messbar sein müssen. Definiere dazu zunächst die Menge*

$$\mathcal{M}' := \{Y : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ \mathcal{G}\text{-messbar} \mid P(Y \geq X) = 1 \quad \forall X \in \mathcal{M}\}.$$

Definiere nun das essentielle Supremum von $\mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{G}$ durch

$$\text{ess sup}_{\mathcal{G}}\mathcal{M} := \text{ess inf}\mathcal{M}' := -\text{ess sup}\,(-\mathcal{M}'),$$

wobei ess sup $(-\mathcal{M}')$ *gemäß Theorem B.4 bzgl. der Menge $-\mathcal{M}'$ gebildet wird, die aus $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen besteht.*

Es ist klar, dass ess sup$_{\mathcal{G}}\mathcal{M}$ *die Bedingungen aus Definition B.1 erfüllt. Sei $X \in \mathcal{M}$. Für jedes $Y \in \mathcal{M}'$ gilt $P(Y \geq X) = 1$ und damit auch $P(\text{ess inf}\mathcal{M}' \geq X) = 1$. Also ist (ii) erfüllt. Nehme nun an, Z' ist $\mathcal{G}$ messbar und $P(Z' \geq X) = 1$ für alle $X \in \mathcal{M}$. Dies bedeutet $Z' \in \mathcal{M}'$ und damit $P(Z' \geq \text{ess inf}\mathcal{M}') = 1$. Also ist (iii) erfüllt.*

Ein Beispiel für ein solchen essentielles Supremum ist die L^∞-Norm

$$||X||_\infty := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid P(|X| \leq m) = 1\}.$$

$||X||_\infty$ ist das essentielle Supremum der einelementrigen Menge $\mathcal{M} = \{X\}$ bzgl. der trivialen σ-Algebra $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$.

C Appendix: Ergänzende Überlegungen

Im folgenden finden sind einige Überlegungen, die mittlerweile nicht mehr Bestandteil der Vorlesung sind und zur Verbesserung der Übersicht ausgelagert wurden.

Bemerkung C.1. *Der Beweis von Theorem 1.2 beruht darauf zu zeigen, dass beliebige vorhersehbare Prozesse durch elementar vorhersehbare Prozesse geeignet approximiert* *werden können. Als Alternative zur abstrakten Argumentation in Schritt 3, dass die Menge der vorhersehbaren Mengen, deren Indikatorfunktionen approximierbar sind, eine σ-Algebra ist, wollen wir noch eine zweite Herleitung für (1.6) angeben, die konstruktiver ist. Allerdings machen wir hierfür die weitere Einschränkung, dass X ein* **stetiges** *quadratintegrierbares Martingal ist.*

Um (1.6) zu zeigen, kann man in zwei Schritten vorgehen. Für H linksstetig folgt die Aussage wie in [10]. Definiere dazu

$$H_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} H_{\frac{k-1}{n}} 1_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}(t)$$

Punktweise Konvergenz und die Beschränktheit von H ergibt (1.6). Also muss nur noch gezeigt werden, dass ein beliebiger vorhersehbarer, beschränkter Prozess durch Elemente aus $\mathbb{L}$ im Sinne von (1.6) approximiert werden kann.

Wir gehen **o.B.d.A.** *davon aus, dass*

$$P([M,M]_t - [M,M]_s > 0) = 1 \tag{3.1}$$

für alle $s < t$. Wäre dies nicht der Fall, müsste man eine Zeittransformation *durchführen, worauf wir hier verzichten wollen. Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere den vorhersehbaren und stetigen Prozess*[††]

$$H_t^{(n)} := \frac{\int_{(t-1/n,t]} H_s \, d[M,M]_s}{[M,M]_t - [M,M]_{t-1/n}}.$$

Nun wenden wir pfadweise *das Lebesguesche Differentialtionstheorem auf die Abbildung $t \mapsto H_t(\omega)$ und das von $[M,M]$ induzierte Maß an. Das Differentiationstheorem besagt, dass die Funktion $t \mapsto \int_{(0,t]} H_s \, d[M,M]_s$ fast überall, bis auf eine $[M,M]$-Nullmenge, differenzierbar ist und die Ableitung $[M,M]$-fast überall mit H übereinstimmt. Für einen Beweis im Spezialfall $[M,M]_t = t$ siehe [4], Seite 90 (klassisches Lebesguesches Differentiationstheorem) und für die Zurückführung des allgemeinen Falls auf den Spezialfall siehe [5], Seite 70. Für ein t, wo dies der Fall ist, konvergiert somit $H_t^{(n)}$ gegen H_t. $H^{(n)}$ konvergiert damit punktweise gegen H bis auf eine Ausnahmemenge $A \subset \Omega \times [0,T]$ mit $E(1_A \bullet [M,M]_T) = 0$. Da die Folge $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist, folgt (1.6).*

Literatur

[1] Bielecki, T.R. und Rutkowski, M. (2002) Credit Risk: Modeling, Valuation, and Hedging, Springer-Verlag.

[2] Bielecki, T.R. und Rutkowski, M. (2004) Modelling of the Defaultable Term Structure: Conditionally Markov Approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(3), 361-373.

[††]Damit $H^{(n)}$ (links-)stetig ist, benötigen wir neben (3.1) (was durch eine Zeittransformation erreicht werden kann) leider die Einschränkung, dass $[M,M]$ und damit auch M stetig ist.

[3] Brigo, D. und Mercurio, F. (2006) Interest Rate Models – Theory and Practice, Springer-Verlag.

[4] Brokate, M. und Kersting, G. (2011) Maß und Integral, Birkhäuser.

[5] Carmona, R. A. und Nualart, D. (1990) Nonlinear Stochastic Integrators, Equations and Flows, Stochastics Monographs, Gordon and Breach Science Publishers, Volume 6.

[6] Delbaen, F. und Schachermayer W. (2006) The Mathematics of Arbitrage, Springer-Verlag.

[7] Jacod, J. und Shiryaev, A.N. (2003) Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer-Verlag, 2. Auflage.

[8] Kallsen, J. (1998) Semimartingale Modelling in Finance, Dissertation Universität Freiburg i. Br.

[9] Karatzas, I. und Shreve, E.S. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, 2. Auflage.

[10] Kühn, C. Vorlesungsskript "Stochastische Analysis mit Finanzmathematik". *http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn/*.

[11] Kühn, C. Vorlesungsskript "Stochastische Finanzmathematik". *http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn/*.

[12] Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997) Martingale methods in financial modelling, Springer.

[13] Protter, P. (2004) Stochastic Integration and Differential Equations. Springer-Verlag, 2. Auflage.