Fachbereich Informatik und Mathematik
ISMI - Institut für Stochastik
& Mathematische Informatik

Analysis I

SS 2010

H. Dinges

20. Februar 2011

Vorwort

Nach einem berühmten Ausspruch von W. R. Hamilton (1805-1865) kann man das Studium der Algebra auf dreierlei Weisen betreiben, je nachdem, was man in den Vordergrund stellt: die Flüssigkeit der Operationen, die Symmetrie des Ausdrucks oder die Klarheit der Gedanken. Dasselbe gilt wohl auch für die Analysis.

Viele unserer Anfänger erwarten (entsprechend ihrer Erfahrungen mit der Schulmathematik) im Studium zunächst einmal Unterweisung in 'flüssigen Operationen' sowie Prüfungen, in welchen entsprechende Fähigkeiten unter Beweis zu stellen sind. Sie sind irritiert, wenn sie erfahren, welch geringen Stellenwert solche Fähigkeiten in der mathematischen Wissenschaft haben.

Bei der 'Symmetrie des Ausdrucks' wird man vielleicht an sorgfältig ausgearbeitete Beweise denken. Der didaktische Wert eines frühen Zwangs dazu ist umstritten. Eine präzise mathematische Sprache ist natürlich für den Dozenten eine absolute Verpflichtung; den Studierenden sollte u. E. jedoch Zeit gegeben werden, sich an die mathematische Formelsprache zu gewöhnen. Sie werden, wenn sie später einmal etwas tiefere mathematische Gedanken zu entwickeln haben, die Vorteile einer Sprache schätzen, in der man die Ergebnisse schnörkelfrei und präzise ausdrücken kann. Wir bezweifeln, dass ein frühes Einüben standardisierter Schemata des 'strengen' Beweisens einen den Zeitaufwand lohnenden Beitrag leisten können zur Schulung des mathematischen Denkens.

Alle Kraft der Studierenden sollte u. E. auf die 'Klarheit der Gedanken' gerichtet sein. Auch bei der Behandlung recht elementarer Zusammenhängen sollten die Studierenden Rechenschaft ablegen zu Fragen wie: Wo liegt das eigentliche Problem? Wie ist das Ergebnis zu verstehen und zu interpretieren? Welche Annahmen waren für die Problemlösung essentiell? ... Mechanische Problemlösungen können das Verständnis ebensowenig ersetzen wie inhaltsleere Rituale der Darstellung.

Die Begriffe und Fragestellungen, an welche eine Einführung in die Analysis heranführen sollen, sind dem Unkundigen gegenüber nicht leicht zu benennen. Das kommt (zum Teil) daher, dass die Mathematiker vor etwas 200 Jahren die Einzelfragen, die eine deutlich sichtbare Beziehung zu naturwissenschaftlichen Fakten haben, in den Hintergrund ihrer Wissenschaft gestellt haben, um sich vorrangig den Fragen der mathematischen Methodik zuzuwenden. Die Einzelfragen werden in der Reinen Mathematik nur noch zur Exemplifizierung der mathematischen Prinzipien herangezogen.

Man kann immerhin das Anliegen benennen, welches die Mathematiker des 19. Jahrhunderts verfolgten bei der Neuordnung der Techniken, die im 18. Jahrhundert zu allerseits bewunderten Ergebnissen in den Naturwissenschaften geführt haben. Man bemühte sich um eine auf Axiome gegründete Theorie, welche in der Lage ist, das Kontinuum und die kontinuierlichen Übergänge mathematisch exakt zu fassen. Es hat sich in langen Anläufen herausgestellt, dass man dazu weit ausholen muss. Man musste erst Begriffe wie die Vollständigkeit eines metrischen Raums und die Kompaktheit eines topologischen Raums herausarbeiten, um darauf ein sauber begründetes Konzept der Stetigkeit zu bauen, welches die (im 18. Jahrhundert exzessiv und unsicher genutzte) 'Anschauung' sowohl disziplinieren als auch leiten kann. Es stellte sich heraus, dass der Kern der Aufgabe darin bestand, ein gründliches Verständnis für die verschiedenen Aspekte des Systems der reellen Zahlen zu entwickeln.— Man hat das Unternehmen deswegen das Projekt der Arithmetisierung der Analysis genannt.

In der hier vorgelegten Analysis I nähern wir uns dem Problem von zwei Seiten. Mit dem Ziel, das im 18. Jahrhundert bereitgestellte Material in Grundzügen aufzuzeigen, verlassen wir uns in den Abschnitten 1, 2, 3 in naiver Weise auf das System $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als einen vollständigen angeordneten Körper, in welchem die (von der Schule her wohlbekannte) Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen dicht liegt. Parallel dazu werden die entscheidenden Aspekte dieses hochkomplexen Systems einzeln auf axiomatischer Grundlage entwickelt; in den Abschnitten 4, 5, 6 besprechen wir Mengensysteme, metrische Räume und Hausdorff-Räume. Diese der Anschauung fernen Abschnitte sollten parallel zum naiven 'anschaulichen' Herangehen in den Abschnitten 1, 2, 3 behandelt werden — und werden daher auch als die Abschnitte 1A, 2A, 3A ausgewiesen.

Die beiden Züge werden im Abschnitt 7 zusammengeführt. Es geht da um die Menge aller stetigen Funktionen auf einem Intervall, sowohl unter dem Gesichtspunkt der in den Abschnitten 4, 5, 6 entwickelten abstrakten Begrifflichkeiten als auch in ihren Beziehungen zu den in den Abschnitten 1 und 2 vorgestellten konkreten Funktionen. Wir schliessen mit einem historisch bestimmten Blick auf die ganz anders gearteten Wege, auf welchen man im Laufe des 18. und 19. Jahrhunderts versucht hat, das Kontinuierliche zu fassen.

Frankfurt im Herbst 2010 Hermann Dinges

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und weitere konkrete Rechengrößen

1.1 Zahlbereichserweiterungen aus der Schulmathematik

Wir gehen davon aus, dass wir alle hier die Zahlen begreifen als 'wohlbestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens' (im Sinne von G. Cantor 1895). Einzelheiten über verschieden Typen von Zahlen werden nach und nach vertieft.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \qquad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}_0.$$

Wichtige Zahlbereichserweiterungen aus dem Schulunterricht

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Weitere Systeme von 'Rechengrößen':

- Teilmengensysteme einer Grundmenge Ω,oder Mengenalgebren als Boole'sche Verbände
- Systeme von Matrizen, z. B. komplexe $n \times n$-Matrizen
- Polynome (mit komplexen Koeffizienten) als euklidischer Ring
- Trigonometrische Polynome als Ring und Prä-Hilbertraum

Parallel zu den konkreten Systemen von Rechengrößen interessieren wir uns auch für diverse abstrakte algebraische Strukturen wie Körper, Gruppen, Ringe, Verbände.

1. Bei der Erweiterung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ lernt man schon etwas über Distributivgesetze, z. B. auch '(minus) $\times$ (minus) = (plus)'.
2. Stichwörter zu Erweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ('Bruchrechnen') sind : Teilbarkeit, ggT, kgV, Teilen mit Rest, Euklidischer Algorithmus.
3. Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist ein Kernthema der Analysis: Vervollständigung eines metrischen Raums, Supremum und Infimum einer Zahlenmenge.
4. Die Erweiterung $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bringt den Übergang in die Zahlenebene: Damit auch geometrische Aspekte, durch die 'Polarkoordinaten' trigonometrische Funktionen und Analytisches zur Exponentialfunktion im Komplexen.

Die algebraische Struktur nehmen wir (ohne Begründung durch Axiome) als gegeben an:

$$\Big(\mathbb{C}, (=), 0, 1, i, {}^*, +, \cdot\Big).$$

Wir haben also eine Menge $\mathbb{C}$ (mit ihrem Gleichheitsbegriff), drei ausgezeichnete Elemente, eine involutorische Abbildung * ('komplexe Konjugation'), und zwei Verknüpfungen. — mit all den bekannten Eigenschaften.

1.2 Geometrisches und Analytisches zu den komplexen Zahlen

Die komplexe Zahl $z = a + ib$ wird als Punkt in der komplexen Zahlenebene verstanden, der im Abstand $|z|$ vom Nullpunkt liegt, und zwar in der Richtung, die den Winkel $\phi = \arg(z)$ zur reellen Achse hat. $\bar{z}$ oder z^* bezeichnet die konjugiert komplexe Zahl $a - ib$.

1. $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$, (Betrag von z)
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}\, \exists\, \phi \in \mathbb{R}/2\pi: \quad \cos\phi = a, \quad \sin\phi = b$ (Argument von z)
3. $$z = |z| \cdot (\cos\phi + i\sin\phi), \qquad w = |w| \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) \quad \Longrightarrow$$ $$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi)\big),$$
   Der Betrag des Produkts ist das Produkt der Beträge
   das Argument des Produkts ist die Summe der Argumente; denn
   $$\cos(\phi + \psi) = \cos\phi \cdot \cos\psi - \sin\phi \cdot \sin\psi,$$
   $$\sin(\phi + \psi) = \sin\phi \cdot \cos\psi + \cos\phi \cdot \sin\psi,$$
4. Man notiert $\quad z \cdot w \;=\; |z|e^{i\phi} \cdot |w|e^{i\psi} \;=\; |zw| \cdot e^{i(\phi+\psi)}$.

Zur Erinnerung an die **Exponentialfunktion** im Reellen: $\mathbb{R} \ni \alpha \to e^{\alpha}$

Wenn das Kapital K zum jährlichen Zinssatz α verzinst wird, dann hat man nach einem Jahr den Betrag $K \cdot (1 + \alpha)$; wenn halbjährlich verzinst wird zum Zinssatz $\alpha/2$, dann hat man nach einem Jahr den Betrag $K \cdot (1 + \alpha/2)^2$; wenn monatlich verzinst wird zum Zinssatz $\frac{\alpha}{12}$, dann ... $K \cdot (1 + \frac{\alpha}{12})^{12}$. 'Kontinuierliche Verzinsung' ergibt nach einem Jahr den Betrag $K \cdot e^{\alpha} = K \cdot \lim_{n\to\infty}\big(1 + \frac{\alpha}{n}\big)^n$.

$$\big(1 + \frac{\alpha}{n}\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \big(\frac{\alpha}{n}\big)^k = \sum \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \alpha^k$$
$$= \sum \frac{1}{k!} \cdot (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot (1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}) \cdot \alpha^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \alpha^k \;=\; e^{\alpha}.$$

Reinimaginäres Argument: $\mathbb{R} \ni \phi \to e^{i\phi}$. (Naive Betrachtung)

Der Betrag von $\big(1 + \frac{i\phi}{n}\big)^n$ ist $\Big(\sqrt{1 + \frac{\phi^2}{n^2}}\Big)^n = \Big(1 + \frac{\phi^2}{n^2}\Big)^{n/2} \sim 1$.

Das Argument ist $n \cdot \tilde{\phi}_n$, wenn $\tilde{\phi}_n$ das Argument von $(1 + \frac{i\phi}{n})$ ist. $\quad \tilde{\phi}_n = \arctan(1 + \frac{i\phi}{n})$.

