Seminar über Bäume, Netzwerke und Zufall
Prof. Dr. Wakolbinger, Prof. Dr. Geiger

Verzweigungszahl und kritische Perkolationswahrscheinlichkeit

Vortrag Nr. 11, Anja Prüfer, 29. Juni 2005

sei G ein abzählbarer Graph

- $p_e \in [0,1]$ sei die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kante e behalten wird, unabhängig von anderen Kanten
- gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Ecke x in einer Komponente von unendlichem Durchmesser befindet $P[x \leftrightarrow \infty]$

aus dem vorangegangenen Vortrag wissen wir

$$P[x \leftrightarrow \infty] \leq \inf\{\sum_{e\in\Pi} P[x \leftrightarrow e] \mid \Pi \text{ trennt x von } \infty\} \tag{1}$$

Ziel: Untergrenze für $P[x \leftrightarrow \infty]$ finden

unter einer *allgemeinen Perkolation* auf einem abzählbaren, evtl. unverbundenen Graphen G versteht man einen zufälligen Untergraphen $G(\omega)$

- fixiere ein $o \in G$ als Wurzel
- Π sei eine minimale Kantenmenge, die o von ∞ trennt
- $\mathcal{P}$ = Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf Π
- vereinfachende Annahme: $P[e \in G(\omega)] > 0$

$G_o(\omega)$ sei die verbundene Komponente von o im Perkolationsgraphen $G(\omega)$. Definiere eine Zufallsvariable

$$X(\mu) := \sum_{e\in\Pi} \frac{\mu(e)1_{\{e\in G_o(\omega)\}}}{P[e \in G_o(\omega)]} \tag{2}$$

ist die (mit gewichtete) Anzahl der Kanten in Π, die mit o verbunden sind

$$\Rightarrow E[X(\mu)] = 1$$

Beweis:

$$E[X(\mu)] = E[\sum_{e\in\Pi} \frac{\mu(e)1_{\{e\in G_o(\omega)\}}}{P[e \in G_o(\omega)]}] = \sum_{e\in\Pi} P[e \in G_o(\omega)] \cdot \frac{\mu(e)}{P[e \in G_o(\omega)]} = \sum_{e\in\Pi} \mu(e) = 1$$

$\{o \leftrightarrow \Pi\}$ ist das Ereignis, dass $\{o \leftrightarrow e\}$ für ein $e \in \Pi$

(dieses Ereignis folgt aus $X(\mu) > 0$, da in diesem Fall $1_{\{e \in G_o(\omega\}} = 1$ für mind. ein $e \in \Pi$ sein muss)

es gilt:

$$P[o \leftrightarrow \infty] = \inf\{P[o \leftrightarrow \Pi] : \Pi \text{ trennt x von } \infty\} \tag{3}$$

Proposition 4. 12 *Sei eine allgemeine Perkolation auf G gegeben. Dann gilt*

$$P[o \leftrightarrow \Pi] \geq \frac{1}{E[X(\mu)^2]} \tag{4}$$

für alle $\mu \in \mathcal{P}(\Pi)$

Beweis: Sei $\mu \in \mathcal{P}(\Pi)$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} 1 = E[X(\mu)]^2 = E[X(\mu)1_{\{X(\mu)>0\}}]^2 \leq E[X(\mu)^2] \cdot E[1^2_{\{X(\mu)>0\}}] = \\ = E[X(\mu)^2] \cdot P[X(\mu) > 0] \leq E[X(\mu)^2] \cdot P[o \leftrightarrow \Pi] \\ \Rightarrow P[o \leftrightarrow \Pi] \geq \frac{1}{E[X(\mu)^2]} \end{aligned}$$

□

$$\text{da } X(\mu)^2 = \sum_{e_1, e_2 \in \Pi} \mu(e_1)\mu(e_2) \frac{1_{\{e_1 \in G_o(\omega)\}} 1_{\{e_2 \in G_o(\omega)\}}}{P[e_1 \in G_o(\omega)]P[e_2 \in G_o(\omega)]}$$

folgt

$$E[X(\mu)^2] = \sum_{e_1, e_2 \in \Pi} \mu(e_1)\mu(e_2) \frac{P[e_1, e_2 \in G_o(\omega)]}{P[e_1 \in G_o(\omega)]P[e_2 \in G_o(\omega)]} =: \mathcal{E}(\mu) \tag{5}$$