Es gilt $n \cdot \tilde{\phi}_n \longrightarrow \phi$, und daher $\big(1 + \frac{i\phi}{n}\big)^n \Longrightarrow (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$. Und das gibt uns eine der schönsten Formeln der elementaren Analysis, nämlich

$$e^{i\phi} \;=\; \cos\ \phi + i \cdot \sin\ \phi.$$

Wir gewinnen die sog. **Potenzreihendarstellung** der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= 1 + i\phi + \tfrac{1}{2!}(i\phi)^2 + \tfrac{1}{3!}(i\phi)^3 + \tfrac{1}{4!}(i\phi)^4 + \tfrac{1}{5!}(i\phi)^5 + \cdots \\ &= \big(1 - \tfrac{1}{2!}\phi^2 + \tfrac{1}{4!}\phi^4 - \tfrac{1}{6!}\phi^6 + \cdots\big) + i \cdot \big(\phi - \tfrac{1}{3!}\phi^3 + \tfrac{1}{5!}\phi^5 + \cdots\big) \\ &= \cos\ \phi \;+\; i \cdot \sin\ \phi. \end{aligned}$$

Die Potenzreihendarstellung soll hier schon einmal naiv verwendet werden, die nötigen Überlegungen zur Konvergenz werden wir später im passenden Zusammenhang erörtern.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \left(1 + z + \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{4!}z^4 + \cdots\right) \cdot \left(1 + w + \tfrac{1}{2!}w^2 + \tfrac{1}{3!}w^3 + \tfrac{1}{4!}w^4 + \cdots\right) \\ &= 1 + (z+w) + \tfrac{1}{2!}(z^2 + 2zw + w^2) + \tfrac{1}{3!}(z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3) \\ &+ \tfrac{1}{4!}(z^4 + 4z^3w + 6z^2w^2 + 4zw^3 + w^4) + \cdots \\ &= 1 + (z+w) + \tfrac{1}{2!}(z+w)^2 + \tfrac{1}{3!}(z+w)^3 + \tfrac{1}{4!}(z+w)^4 + \cdots \;=\; e^{z+w}. \end{aligned}$$

Hier und auch schon in einer früheren Überlegung brauchen wir die **Binomialkoeffizienten** und die binomische Formel:

Satz. *Für* $k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$ *ist*

$$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

die Anzahl der k*-Teilmengen in einer* n*-Menge, und es gilt*

$$\left(a + b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \tfrac{1}{2}n(n-1) \cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + n \cdot ab^{n-1} + b^n.$$

Die meisten Lehrbücher führen den Beweis durch vollständige Induktion, nachdem sie die Zahlen $\binom{n}{k}$ nach dem Muster des Pascal'schen Dreiecks rekursiv eingeführt haben.— Dieses Vorgehen passt hier nicht in unsere Systematik.

Für jemanden, der den Umgang mit Summenzeichen gelernt hat, ist der obige Beweis der Funktionalgleichung sehr kurz hinzuschreiben.

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} z^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{1}{m!} z^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \left(\sum_{\{k+m=n\}} \tfrac{n!}{k! \cdot m!} z^k w^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}.$$

Eine einfache und schöne Anwendung finden die komplexen Zahlen im Begriff der komplexen Amplitude einer 'reinen Sinusschwingung'.

Sprechweise (Kalkül der komplexen Amplituden).

Eine reellwertige Funktion auf der Zeitachse der Form $f(t) = a \cdot \cos\,\omega(t - t_0)$ nennt man eine reine Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω, der maximalen Amplitude a und der Phase t_0. Wenn man reine Sinusschwingungen mit derselben Kreisfrequenz ω überlagert, bekommt man wieder eine reine Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω. Amplituden und Phasen berechnet man folgendermaßen .

$$a \cdot \cos\,\omega(t - t_0) = \Re\left(a \cdot e^{i\omega(t-t_0)}\right) = \Re\left(A \cdot e^{i\omega t}\right) \quad \text{mit} \quad A = a \cdot e^{-i\omega t_0}$$

$$a \cdot \cos\,\omega(t - t_0) + b \cdot \cos\,\omega(t - t_1) = \Re\left(A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{i\omega t}\right) = \Re\left((A+B) \cdot e^{i\omega t}\right).$$

Die 'komplexen Amplituden' müssen also nur einfach wie komplexe Zahlen addiert werden.— Auf die Überlagerung von 'Sinusschwingungen' zu verschiedenen Kreisfrequenzen kommen wir später zu sprechen.

1.3 Ein Schritt über $\mathbb{C}$ hinaus.

Die Mathematiker sind mit ihren Rechenkünsten natürlich nicht bei den komplexen Zahlen stehen geblieben. Wenn sie weitergehen, müssen sie allerdings auf manche der von den Zahlbereichen her gewohnten Rechenregeln verzichten. Es eröffnen sich aber andererseits auch neue Möglichkeiten der Konstruktion.

Viele Einführungen 'Analysis I' legen großen Wert darauf, ein Axiomensystem bereitzustellen, welches das System der reellen Zahlen charakterisiert. Generell sieht man den Ertrag des axiomatischen Aufbaus einer Theorie darin, dass damit ausgeschlossen wird, dass unkontrollierte Überlegungen und intuitive Konstruktionen ins Feld gebracht werden, die den vorgegebenen Rahmen sprengen. Nun sind aber im Falle der reellen Zahlen störende Blicke über den Zaun kaum als schädlich anzusehen$f$geometri. Gewisse Überlegungen über das System $\mathbb{R}$ hinaus erscheinen geradezu erwünscht, wenn sie den Anfänger auf weitergehende mathematische Überlegungen oder intendierte Anwendungen aufmerksam machen.

Wir wollen im Folgenden die algebraischen Eigenschaften des Systems $\mathbb{C}^{2\times 2}$ der komplexen 2×2-Matrizen skizzieren. Dies gibt uns einerseits eine gute Gelegenheit, die besonderen Eigenschaften von $\mathbb{C}$ im Einzelnen zu rekapitulieren. (Es geht im Wesentliche um die Körpereigenschaften gepaart mit der Konjugation.) Ein erstes Studium der komplexen 2×2-Matrizen erscheint aber auch als passende Vorbereitung auf wichtige Themen und Techniken im Bereich der Geometrie.

Definition 1.1. Ein Quadrupel komplexer Zahlen, welches in einem quadratischen Schema angeordnet ist, nennt man eine komplexe 2×2-Matrix.

Addition: Matrizen werden addiert, indem man die entsprechenden 'Einträge' addiert.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}.$$

Das neutrale Element für die Addition ist die 'Nullmatrix' 0; alle Einträge sind 0.
Die Multiplikation ist die sog. **Matrizenmultiplikation**.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Das neutrale Element für die Multiplikation ist die 'Einheitsmatrix' E; sie hat Einträge 1 in der Diagonalen und 0 ausserhalb.
Die Konjugation ist die **hermitische Konjugation**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

Die hermitische Konjugation ist involutorisch; und es gilt

$$\big(A + B\big)^* = A^* + B^*. \qquad \big(A \cdot B\big)^* = B^* \cdot A^*.$$

Es gelten die beiden **Assoziativgesetze** und die beiden **Distributivgesetze**:

$$(A+B)+C = A+(B+C); \qquad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C);$$
$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C; \qquad A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C.$$

Kommutativität: Die Addition ist kommutativ, nicht aber die Multiplikation (im Gegensatz zur Multiplikation in $\mathbb{C}$). Ein Beispiel zeigt die Nichtkommutativität

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bei der ersten Multiplikaktion werden die Spalten von A vertauscht, bei der zweiten werden die Zeilen vertauscht.
Inversenbildung: Zu jeder Matrix A existiert genau eine additive Inverse $-A$. A besitzt aber nicht notwendigerweise eine multiplikative Inverse; wenn eine solche existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet; $(A^{-1})\cdot A = E = A\cdot(A^{-1})$. Matrizen, die eine Inverse besitzen, nennt man auch nichtsinguläre Matrizen. Wenn A und B nichtsingulär sind, dann auch das Produkt; und es gilt $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Bemerke: Matrizen werden auch mit komplexen Zahlen m multipliziert: man multipliziert alle Einträge mit m, was auf dasselbe hinausläuft wie die Multiplikation (von rechts oder links) mit der Diagonalmatrix $D = m\cdot E$, die Einträgen m in der Diagonale hat. Die Inverse einer nichtsingulären Matrix A ergibt sich sofort aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad-bc)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A ist genau dann nichtsingulär, wenn die Determinante $\det A = ad - bc$ nicht verschwindet. Man kann (mit einiger Mühe auch ohne weitere Gedanken) nachrechnen, dass die Determinante auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ multiplikativ ist: $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$.

Fast alle der hier aufgeführten Eigenschaften der Struktur $\left(\mathbb{C}^{2\times 2}, =, 0, E, {}^*, +, \cdot\right)$ sind sehr einfach zu bestätigen, wenn man die entsprechenden Rechenregeln in $\mathbb{C}$ kennt.

Lediglich von der Assoziativität der Multiplikation kann man das nicht so leichthin sagen; die ist schon bei der Zahlbereichserweiterung $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. ein (kleines) Problem. Man kann sie aber schnell begründen mit Hilfe der ganz allgemein gültigen Assoziatität der Matrizenmultiplikation. Davon sollte jeder Anfänger wissen, auch wenn er zunächst noch nicht viel damit verbinden kann. Der Beweis erfordert nichts weiter als eine Vertrautheit mit dem Summenzeichen.

Lemma (Assoziativität der Matrizenmultiplikation). *Sei* A *eine* $I\times J$*-Matrix,* B *eine* $J\times K$*-Matrix und* $M = A\cdot B$ *die* $I\times K$*-Matrix mit den Einträgen* $m_{ik} = \sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}$. *Wenn* C *eine* $K\times L$*-Matrix ist , und* $N = B\cdot C$*, dann gilt* $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$*, d. h.* $\quad M\cdot C = A\cdot N = A\cdot B\cdot C$.

Für denjenigen, der mit Summenzeichen umgehen kann, ist der Beweis einfach. Die Einträge der Produktmatrix ergeben sich als Doppelsumme: $(A \cdot B \cdot C)_{im} = \sum_{jk} a_{ij} b_{jk} c_{km}$. Wenn man mit dem Summenzeichen umgehen kann, stellt man auch problemlos fest, dass die Matrizenmultiplikation die Distributivgesetze erfüllt.

Didaktischer Einschub: Die Assoziativität der Multiplikation
In der Schule übt man sog. Kettenrechnungen: Ausgehend von einer Zahl soll der Schüler (im Kopf) mit einer Zahl multiplizieren, zum Ergebnis etwas hinzuaddieren, das Ergebnis dann wieder multiplizieren usw.

Bei schriftlichen Aufgaben wie z. B. $17 \cdot 5 \cdot 20 = ?$ wird den Schülern ‘erlaubt’, auch so zu rechnen $17 \cdot 5 \cdot 20 = 17 \cdot 100 = 1700$. Gibt es eine Begründung für den Schüler? Bei der Buchstabenrechnung in höheren Klassen lernt der Schüler $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Gibt es eine Begründung für den Schüler? An der Universität benennt man dann das Assoziativgesetz. Gilt es? Oder: Unter welchen Umständen gilt es? In $\mathbb{N}$? in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, in $\mathbb{C}$?

Nach Meinung der gängigen Lehrbücher würde es zu weit führen, wenn man den Studierenden einen irgendwie gearteten Beweis vorführte. Man schreibt ihnen die Körperaxiome auf und versichert ihnen, dass die uns mehr oder weniger bekannten Zahlbereiche Körper sind; und da gelten dann alle die Assoziativ-, Distributiv- und Kommutativgesetze.

Von da an gilt, was die Zahlen betrifft, die Aufmerksamkeit der elementaren Analysis-Lehrbücher nur noch der Ordnung in $\mathbb{R}$ und den Fragen der Vollständigkeit. Wir stellen uns gegen diesen Kurs, indem wir einerseits die Algebra von vorneherein über $\mathbb{R}$ hinausführen, und parallel dazu die abstrakte Mengenlehre bis zum Begriff des vollständigen metrischen Raums weiterverfolgen. Die beiden Stränge des Aufbaus werden später zusammengeführt.

Zuerst einmal wird bei uns sozusagen naiv mit den Zahlen gerechnet, d. h. so, wie man es auf der Schule gelernt hat, ohne auf das Wesen der Zahlen und der mit ihnen vorgenommenen Rechenoperationen einzugehen.— Das entspricht einer höchst erfolgreichen Tradition der Lehre; man vergleiche z. B. das die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts beherrschende Lehrbuch ‘v. Mangoldt u. Knopp’ (erste Auflage 1922, bis 1978 im Hirzel-Verlag erschienen). In unserem Aufbau wird die Basis allerdings (dem mathematischen Fortschritt entsprechend) deutlich breiter angelegt. Insbesondere wird die Matrizenrechnung nicht auf die Lehre von den Determinanten verkürzt. Ausserdem erhalten die Metriken und speziell die Dreiecksungleichung den ihnen zustehenden prominenten Platz.

Zurück zum Assoziativgesetz in $\mathbb{C}$: Wir haben drei Beweise anzubieten:

1. Wir haben gezeigt: Zwei komplexe Zahlen wird multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert. Die Assoziativität folgt. Für die Definition des Arguments benötigen wir natürlich die trigonometrischen Funktionen und im Besonderen die Additionstheoreme. Diese können aber auf geometrischem Wege im Sinne der Schulmathematik hergeleitet werden.

2. Wir benützen die Darstellung der komplexen Zahlen durch Real- und Imaginärteil :

$$\begin{aligned}&\big((a_0+ia_1)(b_0+ib_1)\big)\cdot(c_0+ic_1)=\\=&\big((a_0b_0-a_1b_1)+i(a_0b_1+a_1b_1)\big)\cdot(c_0+ic_1)=\\=&\quad(a_0b_0-a_1b_1)\cdot c_0-(a_0b_1+a_1b_o)\cdot c_1+\\+&\,i\cdot\big((a_0b_0-a_1b_1)\cdot c_1+(a_0b_1+a_1b_0)\cdot c_0\big).\end{aligned}$$

   Im Reallteil kommt das Suffix 0 dreimal (mit +) oder einmal (und dann mit -) vor. Im Imaginärteil kommt es zweimal oder gar nicht vor. Aus dieser Beschreibung der acht Terme im Produkts ergibt sich leicht die Assoziativität.

3. Wir können auch das Lemma aus dem Matrizenkalkül benützen, um die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$ nachzuweisen, indem wir bemerken, dass man identifizieren kann

$$a+ib \quad\longleftrightarrow\quad a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=a\cdot E+b\cdot J.$$

   Es gilt $J^2=-E$. Die komplexen Zahlen erscheinen hier als 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen.

Nochmals hermititische Konjugation
Die hermitische Konjugation $A\longmapsto A^*$ ist eine Spezialität der Matrizen mit komplexen Einträgen; aus einer $I\times J$-Matrix wird eine $J\times I$-Matrix.

Sprechweise.
Eine Matrix U heisst eine unitäre Matrix, wenn die Produkte $U\cdot U^*$ und $U^*\cdot U$ die Einheitsmatrix ergeben. Wenn zusätzlich $\det U=1$, dann spricht man von einer speziellen unitären oder einer unimodularen unitären Matrix. Eine quadratische Matrix H mit komplexen Einträgen heisst eine hermitische Matrix, wenn $H=H^*$.

Wir interessieren uns hier nur für quadratische Matrizen. Für die quadratische Matrix A sind die Matrizen $S=A+A^*$ und $T=\frac{1}{2i}(A-A^*)$ hermitische Matrizen. Es gilt offenbar

$$A=S+i\cdot S,\quad A^*=S-i\cdot T,\quad AA^*=S^2+T^2+i\cdot(TS-ST),\quad A^*A=S^2+T^2-i\cdot(TS-ST).$$

Produkte hermitischer Matrizen sind im Allgemeinen nicht hermitisch. Produkte (spezieller) unitärer Matrizen sind (spezielle) unitäre Matrizen. In der Sprache der Algebra wird das so ausgedrückt:

Satz. *Die Menge $U(n,\mathbb{C})$ der unitären-Matrizen und die Menge $SU(n,\mathbb{C})$ der speziellen unitären $n\times n$-Matrizen sind Gruppen (mit der Matrizenmultiplikation).*

Dabei ist der allgemeine Begriff einer Gruppe durch die folgende Definition festgelegt:

Definition 1.2 (Gruppe).
Eine Menge $\mathbb{G}$ mit einem ausgezeichneten Element e und einer Verknüpfung $\circ$ wird eine Gruppe genannt, wenn für $(\mathbb{G}, e, \circ)$ gilt

1. $e \circ g = g = g \circ e$ für alle $g \in \mathbb{G}$
2. zu jedem $g \in \mathbb{G}$ existiert h, sodass $h \circ g = e = g \circ h$.
3. $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$.

Zu jedem $g \in \mathbb{G}$ gibt es nur ein Element h mit der Eigenschaft 2); es wird mit g^{-1} bezeichnet und das zu g inverse Element genannt. Die eindeutige Bestimmtheit ergibt sich in der Tat mittels des Assoziativgesetzes aus
$$g \circ h' = e, \quad h \circ g = e \quad \Longrightarrow \quad h = h \circ g \circ h' = h'.$$

Definition 1.3. Eine Teilmenge einer Gruppe $\mathbb{G}' \subseteq G$ wird eine Untergruppe genannt, wenn gilt
$$g \in \mathbb{G}' \Longrightarrow g^{-1} \in \mathbb{G}', \qquad g,\ h \in \mathbb{G}' \Longrightarrow g \circ h \in \mathbb{G}'.$$

Beispiel: Die spezielle unitäre Gruppe $SU(n, \mathbb{C})$ ist eine Untergruppe der unitären Gruppe $U(n, \mathbb{C})$.

Man prüft leicht nach, dass die Elemente der speziellen unitären Gruppe $SU(2, \mathbb{C})$ gerade die Matrizen der folgenden Gestalt sind
$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$
Wenn man eine solche Matrix mit einem Skalar $e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}/2\pi$ multipliziert, dann erhält man eine unitäre Matrix mit der Determinante $e^{2i\phi}$.

Hinweis für Fortgeschrittene: Die Menge aller hermitischen 2×2-Matrizen ist ein vierdimensionaler reeller Vektorraum. Die Determinante ist eine quadratische Form mit der Signatur $(1, 3)$; sie macht den Raum also zu einem Minkowskiraum im Sinne der speziellen Relativitätstheorie. Eine beliebte 'Orthonormal- Basis' liefern zusammen mit der Einheitsmatrix die berühmten Pauli-Spinmatrizen
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Die trigonometrischen Polynome

Definition 1.4.
Ein trigonometrisches Polynom ist eine endliche formale Summe der Form

$$\cdots + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \cdots \quad \text{oder kurz} \quad \sum_n c_n e^{int}, \quad \text{mit komplexen } c_n.$$

Die Menge $\mathbb{T}$ der trigonometrischen Polynome ist zunächst einmal ein unendlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Sie wird dann aber mit zusätzlicher Struktur ausgestattet; man definiert auch die Konjugation und das Produkt von trigonometrischen Polynomen. Damit wird $\big(\mathbb{T}, =, 0, 1, ^*, +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring mit Eins im Sinne der **Algebra**.

Das hier definierte Produkt heisst das **Cauchyprodukt** der (finiten!) Koeffizientenfolgen oder auch das **Faltungsprodukt**:

$$(a_n)_n \star (b_n)_n = (c_n)_n \qquad \text{mit} \quad c_n = \sum_k a_k \cdot b_{n-k} = \sum_l a_{n-l} \cdot b_l.$$

Die trigonometrischen Polynome können auch als 2π-periodische komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t verstanden werden. Dies ist zulässig, weil durch die Funktion $\mathbb{R}/2\pi \ni t \longmapsto f(t) = \sum_n c_n e^{int}$ die Koeffizientenfolge eindeutig bestimmt ist, wie wir sofort sehen werden.
Die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{T}$ werden in der Präsentation durch Funktionen zu den punktweisen Operationen.

$$f(t) \cdot g(t) = \Big(\sum_k a_k e^{ikt}\Big) \cdot \Big(\sum_l b_l e^{ilt}\Big) = \sum_n c_n e^{int}.$$

Ersetzt man $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, dann gewinnt man die Präsentation

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(a_k \cos kt + b_k \sin kt\big) \quad \text{mit} \quad a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Die Identifikation der Koeffizienten erfolgt mittels elementarer Integrationen.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int} \cdot f(t)\, dt;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kt \cdot f(t)\, dt; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kt \cdot f(t)\, dt.$$

Den Beweis liefern die 'Orthonormalitätsrelationen' für die Funktionenschar $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int} \cdot e^{imt}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq n \\ 1 & \text{für} \quad m = n. \end{cases}$$

Die Präsentation durch Funktionen ist auch bequem für die Beschreibung der involutorischen Konjugationsabbildung *:

$$\mathbb{T} \ni f \longmapsto f^*, \quad f^*(t) = \bar{f}(t) = \sum \bar{c}_n e^{-int} = \sum \bar{c}_{-m} e^{imt}.$$

Offenbar gilt $\quad (f+g)^* = f^* + g^*, \quad (f \cdot g)^* = f^* \cdot g^*, \quad (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^* \quad$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.
In der Beschreibung mit Sinus und Cosinus unterzieht die Konjugation alle Koeffizienten der komplexen Konjugation: $a_k \mapsto \bar{a}_k, \quad b_k \mapsto \bar{b}_k$: denn die Funktionen $\cos kt, \sin kt$ sind reellwertig auf $\mathbb{R}/2\pi$. Ein trigonometrisches Polynom, als 2π-periodische Funktion verstanden. ist genau dann reellwertig, wenn $f = f^*$.

Das neutrale Element für die Multiplikation ist in der Präsentation durch finite Folgen die Folge, die in der Mitte den Eintrag 1 und sonst Nullen hat; in der Präsentation durch 2π-periodische ist das Einselement die Funktion identisch $= 1$. Nur die Vielfachen des Einselemets $(\neq 0)$ besitzen eine multiplikative Inverse in $\mathbb{T}$.

Für die **Analysis** wird der komplexe Vektorraum $\mathbb{T}$ vor allem durch das 'Skalarprodukt' interessant. Das **Skalarprodukt** der Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ hat eine bequeme Darstellung sowohl in der Folgenpräsentation als auch in der Präsentation durch 2π-periodische Funktionen

$$f(t) \leftrightarrow \mathbf{v} \leftrightarrow \sum c_n e^{int}, \qquad g(t) \leftrightarrow \mathbf{w} \leftrightarrow \sum d_n e^{int}$$
$$\langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(t) \cdot f(t)\, dt = \sum_n \bar{d}_n \cdot c_n.$$
$$\|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)^2\, dt = \sum_n |c_n|^2.$$

Das Skalarprodukt (oder die Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle}$) macht den Raum der trigonometrischen Polynome zu einem sog. Prä-Hilbertraum $\big(\mathbb{T}, \|\cdot\|\big)$. Mit Strukturen dieser Art werden wir uns in den Abschnitten über normierte Vektorräume ausführlich beschäftigen.

Hier wollen wir nur noch einige spezielle trigonometrische Polynome diskutieren, von denen wir sehen werden, dass sie sowohl aus der Sicht der Algebra als auch aus der Sicht der Analysis einige Aufmerksamkeit verdienen. Die Diskussion dieser speziellen Objekte gibt uns Gelegenheit, einige (von der Schule her bekannte) elementare Techniken einzuüben, wie z. B. die Summation der (endlichen!) geometrischen Reihe. Ein weiterer guter Grund, diese trigonometrischen Polynome unter verschiedenen Aspekten zu diskutieren, ist der, dass wir dann später in der Theorie der Fourier-Reihen (und bei Überlegungen zum berühmten Satz von Herglotz) auf elementare Beispiele zurückgreifen können.

Die Dirichlet-Kerne und die Fejér-Kerne.
Für $N \in \mathbb{N}$ definiert man den Dirichlet-Kern der Ordnung N, und den Fejér-Kern F_N:

$$\begin{aligned}
D_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{int} \;=\; 1 + 2\cdot\cos t + 2\cdot\cos 2t + \cdots + 2\cdot\cos Nt = \\
&= \left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right)^{-1}\cdot\left(e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}\right) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin t/2}. \\
F_N(t) &= \frac{1}{N}\left(D_0(t) + D_1(t) + \cdots D_{N-1}(t)\right) \;=\frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin t/2}\right)^2 \\
&= 1 + 2(1-\tfrac{1}{N})\cos t + 2(1-\tfrac{2}{N})\cos 2t + \cdots + 2(1-\tfrac{N-1}{N})\cos(N-1)t \\
&= \sum\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^{+}\cdot e^{int}.
\end{aligned}$$

Für alle N gilt $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\ dt = 1,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\ dt = 1$. Die Fejér-Kerne sind positiv; und für ungerade Ordnung gilt

$$F_{2N+1}(t) = \frac{1}{2N+1}\left(\tfrac{\sin(2N+1)t/2}{\sin t/2}\right)^2 = \frac{1}{2N+1}\left(D_N(t)\right)^2.$$

Die Funktionswerte im Nullpunkt wachsen mit $N \to \infty$ über alle Grenzen nämlich $D_N(0) = 2N+1,\quad F_N(0) = N$.

Die Hilbertraumnorm des Nten Dirichlet-Kerns ist offensichtlich $\|D_N\| = \sqrt{2N+1}$.