Diese Größe nennen wir die **Energie** von μ. (Zusammenhang zur Energie eines Flusses Θ siehe Lemma 4.14)

Proposition 4. 13 *Sei eine allgemeine Perkolation auf G gegeben, dann gilt*

$$P[o \leftrightarrow \infty] \geq \inf\{ \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \frac{1}{\mathcal{E}(\mu)} \mid \Pi \textit{ trennt o von } \infty\} \tag{6}$$

Beweis: es gilt nach (4):

$$\begin{aligned} P[o \leftrightarrow \Pi] \geq \frac{1}{\mathcal{E}(\mu)}, \forall \mu \in \mathcal{P}(\Pi) \\ \Rightarrow P[o \leftrightarrow \Pi] \geq \sup \frac{1}{\mathcal{E}(\mu)} \\ \overset{(4)}{\Rightarrow} P[o \leftrightarrow \infty] = \inf P[o \leftrightarrow \Pi] \geq \inf\{\sup \frac{1}{\mathcal{E}(\mu)}\} \end{aligned}$$

$\square$

Bem.: Man nennt dies auch die **Methode der zweiten Momente**.

Jetzt versuchen wir, einen Weg zu finden, diese Energie zu berechnen und betrachten wie im vorigen Vortrag den Fall der Bäume.

- unabhängige Perkolation: $\{e \in T(\omega)\}$ unabh. für alle e
- $e(x) :=$ die Kante, die in der Ecke x endet
- für $\mu \in \mathcal{P}(\Pi)$ schreibe $\mu(x)$ statt $\mu(e(x))$, für einen Fluß Θ auf einem Baum sei $\Theta(x) := \Theta(e(x))$
- $x \wedge y$ sei der am weitesten von o entfernte gemeinsame Vorfahr von x und y

Dann gilt:

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{e(x),e(y)\in\Pi} \frac{\mu(x)\mu(y)}{P[o \leftrightarrow x \wedge y]} \tag{7}$$

Beweis:

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{e(x),e(y)\in\Pi} \mu(x)\mu(y)\frac{P[o \leftrightarrow x, o \leftrightarrow y]}{P[o \leftrightarrow x]P[o \leftrightarrow y]} =$$

$$= \sum_{e(x),e(y)\in\Pi} \mu(x)\mu(y)\frac{P[o \leftrightarrow x \wedge y]P[x \wedge y \leftrightarrow x, x \wedge y \leftrightarrow y]}{P[o \leftrightarrow x \wedge y]P[x \wedge y \leftrightarrow x]P[o \leftrightarrow x \wedge y]P[x \wedge y \leftrightarrow y]} =$$

$$= \sum_{e(x),e(y)\in\Pi} \frac{\mu(x)\mu(y)}{P[o \leftrightarrow x \wedge y]}$$

Lemma 4. 14 *Sei Θ ein Fluß auf einem endlichen Baum T von o zu den „Flügeln“ $\delta_L T$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{x,y\in\delta_L T} \Theta(x)\Theta(y)\mathcal{R}(o \leftrightarrow x \wedge y) \tag{8}$$

Beweis: Bem. für jede Kante e gilt $\Theta(e) = \sum_{\substack{x\in\delta_L T\\ e\le x}} \Theta(x)$

(wobei $e \le x$ bedeutet, dass sich e auf dem Weg zwischen o und x befindet)

$$\sum_{x,y\in\delta_L T} \Theta(x)\Theta(y)\mathcal{R}(o \leftrightarrow x \wedge y) = \underbrace{\sum_{x,y\in\delta_L T} \Theta(x)\Theta(y) \cdot \sum_{e\le x\wedge y} r(e)}_{\text{„von oben“}} = \overbrace{\sum_{e\in T} r(e) \cdot \sum_{\substack{x,y\in\delta_L T\\ x,y\ge e}} \Theta(x)\Theta(y)}^{\text{„von unten“}} =$$

$$= \sum_{e \in T} r(e)\Theta(e)^2 = (\Theta, \Theta)_r = \mathcal{E}(\Theta)$$

$\square$

Übertragen wir dies nun auf unendliche Bäume:

Wir nennen Leitfähigkeiten **adaptiert** an eine Perkolation (und umgekehrt), wenn gilt:

$$\frac{1}{P[o \leftrightarrow x]} = 1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow x),\ \forall x \tag{9}$$

was äquivalent ist zu:

$$P[o \leftrightarrow x] = \frac{\mathcal{C}(o \leftrightarrow x)}{1 + \mathcal{C}(o \leftrightarrow x)}$$

- Sei Π eine minimale Kantenmenge, die o on ∞ trennt
- Sei $\bar{\Pi} = \{x \mid e(x) \in \Pi\}$ der Abschluss von Π (Eckenmenge)
- Sei Θ der durch μ induzierte Fluss von o nach $\bar{\Pi}$, d.h.

$$\Theta(e) := \sum_{e \leq x \in \bar{\Pi}} \mu(x) \tag{10}$$

Dann folgt für adaptierte Leitfähigkeiten

$$\mathcal{E}(\mu) = 1 + \mathcal{E}(\Theta) \tag{11}$$

Beweis:

$$\mathcal{E}(\mu) \overset{(7)}{=} \sum_{e(x), e(y) \in \Pi} \frac{\mu(x)\mu(y)}{P[o \leftrightarrow x \wedge y]} \overset{(9)}{=} \sum_{e(x), e(y) \in \Pi} \mu(x)\mu(y)[1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow x \wedge y)] \overset{(4.14)}{=}$$

$$= \sum_{e(x), e(y) \in \Pi} \mu(x)\mu(y) + \mathcal{E}(\Theta) = (\sum_{e(x) \in \Pi} \mu(x))^2 + \mathcal{E}(\Theta) = 1^2 + \mathcal{E}(\Theta) = 1 + \mathcal{E}(\Theta)$$

Um unser Wissen über elektrische Netzwerke nutzen zu können, wählen wir also bei geg. Perkolationsproblem die Leitfähigkeit so, dass (9) gilt.

- sei p_x die Überlebenswahrscheinlichkeit von $e(x)$
- $\overleftarrow{x}$ bezeichne den Ahnen von x
- da die rechte Seite von (9) der Widerstand einer Reihenschaltung ist, gilt also:

$$r(e(x)) = [1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow x)] - [1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow \overleftarrow{x})] = \frac{1}{P[o \leftrightarrow x]} - \frac{1}{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]} =$$

$$\frac{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}] - P[o \leftrightarrow x]}{P[o \leftrightarrow x] \cdot P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]} = \frac{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}] - P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]p_x}{P[o \leftrightarrow x] \cdot P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]} = \frac{1 - p_x}{P[o \leftrightarrow x]}$$

oder anders formuliert

$$c(e(x)) = \frac{P[o \leftrightarrow x]}{1 - p_x} = \frac{1}{1 - p_x} \prod_{o < u \leq x} p_u \tag{12}$$

genauer: für ein $p \in (0, 1)$ gilt

$$p_x \equiv p \Leftrightarrow c(e(x)) = \frac{p^{|x|}}{1 - p}$$

diese Leitfähigkeit korrespondiert mit dem $RW_{1/p}$ aus dem vorigen Vortrag $e \mapsto (\frac{1}{p})^{-|e|}$

umgekehrt ist auch der Überlebensparameter adaptiert an einen gegebenen Kantenwiderstand:

$$\frac{1 + \sum\limits_{o<u<x} r(e(u))}{1 + \sum\limits_{o<u\leq x} r(e(u))} = \frac{1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow \overleftarrow{x})}{1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow x} = \frac{P[o \leftrightarrow x]}{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]} = \frac{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}] \cdot p_x}{P[o \leftrightarrow \overleftarrow{x}]} = p_x$$

Bsp: der einfache Random Walk ($c \equiv 1$) ist adaptiert an $p_x = \frac{|x|}{|x|+1}$

Im Fall adapierter Leitfähigkeiten können wir die Untergrenze von $P[o \leftrightarrow \infty]$ genauer quantifizieren:

Theorem 4. 15 *Für eine unabhängige Perkolation und adaptierte Leitfähigkeit auf dem selben Baum gilt*

$$\frac{\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)}{1 + \mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)} \leq P[o \leftrightarrow \infty] \tag{13}$$

Beweis:

- sei Π eine minimale Kantenmenge, die o von ∞ trennt
- sei $\mu \in \mathcal{P}(\Pi)$ das Maß in $\mathcal{P}(\Pi)$, das minimale Energie hat
- sei Θ der Fluss induziert durch μ

es gilt:

$$\mathcal{E}(\mu) = 1 + \mathcal{E}(\Theta) \overset{*}{=} 1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow \bar{\Pi})$$

$$\overset{(4.13)}{\Rightarrow} P[o \leftrightarrow \infty] \geq \inf_{\Pi} \frac{1}{1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow \bar{\Pi})} = \frac{1}{1 + \mathcal{R}(o \leftrightarrow \infty)} = \frac{\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)}{1 + \mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)}$$

$$*\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{x,y \in \bar{\Pi}} \Theta(x)\Theta(y)\mathcal{R}(o \leftrightarrow x \wedge y) = \sum_{x,y \in \bar{\Pi}} \mu(x)\mu(y) \cdot \sum_{e \leq x \wedge y} r(e) = \sum_{\substack{e \in T \\ e \leq \bar{\Pi}}} r(e) \cdot \sum_{\substack{x,y \in \bar{\Pi} \\ x,y \geq e}} \mu(x)\mu(y) =$$

$$= \sum_{\substack{e \in T \\ e \leq \bar{\Pi}}} r(e) 1^2 = \mathcal{R}(o \leftrightarrow \bar{\Pi})$$

□

Erinnerung:

$$p_c(T) = \sup\{p \mid P[o \leftrightarrow \infty] = 0\} \tag{14}$$

heisst **kritische Perkolationswahrscheinlichkeit**

Theorem 4. 16 *Für jeden lokal endlichen, unendlichen Baum gilt*

$$p_c(T) = \frac{1}{brT} \tag{15}$$

Beweis: aus dem vorigen Vortrag wissen wir

- $p_c \geq \frac{1}{brT}$
- Theorem 2.23: Sei T ein lokal endlicher Baum. Wenn gilt $\lambda < brT$ dann ist der RW_λ transient
- Theorem 2.3: Ein Random Walk auf einem unendlichen verbundenen Netzwerk ist transient $\Leftrightarrow \mathcal{C}(x \leftrightarrow \infty) > 0$

zusammen mit Theorem 4.15 liefert dies:

$$p > \frac{1}{brT} \Rightarrow \frac{1}{p} < brT \overset{(2.23)}{\Rightarrow} RW_{1/p} \text{ ist transient } \overset{(2.3)}{\Rightarrow} \mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty) > 0$$

$$\overset{(4.15)}{\Rightarrow} P[o \leftrightarrow \infty] > 0$$

also nach Kolmogorov's Null-Eins-Gesetz gerade 1

□

Im Weiteren werden wir zeigen, dass man die „Zweite-Moment-Ungleichung "aus Theorem 4.15 bis zum Faktor 2 umkehren kann, d.h. wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\frac{\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)}{1+\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)} \leq P[o \leftrightarrow \infty] \leq 2\frac{\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)}{1+\mathcal{C}(o \leftrightarrow \infty)} \tag{16}$$

- Betrachte eine unabhängige Perkolation auf einem Baum T.
- Bette T in die obere Halbebene ein mit der Wurzel im Ursprung.
- Für ein minimales Cutset Π ordne alle $e \in \Pi$ im Uhrzeigersinn. Dies definiert eine **lineare Ordnung** $\preceq$ auf Π

Definiere eine **Zufallsvariable** e^* mit folg. Eigenschaften:

- falls $o \leftrightarrow \Pi$ sei e^* die (bzgl. $\preceq$) kleinste Kante in Π die sich in $T_o(\omega)$ befindet
- sonst soll e^* keine Werte in Π annehmen

Damit definieren wir ein (evtl. unvollkommenes) **„Auftreffmaß"** σ mittels

$$\sigma(e) = P[e^* = e] \text{ für } e \in \Pi \Longrightarrow \sigma(\Pi) = P[o \leftrightarrow \Pi]$$

Für $P[o \leftrightarrow \Pi] > 0$ definiert $\mu = \frac{\sigma}{P[o \leftrightarrow \Pi]}$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** aus $\mathcal{P}(\Pi)$