Auch die Norm der Fejér-Kerne können wir explizit angeben, wenn wir die folgende Formel verwenden: $\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot + (N-1)^2 = \frac{1}{3}(N-1)(N-\frac{1}{2})N$.

$$\|F_N\|^2 = \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^2 = 1 + \frac{2}{N^2}\left((n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right) = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3N}.$$

Wenn t in einem Abstand $\delta > 0$ von den Punkten $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ bleibt, dann gilt

$$|F_N(t)| \le \frac{1}{N}\cdot\left(\sin(\delta/2)\right)^{-2}.$$

Interessant ist auch die 2π-periodische Funktion $s_N(t)$, die im Intervall $(0, 2\pi)$ eine Stammfunktion ist für die Funktion $\frac{1}{2}\left(D_N(t) - 1\right) = \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Nt$.

$$s_N(t) = \int_{-\pi}^{t}\left(\cos s + \cos 2s + \cdots + \cos Ns\right)\ ds = \sin t + \tfrac{1}{2}\sin 2t + \cdots + \tfrac{1}{N}\sin Nt.$$

Der punktweise Limes $s(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$ (für $0 < t < 2\pi$) ist eine unstetige Funktion, die an den Stellen $t = 2\pi\cdot k$, $(k \in \mathbb{Z})$ von $-\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{\pi}{2}$ springt(‘Euler’sche Sägezahn-Funktion’).

Exkurs in die Geschichte:
B. Riemann (1826 - 1866) hat darauf aufmerksam gemacht, dass man recht allgemeinen 2π-periodischen Funktionen f eine Folge trigonometrischer Polynome $\pi_N(f)$ zuordnen kann.

$$\pi_N: \quad f \longmapsto \sum_{-N}^{N} c_n \cdot e^{int} \qquad \text{mit} \quad c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins} \cdot f(s)\, ds.$$

Für jedes trigonometrische Polynom g vom Grad $\leq N$ gilt offenbar $\pi_N(g) = g$. Die Frage ist nun: Für welche weiteren 2π-periodischen Funktionen f sollte es sich lohnen, die Folge $\pi_N(f)$ zu studieren? Riemann meinte, der richtige Funktionenklasse sei die Menge der 'integrablen' Funktionen; und er entwickelte zu diesem Zweck eine Integrationstheorie.

Die Einschätzung von Riemann und die Riemann'sche Integrationstheorie sind heute überholt. Riemann verfügte 1854 weder über den Begriff der Vervollständigung (eines normierten Vektorraums) noch über eine adäquate Integrationstheorie. Diese Begriffsbildungen sind Errungenschaften aus den ersten Jahren des 20.Jahrhunderts. Sie haben nun in der Tat zu einer wirklich befriedigenden Theorie der Objekte geführt, die man heute die Fourier-Reihen nennt. Die Namengebung erinnert daran, dass J. Fourier (1768 - 1830) bereits im Jahre 1807 durch aufsehende Arbeiten den entscheidenden Anstoss für die Darstellung 'willkürlicher' Funktionen durch trigonometrische Reihen gab, (womit er übrigens auf den scharfen Widerspruch von Lagrange stiess.)

Die moderne Theorie löst sich ganz vom Gedanken, dass die darzustellenden Funktionen in irgendeinem Sinne stetig oder stückweise stetig sein sollten. Wir kommen darauf zurück, wenn wir die Hilbert-Räume quadratintegrabler Funktionen diskutieren.

Im Rahmen unserer Beschäftigung mit 'besonderen ' Funktionen wollen wir hier aber doch noch einige Spezialitäten ansprechen. Überlegungen zur 'Regularität' der betreffenden Funktionen lassen sich gut anschliessen an Ideen von P. L. Dirichlet (1805 - 1859), dem Vorgänger von Riemann auf dem Lehrstuhl von Gauss in Göttingen. Wir kehren zurück zu den oben definierten Projektionen. Die Abbildung π_N ist in der Tat die orthogonale Projektion von $\mathbb{T}$ auf den $(2N+1)$-dimensionalen Teilraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq N$; und diese Projektion π_N kann auf eine interessante Weise mit Hilfe des N-ten Dirichlet-Kerns beschrieben werden. Das Stichwort ist die Faltung über der kontinuierlichen Gruppe $\mathbb{R}/2\pi$.

Satz 1.4.1. *Für jedes trigonometrische Polynom* $f(t) = \sum c_k e^{ikt}$ *gilt*

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t-s)\cdot D_N(s)\, ds \;=\; \tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(s)\cdot D_N(t-s)\, ds \;=\; \sum_{-N}^{N} c_k \cdot e^{ikt}.$$

Den Beweis lassen wir als Übung. Man bemerke, dass es genügt, die Formel für die speziellen Funktionen $f_k(t) = e^{ikt}$ nachzuweisen.

Daran schliesst sich der folgende Satz an, den wir hier nur verbal formulieren wollen.

Satz 1.4.2. *Das arithmetische Mittel der ersten* N *Projektionsoperatoren* π_N *ist ein Regularisierungsoperator für die Lebesgue-integrablen Funktionen auf* $\mathbb{R}/2\pi$*. Es ist die Regularisierung zum* N*-ten Fejér-Kern.*

$$h \longrightarrow \tilde{h}_N = \tfrac{1}{N}\big(\pi_0 + \pi_1 + \cdot + \pi_{N-1}\big)h; \qquad \tilde{h}_N(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} h(t-s)\cdot F_N(s)\,ds \ = h \star F_N(t).$$

Wir werden darauf zurückkommen, wenn wir uns mit dem Begriff der Regularisierung befassen. Mit der Betrachtungsweise der Regularisierung sieht man sofort, dass für jede stetige 2π-periodische Funktion $h(t)$ die Folge der trigonometrischen Polynome $h \star F_N(t)$ gleichmäßig gegen $h(t)$ konvergiert.

Eine merkwürdige Formel

Die Dirichlet-Kerne geben uns eine Gelegenheit, auf eine merkwürdige Formel aus der klassischen Differential- und Integralrechnung hinzuweisen, die fast ebenso berühmt ist wie die magische Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$. Es geht um die Formel

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \tfrac{1}{x}\sin x\ dx = \tfrac{\pi}{2}.$$

Der berühmte Cambridge-Professor G. H. Hardy (1877 - 1947) hat darüber im Jahr 1909 einen fünfseitigen Artikel publiziert, in welchem er den didaktischen Wert der damals geschätzten Zugänge beurteilt. Und auch heute liefert dieses 'uneigentliche' Integral einen interessanten Bezugspunkt, wenn man sich Gedanken machen will, welche Ziele wohl die älteren und die neueren Lehrbücher verfolgen, wenn sie diese Kostbarkeit der Differential- und Integralrechnung des 19. Jahrhunderts präsentieren. Siehe:
H. Fischer: 'Die Geschichte des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$' Math.Sem.ber. (2007) 54: 13 - 30.

Hier ist ein kurzer Beweis, dessen Wert darin liegen könnte, dass er nochmals ein Licht auf die Dirichlet-Kerne wirft:

$$1 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{-N}^{N} e^{ins}\Big)\,ds \ = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}\ dx,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{\sin x}\big)\sin(2N+1)x\ dx \ = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q'(x)\cdot\cos(2N+1)x\ dx$$

mit $Q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ (durch partielle Integration). Da $Q(x)$ und die Ableitung $Q'(x)$ im Integrationsintervall stetig differenzierbare Funktionen sind, konvergiert das Integral nach 0 für $N \to \infty$. Also gilt für $T = 2N+1 \to \infty$

$$1 = \tfrac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\,ds \ = \ \lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin(Tx)}{x}\ dx = \lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{\pi}\int_{-T\pi/2}^{T\pi/2}\frac{\sin t}{t}\ dt.$$

Der Schluss zeigt auch, dass bei Integration über $(0,t)$ mit $t < 2\pi$ die Integrale im Limes denselben Wert ergeben. Und dies ergibt für $t \in (0, 2\pi)$ die Summenformel für die Sägezahnfunktion

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty} \int_0^t \tfrac{1}{2} D_N(s)\, ds \;= \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{t}{2} + \sin t + \tfrac{1}{2} \sin 2t + \cdots + \tfrac{1}{N} \sin Nt \Big)$$

Wir merken an, dass die Idee des 'uneigentlichen' Integrals (d. h. des 'Integrals' einer Funktion, deren Absolutbetrag nicht integrabel ist) nicht in die moderne Integrationstheorie passt; wir haben es mit Limiten von Integralen zu tun. Wir möchten ein Fragezeichen anbringen, wenn manche Lehrbücher kurzerhand schreiben $\sum_1^\infty \frac{1}{n} \cdot \sin\ nt = \frac{1}{2}(\pi - t)$ für $t \in (0, 2\pi)$. Wir diskutieren das Fragezeichen, wenn wir uns später mit 'unbedingt summablen' Reihen befassen.

1.5 Formale Potenzreihen

Aus algebraischer Sicht bestehen deutliche Ähnlichkeiten zwischen dem Kalkül der formalen Potenzreihen und den Strukturen, die wir in den beiden letzten Abschnitten vorgestellt haben. Die Geschichte und die Ausstrahlung auf andere Gebiete der Mathematik ist aber deutlich verschieden.

Die Idee geht auf die Zeit von Brook Taylor (1685 - 1731) zurück. Taylor löste Differentialgleichungen mit der Methode des Koeffizientenvergleichs. Taylor stellte keine Konvergenzbetrachtungen an; es war Colin Maclaurin (1698 - 1746), ein Schüler von Newton, der damit den Anfang machte. Die genauere Bedeutung der Taylor'schen Reihe wurde erst erkannt, als L. Euler sie in seiner Differentialrechnung (1755) anwendete. Lagrange fügte das Restglied hinzu und verwendete sie in seinem Ansatz zu einer allgemeinen Theorie der Funktionen.

Die Theorie der formalen Potenzreihen (und die Idee des Koeffizientenvergleichs) hat in der heutigen Mathematik durchaus eigenständige Bedeutung; im Rahmen einer Einführung in die Analysis wird sie aber vor allem wegen der Überschneidungen mit der Theorie der konvergenten Potenzreihen geschätzt. Sie liefert insbesondere schöne Beispiele, wie wir sehen werden.

Definition 1.5.
Eine formale Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten ist eine formale unendliche Summe der Form

$$A(z) = \sum_0^\infty a_n \cdot z^n, \quad \text{oder} \quad A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \ .$$

Das Symbol z heisst die Unbestimmte; in der Theorie der formalen Potenzreihen ist nicht vorgesehen, dass man für die Unbestimmte z irgendwelche 'Werte' einsetzt.

Formale Potenzreihen werden linear kombiniert, indem man die Koeffizientenfolgen linear kombiniert. Man hat damit einen unendlichdimensionalen komplexen Vektorraum. Formale Potenzreihen werden multipliziert, indem man die Koeffizientenfolgen faltet.
('Cauchy-Produkt'). Wir wissen bereits, dass die Faltung assoziativ ist. Sie ist offenbar auch distributiv und kommutativ. Man muss sich nicht daran stören, dass man unendlich viele Koeffizienten hat; für die Berechnung des n-ten Koeffizienten im Faltungsprodukt spielen nur die ersten n Koeffizienten der Faktoren eine Rolle. Das neutrale Element der Multiplikation hat in der nullten Position eine 1 und sonst lauter Nullen. Wir haben einen kommutativen Ring mit Einselement. (Im Hinblick auf die Multiplikation mit den Skalaren $a \in \mathbb{C}$ spricht man auch von einer assoziativen kommutativen $\mathbb{C}$-Algebra.)

$$\big(\mathbb{FP}\ , 0, 1, +, \cdot, \mathbb{C}\big).$$

Die Menge der Polynome kann man als eine Teilalgebra ansehen; die soll uns hier aber nicht interessieren. Wir interessieren uns hier zunächst einmal für die Menge $\mathbb{FP}_1$ derjenigen formalen Potenzreihen, die in der nullten Position ('Startposition') den Eintrag 1 haben.

Das Produkt solcher Elemente hat wieder diese Eigenschaft, und zu jedem solchen Element A gibt es eine multiplikative Inverse in $\mathbb{FP}_1$. Man nennt sie die Reziproke von A und bezeichnet sie mit $\frac{1}{A}$ oder mit A^{-1}. Kurzum

Satz 1.5.1. *Die Menge $\mathbb{FP}_1$ der formalen Potenzreihen mit Startkoeffizienten 1 ist (mit der Faltung der Koeffizientenfolgen) eine multiplikative Gruppe.*

Beweis. *Der Beweis ist eine erste Anwendung der Methode des Koeffizientenvergleichs: Gegeben ist* $A = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$. *Gesucht sind Koeffizienten b_k sodass*

$$\big(1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots\big)\cdot\big(1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4+\cdots\big) = 1+0z+0z^2+0z^3+\cdots .$$

Die b_k werden rekursiv bestimmt: $0 = c_1 = 1\cdot b_1 + a_1\cdot b_1$; $0 = 1\cdot b_2 + a_1\cdot b_1 + a_2\cdot 1$; $0 = b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3$; $0 = b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4; \ldots\ldots$
Die b_k sind offenbar eindeutig bestimmt.

Ein Beispiel liefert die (formale!) geometrische Reihe $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots$.

Die Methode des Koeffizientenvergleichs liefert auch die Quadratwurzel von $A \in \mathbb{FP}_1$. Man bezeichnet sie mit $A^{\frac{1}{2}}$. Gesucht sind hier $b_1, b_2, b_3, \ldots$, sodass

$$\big(1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots\big)\cdot\big(1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots\big) = 1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots .$$

$1\cdot b_1 + b_1\cdot 1 = a_1$; $1\cdot b_2 + b_1\cdot b_1 + b_2\cdot 1 = a_2$; $b_3 + b_1 b_2 + b_2 b_1 + b_3 = a_3$; ...
Die Koeffizienten sind offenbar eindeutig bestimmt. Ein Beispiel ist

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{8}z^2 + \tfrac{1}{16}z^3 - \tfrac{5}{64}z^4 + \cdots$$

Eine übersichtliche Formel für die Koeffizientenfolge in diesem speziellen Beispiel liefert Newton's Binomialreihe, wie wir unten zeigen werden. Diese hochberühmte Reihe soll hier einfach einmal ohne alle Begründungen oder Interpretationen angegeben werden:

Newton's Binomialreihe Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ setzt man

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-k+1)$$

$$B_\alpha(z) = 1 + \alpha\cdot z + \binom{\alpha}{2}z^2 + \binom{\alpha}{3}z^3 + \ldots = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Statt $B_\alpha(z)$ notiert man auch $(1+z)^\alpha$. Für ganzzahlige α sollte die Reihe vertraut sein; denn für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe nach dem $(n+1)$-ten Term ab, und wir erhalten die binomischen Formeln. Für $\alpha = -1$ ergibt sich die geometrische Reihe, denn $\binom{-1}{k} = \frac{1}{k!}(-1)(-2)(-3)\cdots(-k) = (-1)^k$. Wir bemerken $(1+z)\cdot B_\alpha(z) = B_{\alpha+1}(z)$. In der Tat gilt

$$(1+z)\cdot B_\alpha(z) = (1+z)\cdot\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}z^k = 1 + \sum_{k>0}\left(\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}\right)z^k = \sum\binom{\alpha+1}{k}z^k,$$

wegen $k!\cdot\left(\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k-1}\right) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) + k\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+2) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+2)[\alpha-k+1+k] = (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+2)$.

Ableitung einer formalen Potenzeihe Eine Ableitung (auch ' Derivation') im Sinne der Algebra ist eine lineare Abbildung eines Rings in sich, welche die Produktregel erfüllt.

Satz 1.5.2 (Ableitung, Produktregel)**.**
Formale Potenzreihen kann man 'ableiten'.

$$D : A(z) \longmapsto A'(z)\ . \qquad \sum_0^\infty a_n z^n \longmapsto \sum_1^\infty a_n n z^{n-1}\ ;$$
$$D(A \cdot B) = (DA) \cdot B + A \cdot (DB)\ ; \qquad (AB)' = A'B + AB'\ .$$

Bemerke: Die hier ausgezeichnete Derivation in $\mathbb{FP}$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass sie $z = 0\cdot z^0 + 1\cdot z + 0\cdot z^2 + \cdots$ in $1 = 1\cdot z^0 + 0\cdot z + 0\cdot z^2 + \cdots$ abbildet. Die Produktregel führt zunächst zu $D(z^n) = n \cdot z^{n-1}$, und dann auch zu der (von den Polynomen her vertrauten) angegebenen Derivationsregel wegen der elementaren Produktregel

$$D\big(z^k \cdot z^l\big) \ = \ k \cdot z^{k-1} \cdot z^l + l \cdot z^k \cdot z^{l-1} \ = \ (k+l) z^{k+l-1}.$$

Im Sinne von Brook Taylor lösen wir einige 'Differentialgleichungen' in $\mathbb{FP}$:

1. Es gibt genau eine formale Potenzreihe $E(z)$ in $\mathbb{FP}_1$, welche die 'Differentialgleichung' $E'(z) = E(z)$ löst; und das ist die Exponentialreihe.
   In der Tat führt der Koeffizientenvergleich in
   $1 + a_1\cdot z + a_2\cdot z^2 + a_3\cdot z^3 + \cdots \ = \ a_1 + 2a_2\cdot z + 3a_3\cdot z^2 + \cdots$ zu $a_1 = 1, 2a_2 = a_1, 3a_3 = a_2$,
   allgemein $(k+1)a_{k+1} = a_k$, also $a_k = \frac{1}{k!}$. und schliesslich $E(z) = \sum \frac{1}{k!} \cdot z^k$.

2. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Binomialreihe die einzige Lösung der 'Differentialgleichung'

   $$B'_\alpha(z) = \frac{\alpha}{1+z} \cdot B_\alpha(z), \quad B_\alpha(0) = 1.$$

   Der Startkoeffizient $B_\alpha(0)$ ist in der Binomialreihe die 1. Weiter gilt

   $$k \cdot \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k-1)!} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = \alpha \binom{\alpha-1}{k-1},$$
   $$D\Big(\sum \binom{\alpha}{k} \cdot z^k\Big) = \alpha \cdot \sum \binom{\alpha-1}{k-1} \cdot z^{k-1} = \alpha B_{\alpha-1}(z) = \frac{\alpha}{1+z} \cdot B_\alpha(z)$$

3. In $\mathbb{FP}$ ist die Lösungsmenge der 'Differentialgleichung' $A''(z) = -A(z)$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Eine Basis sind die Cosinus- und die Sinusreihe

   $$C(z) = 1 - \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{4!}z^4 - \tfrac{1}{6!}z^6 + \cdots \qquad = \qquad \frac{1}{2}\left(E(iz) + E(-iz)\right)\ ;$$
   $$S(z) = z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{5!}z^5 - \tfrac{1}{7!}z^7 + \cdots \qquad = \qquad \frac{1}{2i}\left(E(iz) - E(-iz)\right)$$

   Das Nachrechnen ist trivial.

Notation: Wenn $A(z) = a_0 \cdot z^+ a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \cdots = \sum_k a_k \cdot z^k$, dann schreiben wir $A(0) = a_0$, $A'(0) = a_1$, $\frac{1}{2}A''(0) = a_2, \ldots \quad \frac{1}{k!}A^{(k)}(0) = a_k = \frac{1}{k!}\big(D^k A\big)(0)$, also

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{(k)}(0) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \big(D^k A\big)(0) \cdot z^k.$$

Das Einsetzen in formale Potenzreihen

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass in der Theorie der formalen Potenzreihen nicht vorgesehen ist, dass man an der Stelle der Unbestimmten 'Werte' einsetzt, um einen 'Wert' der Reihe zu ermitteln. Man kann aber formale Potenzreihen einsetzen, um wieder eine formale Potenzreihe zu konstruieren. Allerdings kann man nur solche Potenzreihen einsetzen, deren führender Koeffizient verschwindet.

Wenn $F(0) = 0$, wenn also der führende Koeffizient von F verschwindet, dann verschwinden die beiden ersten Koeffizienten von F^2, die drei ersten Koeffizienten von F^3, usw. Für jede formale Potenzreihe A erhalten wir eine formale Potenzreihe $B = A \circ F$,

$$B(z) = A(F(z)) = a_0 + a_1 F(z) + a_2 F^2(z) + a_3 F^3(z) + \cdots .$$

Satz 1.5.3 (Kettenregel und Inversion)**.**
Wenn F und G einsetzbare formale Potenzreihen sind, $F(0) = 0$; $G(0) = 0$, dann ist $H(z) = G(F(z))$ einsetzbar, und es gilt die Kettenregel $H'(z) = G'(F(z)) \cdot F'(z)$.
Das Einsetzen ist assoziativ; d. h. es gilt für alle A

$$A(H(z)) = A\big(G(F(z)\big) = B(F(z)) \quad \text{mit} \quad B(z) = A(G(z)).$$

Jedes einsetzbare $F(z)$ mit $F'(0) \neq 0$ besitzt eine 'Umkehrung' $G(z)$

$$F(G(z)) = z = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + \cdots = G(F(z)).$$

Beweis. *Es handelt sich um Identitäten für die Koeffizientenfolgen. Der* n*-te Koeffizient einer durch Multiplikation oder Einsetzen konstruierten formalen Potenzreihe ergibt sich allein aus den ersten* n *Koeffizienten der beteiligten formalen Potenzreihen. Es genügt daher die Identitäten für Polynome zu beweisen. Für Polynome ist die Assoziativität des Einsetzens und die Kettenregel wohlbekannt.*

Wir müssen also nur noch die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der 'Einsetzungs-Inversen' beweisen. Dies geschieht wieder mit einer rekursiven Bestimmung der Koeffizienten. Zunächst stellen wir fest, dass es genau eine 'Einsetzungs-Identität' gibt, nämlich $A(z) = z$*. Genauer: Wenn für ein* A *und irgend ein einsetzbares* $F(z)$ *gilt* $A \circ F(z) = F(z)$ *oder* $F \circ A(z) = F(z)$*, dann gilt* $A(z) = z$*.*

Das Einsetzen von $F(z) = c \cdot z$, $c \neq 0$ *nennen wir die Drehstreckung des Arguments zum Skalar* c*; die Einsetzungs-Inverse ist die Drehstreckung des Arguments zum Skalar* $\frac{1}{c}$*. Das Einsetzen eines* $F(z)$ *mit* $F'(0) = 1$ *nennen wir ein normiertes Einsetzen. Es genügt offenbar die Existenz einer Einsetzungs-Inversen* $G(z)$ *für normierte* $F(z)$ *zu zeigen.*

Wenn wir eine linksseitige Einsetzungs-Inverse gefunden haben, dann ist diese auch eine rechtsseitige Einsetzungs-Inverse; denn wie in der elementaren Gruppentheorie können wir schliessen $G \circ F(z) = z \Longrightarrow F \circ G \circ F(z) = F(z) \Longrightarrow$ *Für* $A = F \circ G$ *gilt* $A(F(z)) = F(z) \quad \Longrightarrow \quad A(z)$ *ist die Einsetzung-Identität, d. h.* $F \circ G(z) = z$

Gegeben sei $F(z) = z \cdot B(z) = z \cdot (1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots)$*;*
Gesucht sind Koeffizienten $g_2, g_3, g_4, \ldots$*, sodass*

$$\begin{aligned} z = G(F(z)) &= z \cdot B(z) + g_2 z^2 \cdot B^2(z) + g_3 z^3 \cdot B^3(z) + \\ &= z \cdot (1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots) \\ &+ g_2 z^2 (1 + 2b_1 z + (b_1^2 + 2b_2) z^2 + \cdots) \\ &+ g_3 z^3 (1 + 3b_1 z + \cdots) \quad + \quad g_4 z^4 (1 + \cdots) \qquad + \cdots \end{aligned}$$

Somit $\quad b_1 + g_2 = 0, \quad b_2 + g_2(2b_1) + g_3 = 0, \quad b_3 + g_2(b_1^2 + 2b_2) + g_3(3b_1) + g_4 = 0, \ldots .$

Beispiel 1.5.1 (Die Logarithmus-Reihe).
$F(z) = E(z) - 1 = z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \cdots$ liefert $G(z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \pm \cdots$

Die Koeffizientenfolge $g_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ergibt sich in der Tat leicht aus der Identität $G'(z) = \frac{1}{1+z}$, die wir mit der Kettenregel gewinnen:

$$F'(z) = 1 + F(z), \quad z = F(G(z)), \quad F'(G(z)) \cdot G'(z) = \big(1 + F(G(z)\big) \cdot G'(z) = (1 + z) \cdot G'(z).$$

Die Reihe $G(z)$ erinnert an die in der Differentialrechnung bekannte Reihe für $\ln(1 + z)$, ebenso wie $E(z)$ die Reihe für die Exponentialfunktion. Unsere Konstriktion der Einsetzungsinversen entspricht daher der Beziehung $z = \exp(\ln(1 + z)) - 1$.