Für dieses Maß gilt

$$\mathcal{E}(\mu) \leq \frac{2}{P[o \leftrightarrow \Pi]}$$

Beweis: für alle $e \in \pi$ gilt:

$$\sum_{e' \preceq e \in \Pi} \sigma(e') \frac{P[o \leftrightarrow e', o \leftrightarrow e]}{P[o \leftrightarrow e']} = \sum_{e' \preceq e \in \Pi} P[e^* = e'] \cdot P[o \leftrightarrow e \mid o \leftrightarrow e'] =$$

$$= \sum_{e' \preceq e \in \Pi} P[e^* = e'] \cdot P[o \leftrightarrow e \mid e^* = e'] = \sum_{e' \in \Pi} P[e^* = e'] \cdot P[o \leftrightarrow e \mid e^* = e'] = P[o \leftrightarrow e]$$

$$\sum_{e' \preceq e} \mu(e') \frac{P[o \leftrightarrow e', o \leftrightarrow e]}{P[o \leftrightarrow e']P[o \leftrightarrow e]} = \sum_{e' \preceq e} \frac{\sigma(e')}{P[o \leftrightarrow \Pi]} \frac{P[o \leftrightarrow e', o \leftrightarrow e]}{P[o \leftrightarrow e']P[o \leftrightarrow e]} =$$

$$= \frac{1}{P[o \leftrightarrow \Pi]P[o \leftrightarrow e]} P[o \leftrightarrow e] = \frac{1}{P[o \leftrightarrow e]}$$

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{e_1,e_2\in\Pi} \mu(e_1)\mu(e_2)\frac{P[o\leftrightarrow e_1, o\leftrightarrow e_2]}{P[o\leftrightarrow e_1]P[o\leftrightarrow e_2]} \le 2\cdot\sum_{e\in\Pi}\sum_{e'\preceq e}\mu(e)\mu(e')\frac{P[o\leftrightarrow e, o\leftrightarrow e']}{P[o\leftrightarrow e]P[o\leftrightarrow e']} =$$

$$= 2\cdot\sum_{e\in\Pi}\mu(e)\frac{1}{P[o\leftrightarrow \Pi]} = \frac{2}{P[o\leftrightarrow\Pi]}$$

□

daher folgt

$$P[o\leftrightarrow\Pi] \le \frac{2}{\mathcal{E}(\mu)} \le 2\cdot \sup_{\nu\in\mathcal{P}(\Pi)}\frac{1}{\mathcal{E}(\nu)} \tag{17}$$

Theorem 4. 20 *Für eine unabhängige Perkolation auf einem Baum mit adaptierter Leitfähigkeit gilt*

$$\frac{\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)}{1+\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)} \le P[o\leftrightarrow\infty] \le 2\frac{\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)}{1+\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)}$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{P[o\leftrightarrow\infty]}{2-P[o\leftrightarrow\infty]} \le \mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty) \le \frac{P[o\leftrightarrow\infty]}{1-P[o\leftrightarrow\infty]}$$

Beweis:
aus Theorem 4.14 wissen wir bereits: $\frac{\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)}{1+\mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)} \le P[o\leftrightarrow\infty]$

$$P[o\leftrightarrow\infty] = \inf_{\Pi} P[o\leftrightarrow\Pi] \le 2\cdot\inf_{\Pi}\{\sup_{\nu\in\mathcal{P}(\Pi)}\frac{1}{\mathcal{E}(\nu)}\} = 2\cdot\inf_{\Pi}\{\frac{1}{1+\mathcal{R}(o\leftrightarrow\bar{\Pi})}\} = 2\frac{1}{1+\mathcal{R}(o\leftrightarrow\infty)}$$

□

Daraus folgt

Corollar 4. 21 *Eine Perkolation tritt genau dann auf (d.h.* $P[o\leftrightarrow\infty]>0$*) wenn der Random Walk auf* T *für korrespondierende adaptierte Leitähigkeiten transient ist.*

Beweis:
„$\Rightarrow$ “: $P[o\leftrightarrow\infty]>0 \overset{4.20}{\Rightarrow} \mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)>0 \Rightarrow$ der RW ist transient

„$\Leftarrow$ “: RW ist transient $\Rightarrow \mathcal{C}(o\leftrightarrow\infty)>0 \overset{4.20}{\Rightarrow} P[o\leftrightarrow\infty]>0$

□