Beispiel 1.5.2 (Die Funktionalgleichung für die Exponentialreihe).
Wir studieren die Drehstreckung des Arguments in der Exponentialreihe

$$E(\alpha \cdot z) \cdot E(\beta \cdot z) = E((\alpha + \beta) \cdot z).$$

Den Beweis durch Koeffizientenvergleich haben wir oben schon geführt; wir stützten uns da auf die klassischen binomischen Formeln. Jetzt können wir auch noch andere Mittel heranziehen. Die Rechnung von oben zeigt, dass $f(z) = E(\alpha \cdot z)$ die einzige formale Reihe ist mit $f'(z) = \alpha \cdot f(z), \qquad f(0) = 1$. Andererseits liefert die Produktregel für $g(z) = E(\alpha \cdot z) \cdot E(\beta \cdot z)\big)$ die Identität

$$D(g(z)) = \alpha \cdot E(\alpha \cdot z) \cdot E(\beta \cdot z) + \beta \cdot E(\alpha \cdot z) \cdot E(\beta \cdot z) = (\alpha + \beta) \cdot g(z).$$

$g(z)$ ist also die Reihe $E((\alpha + \beta) \cdot z)$.

Beispiel 1.5.3 (Die allgemeinen Potenzen und die Binomialreihen.).
Es gibt mehrere suggestive Weisen, die Binomialreihen zu notieren

$$B_\alpha(z) = \big(1+z\big)^\alpha = e^{\alpha\cdot\ln(1+z)}.$$

Es gilt $B_\alpha(z)\cdot B_\beta(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$ Für nichtganze α, β kann man diese Funktionalgleichung nicht sofort mit den explizit gegebenen Koeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ begründen. Man müsste erst die Formeln $\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot\binom{\beta}{n-k}$ nachrechnen. Es stehen uns aber bessere Mittel zur Verfügung, nachdem wir die B_α durch ihre 'Differentialgleichungen' gekennzeichnet haben. $D\big(B_\alpha(z)\big) = \frac{\alpha}{1+z}B_\alpha(z)$. Die Produktregel auf $g(z) = B_\alpha(z)\cdot B_\beta(z)$ angewandt, liefert $g'(z) = \frac{\alpha+\beta}{1+z}\cdot g(z)$, und damit $g(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$.

Aus der Charakterisierung von $B_\alpha(z)$ durch ihre Differentialgleichung gewinnen mit Hilfe der Kettenregel sehr einfach die Darstellung $B_\alpha(z) = e^{\alpha\cdot\ln(1+z)}$.

Schlussbemerkung: Wir sprachen hier immer wieder von 'Differentialgleichungen'. Die Anführungszeichen sollten ausdrücken, dass es dabei nicht um Differentialgleichungen im modernen Sinn geht. Die Vorstellungen, was eine Differentialgleichung ist und was man an ihr studieren sollte, mussten über die Jahrhunderte mehrfach umgebaut werden. Die aktuelle Sicht kann der Leser aus den wunderbaren (elementaren und fortgeschrittenen) Büchern von V. I. Arnold (geb. 1937) erfahren. Diese Bücher sind zudem eine hervorragende Quelle für Auskünfte über die historische Entwicklung.

I. Newton (1643 - 1727) war der erste, der Differentialgleichungen löste; er war überzeugt, dass die Gesetze der Natur in Differentialgleichungen zum Ausdruck kommen. Newton arbeitete mit Potenzreihen. Dabei war der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer Reihe und den Ableitungen für ihn eher ein Mittel, Ableitungen zu berechnen als ein Mittel, Reihen zu konstruieren.

Die Potenzreihen im Sinne Newtons spielten bis ins 19. Jahrhundert eine zentrale Rolle in der sog. kombinatorischen Analysis. Sie gerieten dann aber ins Abseits im Zuge des Neuaufbaus der Differential- und Integralrechnung. N.H. Abel (1802- 1827) hatte in einer vielbeachteten Arbeit geklärt, warum Unsinn herauskommt, wenn man in die Binomialreihe (für α nicht ganz) für die Unbestimmte z gewisse Zahlen vom Betrag 1 einsetzt. Die Schwächen und die Fallgruben des formalen Umgangs mit Reihen, welcher Konvergenzbetrachtungen ausblendet und am Ende doch 'Werte' einsetzt, führten dazu, dass die alten von Newton und Taylor so sehr geschätzten Methoden des Koeffizientvergleichs in den heutigen Lehrbüchern (zum Ärger von Physikern und anderen Anwendern) in der Regel als heuristische Verfahren ohne mathematische Beweiskraft abgetan werden.

2 Besondere Funktionen

Die Funktionen, die man in der Differential- und Integralrechnungen behandelt, sind einerseits als Verallgemeinerungen der elementaren Funktionen zu verstehen. Zu den elementaren Funktionen zählt man traditionsgemäß die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion. die trigonometrischen Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen, und manchmal auch die Gamma-Funktion.

Für den (im Sinne der Infinitesimalrechnung) allgemeinen Funktionsbegriff benötigt man ein gründliches Verständnis für das Kontinuum, insbesondere für die topologische Struktur der reellen Achse. So weit sind wir nun in unserer (parallel zur Beschäftigung mit konkreten Rechengrößen) angestrengten mengentheoretischen Grundlegung noch nicht gekommen. Wir werden uns daher erst einmal nur mit konkreten Funktionen auseinandersetzen, weil da bekanntlich die Schwierigkeiten mit den Grundlagen ohne Gefahr zu überspielen sind.

Andererseits versteht man die Funktionen der Differential- und Integralrechnung als Elemente konkreter vollständiger Funktionenräume. In erster Linie sind da zu nennen:

- Der Raum $\mathcal{C}[0,1]$ aller auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ stetigen Funktionen,
- der Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}/2\pi)$ aller quadratintegrierbaren 2π-periodischen Funktionen, sowie
- der Raum $\big(\mathcal{H},\{|z|<1\}\big)$ der im Einheitskreis holomorphen Funktionen,
- der Raum $\mathcal{C}^k(\mathfrak{M})$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$.

Wir wollen wieder parallel zur Beschäftigung mit konkreten Funktionen den Begriff des vollständigen metrischen Raums soweit entwickeln, wie es für den Umgang mit Räumen dieser Art nötig erscheint.

Die beiden Stränge der Beschäftigung mit Funktionen sollen erst später zusammengeführt werden; im Augenblick wollen wir allenfalls kleine, unproblematische Anleihen bei den Aussagen über Grundlagen machen.

2.1 Die Logarithmusfunktionen und die Exponentialfunktionen

Neben dem systematischen Gebrauch der Dezimalzahlen war der größte rechnerische Fortschritt im 16. Jahrhunderts die Erfindung der Logarithmen. Mehrere Mathematiker dieser Zeit hatten mit der Möglichkeitkeit gespielt, arithmetische und geometrische Reihen zu verknüpfen, hauptsächlich zu dem Zweck, das Arbeiten mit den komplizierten trigonometrischen Tafeln zu erleichtern. Die Multiplikation konnte mit Hilfe der Logarithmen auf die Addition zurückgeführt werden. Als im Jahre 1627 eine vollständige Logarithmentafel vorlag, wurde das sofort von Mathematikern und Astronomen (allen voran Kepler) begrüsst.

Es gibt verschiedene bemerkenswerte Zugänge zu den Logarithmusfunktionen auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Wir beginnen mit einem geometrischen, der manchem Anfänger bereits von der Schule her bekannt sein könnte.

Satz 2.1.1 (Der Logarithmus als Stammfunktion).
Der natürliche Logarithmus $\ln(\cdot)$ *auf* $(0, \infty)$ *kann charakterisiert werden als das unbestimmte Integral der Funktion* $\frac{1}{x}$ *mit* $\ln(1) = 0$.

Beweis. *Der Funktionsgraph der Funktion* $\frac{1}{x}$ *im positiven Quadranten* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *ist ein Hyperbelast, der in sich übergeht, wenn man die eine Achse um den Faktor* c *streckt (oder 'staucht') und gleichzeitig die andere Achse um den Faktor* $\frac{1}{c}$.

$$\{(y, x) : \; y = \frac{1}{x}, x > 0\} = \{(y, x) : \; y \cdot x = 1, x > 0\} = \{(\tfrac{1}{c}y, cx) : \; y \cdot x = 1, x > 0\}.$$

Die 'Fläche unter der Kurve' über dem Abszissenabschnitt $[a, b]$, $a < b$ *bezeichnen wir* $L([a, b]) = \int_a^b \frac{1}{x} \, dx$. *Da die Streckung flächenerhaltend ist, gilt*

$$L([ca, cb]) = L([a, b]) = L([1, \frac{a}{b}]), \quad \textit{kurz notiert} \quad = \ln(\frac{b}{a}).$$

Für $0 < x \leq 1$ *setzen wir* $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$. *Wegen der Additivität der Flächeninhalte haben wir für* $a < b < c \quad L([a, b]) + L([b, c]) = L([a, c])$, *also* $\ln(\frac{a}{b}) + \ln(\frac{b}{a}) = \ln(\frac{a}{c})$. *Man überlegt sich leicht, dass die Gleichung auch dann gilt, wenn* b *nicht zwischen* a *und* c *liegt. Wir haben somit bewiesen, dass die Funktion* $\ln(\cdot)$ *die sog. Funktionalgleichung des Logarithmus erfüllt*

$$\ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2), \quad \textit{für alle} \quad x_1, x_2 > 0.$$

Wir bemerken weiter, dass $\ln(\cdot)$ *monton steigend ist, und dass gilt*

$$\ln\big((1 + \frac{1}{n})^n\big) = n \cdot \ln\big((1 + \frac{1}{n})\big) = n \cdot \int_1^{1+1/n} \frac{1}{x} \, dx, \quad \textit{und im Limes } n \to \infty \quad \ln(e) = 1.$$

Sprechweise 2.1.1 (Logarithmus zur Basis a).
Wenn eine monotone Funktion $l(\cdot)$ die Funktionalgleichung des Logarithmus erfüllt, dann heisst sie eine Logarithmusfunktion. Mit $l(\cdot)$ erfüllt auch jedes Vielfache eine Logarithmusfunktion. In jedem Falle gilt $l(1) = 0$. Die Funktion $\frac{1}{\ln a} \cdot \ln(\cdot)$ ist eine Logarithmusfunktion mit $l(a) = 1$; und sie ist die einzige monotone Funktion mit dieser Eigenschaft. Sie heisst der Logarithmus zur Basis und wird mit $\log_a(\cdot)$ bezeichnet.

Die Exponentialfunktionen und die Logarithmen zur Basis a.
Wenn man von einer Exponentialfunktion spricht, dann meint man heutzutage fast immer die Funktion e^x, das ist die Exponentialfunktion zur Basis e. Wir wollen hier aber auch einen kurzen Blick werfen auf die Funktion $x \mapsto a^x$ für ein beliebiges $a > 0$. Man nennt diese Funktion die Exponentialfunktion zur Basis a. Es ist klar, dass a^{-1} die zu a reziproke Zahl bezeichnet. a^m ist also für alle ganzzahligen m definiert. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $a^{1/n}$ die eindeutig bestimmte n-te Wurzel, also diejenige Zahl, deren n-te Potenz a ist. Ihre m-te Potenz ist die n-te Wurzel der Zahl a^m und wird mit $a^{m/n}$ bezeichnet. So ist a^r für alle rationalen r (auch die negativen!) definiert; und man hat $a^s \cdot a^r = a^{s+r}$.. Die Funktion ist monoton, und zwar monoton wachsend ('isoton'), wenn $a > 1$, und monoton fallend ('antiton') wenn $a < 1$. Sie besitzt genau eine monotone Fortsetzung auf die gesamte reelle Achse $\mathbb{R}$, und sie ist da eine surjektive Abbildung auf $\mathbb{R}^+$. Ihre Umkehrabbildung ist der Logarithmus zur Basis a.

Wenn man den natürlichen Logarithmus bereits konstruiert hat, dann kann man für rationale r feststellen: $\ln\ a^r = r \cdot \ln\ a$, $\quad a^r = e^{r \cdot \ln\ a}$, und man kann diese Formel zur Definition von a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ benützen. Die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ ist dann also die Abbildung $x \mapsto e^{r \cdot \ln\ a}$. Die Umkehrung ist der Logarithmus zur Basis a: $\log_a(\cdot) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(\cdot)$. Mit dieser Definition ist dann klar: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Neben dem natürlichen Logarithmus $\ln(\cdot)$ ist auch der dekadische (Briggs'sche') Logarithmus $\log_{10}$ und der dyadische Logarithmus $\log_2(\cdot)$ weithin im Gebrauch.

Es gilt beispielsweise: $\log_2 64 = 6$, $\quad \log_2 256 = 8$, $\quad \log_2 1024 = 10$.
Die Anzahl der $\{0,\ 1\}$-Folgen der Länge 10 ist $2^{10} = 1024$.

Didaktischer Hinweis: Hier haben wir gesehen, dass die von uns konstruierte Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ist. Die Tatsache kann man auch als Zugang wählen, wenn man die Exponentialfunktion schon eingeführt hat. Die Exponentialfunktion mit ihrer Funktionalgleichung $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ist offensichtlich streng wachsend auf $\mathbb{R}$, und nimmt alle Werte in $\mathbb{R}^+ = (0,\ \infty)$ an. Es existiert daher eine Umkehrfunktion $\ln(\cdot)$ auf $\mathbb{R}^+$. Und aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion wird die Funktionalgleichung für die Logarithmusfunktion. Die Multiplikation auf RR^+ wird transformiert in die Addition auf $\mathbb{R}$.

Wenn die Kettenregel in der Schule entsprechend behandelt wurde, dann berechnet man leicht die Ableitung der Umkehrfunktion $\ln(\cdot)$: $\frac{d}{dx} \ln\ x = \frac{1}{x}$, denn

$$e^{\ln x} = x \Longrightarrow e^{\ln x} \cdot (\ln\ x)' = 1.$$

Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus im Komplexen. Die Exponentialfunktion $\exp(\cdot) : \mathbb{C} \ni z \Longrightarrow e^z$ hat die Periode $2\pi i$. Es gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$, und damit natürlich auch $\exp(z + 2k\pi i) = \exp(z)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Der 'Streifen' $\{z : -\pi < \Im z \leq \pi\}$ wird bijektiv auf die 'punktierte Zahlenebene' $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Wenn nämlich $w = e^{a+ib} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$, dann ist $w \neq 0$; und für jedes andere w gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $e^a = |w|$, nämlich $a = \ln |w|$ und im halboffenen Intervall $(-\pi,\ \pi]$ genau ein b, sodass $\exp(a + ib) = w$.

Manchmal wir b das Argument der komplexen Zahl $w \neq 0$ genannt.

Sprechweise 2.1.2. Die Zuordnung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni w \Longrightarrow a + ib \in \mathbb{R} \times (-\pi, \leq \pi]$ heisst der Hauptwert der Logarithumsfunktion im Komplexen.

2.2 Die allgemeinen Potenzen und ihre Integrale.

Wir haben den natürlichen Logarithmus auf $(0.\infty)$ als das unbestimmte Integral der Funktion x^{-1} konstruiert: $\ln x = \int_1^x u^{-1}\,du$. Wir diskutieren nun auch die allgemeinen Potenzen $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ als Funktionen auf $\mathbb{R}^+$. (Bemerke $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$). Es geht uns um die Fläche unter diesen speziellen 'Kurven'. Über den allgemeinen Begriff der 'Fläche unter der Kurve' werden wir in der Integrationstheorie ausführlich zu sprechen haben. Hier brauchen wir zunächst nur eine Tatsache, die von der Schule her bekannt sein sollte.

Für $\alpha \neq -1$ gilt

$$\int_{x_1}^{x_2} u^\alpha\,du = \left[\tfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}\right]_{x_1}^{x_2} = \tfrac{1}{\alpha+1}x_2^{\alpha+1} - \tfrac{1}{\alpha+1}x_1^{\alpha+1}.$$

Aus unserem Studium der Logarithmusfunktion wissen wir: $\int_1^\infty u^{-1}\,du = \infty = \int_0^1 u^{-1}\,du$. Der Exponent $\alpha = -1$ ist gewissermaßen ein Einschnitt, was die Fläche unter der Kurve betrifft. Es gilt nämlich für alle $\varepsilon > 0$

$$\int_1^\infty u^{-1+\varepsilon}\,du = \infty, \qquad \int_0^1 u^{-1+\varepsilon}\,du = \tfrac{1}{\varepsilon},$$
$$\int_1^\infty u^{-1-\varepsilon}\,du = \tfrac{1}{\varepsilon}, \qquad \int_0^1 u^{-1-\varepsilon}\,du = \infty,$$

Die Funktion $\frac{1}{x}$ fällt so langsam gegen 0 für $x \to \infty$, dass die Fläche unter der Kurve ∞ ist; die Funktion $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon}$ dagegen fällt schnell genug, um eine endliche Fläche zu erzeugen.

Es gibt Funktionen $f(x)$, die schneller abfallen als $\frac{1}{x}$, und doch eine unendliche Fläche produzieren. Wir sind aber hart an der Grenze, wie die folgenden Beispiele zeigen

$$\int_e^x \frac{1}{u \cdot \ln u}\,du = \ln\bigl(\ln x\bigr) \to \infty, \qquad \int_e^x \frac{1}{u \cdot (\ln u)^{1+\varepsilon}}\,du = \frac{1}{\varepsilon}\Bigl[1 - \frac{1}{(\ln x)^\varepsilon}\Bigr].$$

Die allgemeinen Potenzen und der Logarithmus werden gern als Vergleichsfunktionen herangezogen, wenn man die Geschwindigkeit (oder 'Rate') beurteilen will, mit welcher eine nichtnegative Funktion $f(\cdot)$ abfällt oder auch anwächst. Es kommen aber natürlich auch andere gutbekannte positive Vergleichsfunktionen $h(\cdot)$ in Betracht.

Definition 2.1 (Landau' s 'oh' und 'Oh').
Es seien $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ und $h(\cdot) > 0$ Funtionen auf einem Abschnitt (a, ∞). Man notiert

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \quad \text{für} \quad x \to \infty, \qquad \text{falls} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x) - g(x)|}{h(x)} = 0$$
$$f(x) = g(x) + O(h(x)) \quad \text{für} \quad x \to \infty, \qquad \text{falls} \quad \frac{|f(x) - g(x)|}{h(x)} \leq C < \infty.$$

Man sagt in diesen Fällen, die Differenz von f und g sei ein 'klein oh' von h bzw. ein 'Groß Oh' von h.

Im Spezialfall $h(\cdot) = 1$ liest man: die Differenz $|f - g|$ strebt nach 0 für $x \to \infty$, bzw. die Differenz $|f - g|$ bleibt beschränkt für $x \to \infty$. Wenn h eine Funktion ist, die (typischerweise monoton) nach Unendlich anwächst für $x \to \infty$, dann liest man: $|f - g|$ wächst von kleinerer Ordnung als h; bzw. die Differenz wächst höchstens von der Ordung von h.

Ganz analog ist die Notation zu verstehen, wenn es um den 'aymptotischen Vergleich' von Folgen in einem normierten Vektorraum geht.

Definition 2.2 (Landau' s 'oh' und 'Oh' für Folgen)**.**
Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in einem normierten Vektorraum, und $(h_n)_n$ eine Folge positiver Zahlen. Man notiert

$$a_n = b_n + o(h_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \qquad \text{falls} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\|a_n - b_n\|}{h_n} = 0$$
$$a_n = b_n + O(h_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \qquad \text{falls} \quad \frac{\|a_n - b_n\|}{h_n} \le C < \infty.$$

Beispiel 2.2.1. Die Funktion $f_\varepsilon(x) = x^\varepsilon$ strebt für $x \to \infty$ umso langsamer nach ∞, je kleiner $\varepsilon > 0$ ist. Die Logarithmusfunktion strebt noch langsamer nach ∞ als alle diese positiven Potenzen. Die Exponentialfunktion strebt schneller nach ∞ als jede Potenz x^n. (Man kann das in Worten sagen: 'Exponentielles Wachtstum ist schneller als polynomiales Wachstum').

$$\forall \varepsilon > 0: \ \ln x = o(x^\varepsilon) \quad \text{für} \quad x \to \infty; \qquad \forall n: y^n = o(e^y) \quad \text{für} \quad y \to \infty.$$

Wir zeigen $\lim_{\to\infty} y^{-n} \cdot e^y = \infty$. In der Tat gilt für $y > 0$

$$y^{-n} \cdot e^y \ge \frac{1}{n!}\Big(1 + \frac{y}{n+1} + \frac{y^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\Big) \ge \frac{y}{(n+1)!}.$$

Die erste Aussage ist nicht wirklich verschieden. Genau dann, wenn $y = \ln\ x$ nach ∞ strebt, strebt auch x nach ∞; und es gilt für festes n und $x \to \infty$

$$x^{-1/n} \cdot \ln x = e^{-\frac{1}{n}y} \cdot y = \big(e^{-y} \cdot y^n\big)^{1/n} \longrightarrow 0.$$

Beispiel 2.2.2.

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + O(\tfrac{1}{\sqrt{x}}), \qquad \sqrt{x^2 + 2bx + c} = x + O(1) \qquad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Wir haben die Aussagen nebeneinander gestellt, weil man sie mit demselben Trick erledigen kann.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\big(1 + \sqrt{1 + 1/x}\big)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + O(x^{-3/2})$$
$$\sqrt{x^2 + 2bx + c} - x = \frac{x^2 + 2bx + c - x^2}{\sqrt{x^2 + 2bx + c} + x} = \frac{2bx + c}{x + x \cdot \sqrt{1 + 2b/x + c/x^2}} = b + O(1/x).$$

Beispiel 2.2.3. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Formel sollte erinnern an das bekannte integral $\int_1^x u^k \, du = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$. Beim diskreten Analogon muss man mit einem Fehler von der Größenordung des größten Summanden rechnen. Man kann die Summe in der Tat mit einem Polynom darstellen. Beispiele sind

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \tfrac{1}{2} n(n+1), \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \tfrac{1}{3} n(n+1/2)(n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2. \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.4 (Die harmonischen Zahlen).
Wir betrachten die Folge der sog. harmonischen Zahlen $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$. Sie strebt so langsam wie die Logarithmuswerte $\ln(k)$ nach ∞. In der Tat konvergiert die Folge $(H_k - \ln\ k)_k$ gegen eine Zahl,(welche in den Lehrbüchern die Euler-Mascheroni-Konstante genannt wird.) Die Tatsache wird plausibel, wenn man bedenkt:

$$\frac{1}{k} \;\le\; \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{1}{u} \, du \;=\; \ln(k+1/2) - \ln(k-1/2)$$

Und es ist klar, dass der Fehler für große k recht klein ist. — Eine genauere Betrachtung stellen wir zurück.

2.3 Das Gamma-Integral und die Stirlingsche Formel.

Wir haben gesehen, wie man die Exponentialfunktionen und die Logarithmusfunktionen durch Funktionalgleichungen (und eine Monotonieforderung) charakterisieren kann. Eine wichtige Funktionalgleichung ist die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion.

$$z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1), \qquad \Gamma(1) = 1.$$

(Wir werden im Abschnitt über konvexe Funktionen sehen, welche zusätzlichen Forderungen geeignet sind, die Gammafunktion eindeutig festzulegen.)

Der natürliche Definitionsbereich der Gammafunktion ist die komplexe Ebene ohne die negativen ganzen Zahlen, also $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Wir interessieren uns vorläufig nur für die Einschränkung auf die positive reelle Achse $\mathbb{R}^+$.

Die Gammafunktion interpoliert offenbar die 'Fakultät'-Funktion ('factorial function' im Englischen): $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \ldots, \Gamma(n+1) = n!$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ kann $\Gamma(\alpha)$ durch einen reellen Integralausdruck explizit gegeben werden, das sog. zweite Euler'sche Integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx. \qquad \text{für} \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Hinweis: Das erste Euler'sche Integral. auf welches wir auch sprechen werden, ist übrigens

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx. \qquad \text{für} \quad 0 < \alpha, \beta < \infty.$$

Die Überlegungen zu den Integralen der Potenzfunktionen im vorigen Unterabschnitt zeigen, dass die 'Fläche unter Kurve' tatsächlich endlich ist für die angegebenen α, β : Für $x \to \infty$ macht nämlich der Faktor e^{-x} den Integranden sehr klein; und in der Nähe des Nullpunkts ist die endliche Fläche durch die Bedingung $\alpha > 0$ gesichert.

Die Formel $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x}\, dx = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ ergibt sich durch partielle Integration. Ebenso finden wir die sog. Funktionalgleichung für die Beta-Funktion

$$B(\alpha, \beta+1) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x) \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx = B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta),$$

$$B(\alpha+1, \beta) = \int_0^1 x^\alpha \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx = \tfrac{\alpha}{\beta} \cdot \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^\beta\, dx = \tfrac{\alpha}{\beta} \cdot B(\alpha, \beta+1),$$

$$B(\alpha+1, \beta) = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta),$$

$$\frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha-k+1, \beta)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\cdots(\alpha+\beta-k+1)} = \binom{\alpha}{k} \cdot \binom{\alpha+\beta}{k}^{-1}.$$

Wir werden unten in einer Rechnung andeuten (leider noch nicht streng beweisen)

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Exkurs: Flächenelemente
Der Zusammenhang zwischen Eulers zweitem und Eulers erstem Integral wird deutlich, wenn wir einen kleinen Schritt in die Ideenwelt der Längen-, Flächen- und Volumenmessung wagen. Wir denken zunächst zurück an Formeln wie ln $x = \int_1^x \frac{1}{u}\,du$.

Wenn hier jemand fragte, was denn eigentlich das Symbol du bedeutet, dann könnten wir an dieser Stelle nur sehr vage Antworten geben: du steht für den Zuwachs, welchen die Variable u beim 'Durchlaufen einer Kurve' erfährt, in Abhängigkeit von Richtung und Geschwindigkeit des Durchaufens. $\int_{\mathfrak{C}}$ ist dann der Gesamtzuwachs entlang der Kurve $\mathfrak{C}$.

Alle Versuche, auf elementare Stufe mehr sagen zu wollen, sind, wie 300-jährige Erfahrung lehrt, aussichtslos, wenn nicht sogar potentiell irreführend. Die erste Veröffentlichung der Leibnizschen Form der Differential- und Integralrechnung im Jahre enthält bereits unsere Symbole dx, dy und die Differentiationsregeln einschliesslich $d(uv) = u\,dv + v\,du$. Die Leibnizschen Erklärungen über die Grundlagen des neuen Kalküls litten unter derselben Unbestimmtheit wie die Newtonschen, die scharf angegriffen wurden. Manchmal waren die dx, dy endliche Größen, manchmal aber Größen, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch nicht Null waren. Die Notation hat aber alle Kritik überlebt.

Erst in der Theorie von E. Cartan im zweiten Viertel des 20. Jahrhunderts hat der 'Operator' d (als 'äussere Differentiation' von Differentialformen) eine in jeder Beziehung befriedigende Bestimmung gefunden. Der Operator d macht 'Pfaffsche Formen' aus Funktionen und allgemeiner 'alternierende Differentialformen' vom Grad $k+1$ aus alternierenden Differentialformen vom Grad k. Cartans Konstruktionen bauen auf die geometrische Ideen von H. Grassmann (1809 - 1877), die 80 Jahre lang kaum Resonanz gefunden hatten; und diese Verbindung wird mit gutem Grund als der bedeutendste Fortschritt der Differential- und Integralrechnung im 20. Jahrhundert gesehen.

Es bleibt allerdingd ein didaktisches Problem der Anfängervorlesungen, die Brücke zu schlagen von der Leibnizschen Notation zur Betrachtungsweise der Differentialformen. Wir werden das in der Analysis II versuchen, wo wir uns gründlich mit der Differentiation befassen. Hier wollen schon einmal in einer Art Vorschau zwei konkrete Fälle des Kalküls in einer Weise vorstellen, die möglicherweise den Geist der modernen Theorie ahnen lassen.

1) Die Beziehungen zwischen den Euler'schen Integralen.
Es sollte (in Analogie zu den Doppelsummen) plausibel sein, wenn wir schreiben

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty y^{\beta-1}\cdot e^{-y}\,dy \\
&= \int\!\!\int_{\mathcal{B}} x^{\alpha-1}\cdot y^{\beta-1}\cdot e^{-(x+y)}\,dx\wedge dy \\
&= \int\!\!\int_{\mathcal{B}} (x+y)^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-(x+y)}\cdot\left(\tfrac{x}{x+y}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(\tfrac{y}{x+y}\right)^{\beta-1}\cdot\tfrac{1}{x+y}\,dx\wedge dy \\
&= \int_0^\infty\int_0^1 (x+y)^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-z}\cdot(1-t)^{\alpha-1}\cdot t^{\beta-1}\cdot dz\wedge dt \\
&= \quad \Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Beim Koordinatenwechsel $y = z \cdot t,\ x = z \cdot (1-t)$ gilt nämlich für das Integrationssymbol $dx \wedge dy = z \cdot dz \wedge dt$. Und als Beschreibung des Integrationgebiets haben wir

$$\{(x,y):\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\} = \mathcal{B}\ = \{(z,t):\ 0 < z < \infty,\ 0 < t < 1\}$$

Der Kalkül der Dach-Produkte (wedge-products) ist Sache der Multilinearen Algebra.

2) Die merkwürdige Formel $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
Wir berechnen auf dem Umweg über das Quadrat das Integral

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx.$$

Wir zeigen $C = 1$:
Das 'Fächenelement' in Polarkoordinaten ist $r \cdot dr \wedge d\phi = dx \wedge dy$; und wir erhalten

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\ dy = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathcal{B}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathcal{B}} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \cdot dr \wedge d\phi = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \cdot dr = 1 \end{aligned}$$

Hinweis: Der Integrand unseres Integrals heisst die Dichte der Standard-Normalverteilung. Auf dem 10-DM-Schein fand man früher neben einem Diagramm und einem Bild von C.F. Gauss (1777 - 1855) die Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gauss'sche Variable mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ einen Wert zwischen a und b annimmt:

$$\mathbb{P}\big(a < X < b\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma} \int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\ dx.$$

Aus der Normierungskonstanten für Dichte der Normalverteilung gewinnen wir den merkwürdigen Wert $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$: Mit der Substitution $x = \sqrt{2u}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot dt$ erhalten wir nämlich

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-t} \cdot dt = \int_0^{\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2) \cdot \sqrt{2} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}.$$

Wir werden übrigens später ein sehr viel weitergehende Formel kennenlernen, nämlich

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\ \pi\alpha}.$$

Eine elementare Merkwürdigkeit, die gern in den Anfängerveranstaltungen präsentiert und bewiesen wird, ist auch
3)Das Wallis'sche Produkt. John Wallis (1613- 1703) bemerkte

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

Wir zeigen eine offensichtlich äquivalente Formel, die wir als eine asymptotische Aussage für eine Folge von Binomialkoeffizienten formulieren: Es sei

$$p_n = (-1)^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{2n-1}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \quad 2n}.$$

Es gilt dann $p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\big(1 + o(1)\big)$ und $\qquad (2n+1) \cdot p_n^2 = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi}.$

Beweis. *Für $m \geq 2$ erhalten wir durch partielle Integration*

$$\begin{aligned} A_m =& \int_0^{\pi/2} \sin^m x \ dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \ d\big(\cos x\big) = (m-1) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \ x \cdot \cos^2 x \ dx \\ =&(m-1) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} \ x \cdot (1 - \sin^2 x) \ dx = (m-1)A_{m-2} - (m-1)A_m \end{aligned}$$

Da der Sinus im Integrationsbereich $(0, \pi/2)$ Werte aus $[0,1]$ annimmt, ist die Folge der Integrale abnehmend mit $A_{m-2} \geq A_{m-1} \geq A_m = \frac{m-1}{m} \cdot A_{m-2}$. Die Quotienten aufeinanderfolgender A_m konvergieren nach 1. Wegen $A_0 = \pi/2, A_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi/2 = A_0 =& \frac{2}{1}A_2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot A_4 = \quad \ldots \quad = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \quad (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \ (2m-1)} \cdot A_{2m} \\ 1 \ = A_1 =& \frac{3}{2}A_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot A_5 = \quad \ldots \quad = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m-1) \cdot (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m-2) \cdot \quad 2m} \cdot A_{2m+1}. \end{aligned}$$

und wegen $\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2} = \frac{4m^2-1}{4m^2} = 1 - \frac{1}{4m^2}$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{A_1}{A_0} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \cdot \frac{A_{2m+1}}{A_{2m}}.$$

Ergänzung: Wir wollen noch auf einem anderen Weg plausibel machen, dass man auch für andere $\alpha \notin \mathbb{Z}$ erwarten kann, dass sich die Binomialkoeffizienten $\binom{-\alpha}{n}$ (im Absolutbetrag) für $n \to \infty$ wie eine Potenz von n verhält. Es genügt offenbar $\alpha \in (0,1)$ zu studieren.

$$\begin{aligned} p_n(\alpha) =&(-1)^n \cdot \binom{-\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{1 \cdot \ 2 \ \cdots \ n} \\ =&(1 + \tfrac{\alpha-1}{1}) \cdot (1 + \tfrac{\alpha-1}{2}) \cdot \cdots \cdot (1 + \tfrac{\alpha-1}{n}). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die späten Faktoren bzw. die späten Summanden der Logarithmen und benützen für sie die Näherung $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Die Fehler summieren sich zu einer Konstanten:

$$\begin{aligned} \ln \ p_n(\alpha) =& \ln(1 + \tfrac{\alpha-1}{1}) + \ln(1 + \tfrac{\alpha-1}{2}) + \cdots + \ln(1 + \tfrac{\alpha-1}{n}) \\ =&(\alpha - 1) \cdot (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}) + c_n(\alpha) = (\alpha - 1) \cdot H_n + c_n(\alpha). \end{aligned}$$

Da die harmonischen Zahlen H_n wie der natürliche Logarithmus ln n anwachsen, haben wir $(\alpha-1)\cdot H_n + c_n(\alpha) = (\alpha-1)\cdot \ln\, n + c'_n(\alpha)$ und mit $C(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \exp(c'_n(\alpha))$

$$p_n(\alpha) = (-1)^n \cdot \binom{-\alpha}{n} = C(\alpha)\cdot n^{\alpha-1}\cdot (1+o(1)).$$

Die Überlegung eignet sich nicht zur Bestimmung der Konstanten. Wir werden sie unten mit Hilfe der Stirlingschen Formel finden: $C(\alpha) = (\Gamma(\alpha))^{-1}$.

4.) Die Stirlingsche Formel

Das arithmetische Mittel der ersten n natürlichen Zahlen ist bekanntlich $\frac{n+1}{2}$. Das geometrische Mittel ist in einer groben Näherung $\frac{n}{e}$. Das wir schon einmal plausibel machen:

$$\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n) = \tfrac{n+1}{2}; \qquad \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} = (n!)^{\frac{1}{n}} \sim \tfrac{n}{e}$$

$$\frac{1}{n}\cdot \ln\,(n!) = \frac{1}{n}\cdot(\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n) \sim \frac{1}{n}\int_{2-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln\, x\; dx,$$

$$\ln\,(n!) \sim \Big[x\cdot \ln\, x - x\Big]^{n+\frac{1}{2}} = (n+\tfrac{1}{2})\cdot \ln\, n - n + \mathrm{const} + O(\tfrac{1}{n}).$$

Es muss noch geklärt werden, wie das Zeichen $\sim$ hier gedeutet werden darf. Die Stirlingsche Formel gibt Auskunft:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot \exp\big(\tfrac{1}{12\cdot n} + O(n^{-3}\big).$$

Es gibt viele Herleitungen. Das eine Problem ist die Konstante $\sqrt{2\pi}$, das andere eine genauere Bestimmung des Fehlerterms (für $n\to\infty$). Wir wollen mit der folgenden Skizze sowohl an das $\sqrt{2\pi}$ im Gauss'schen Fehlerintegral anknüpfen, als auch an die Technik des Koeffizientenvergleichs. Wir werden dabei auch die Lücken identifizieren, die uns noch von einer hieb- und stichfesten Abschätzung trennen. — Wir werden übrigens später bei den konvexen Funktionen nochmals mit effektiveren Mitteln auf die Sache zurückkommen.

Wir beginnen mit dem Gamma-Integral

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n\cdot e^{-t}\; dt = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \int_0^\infty \big(\tfrac{t}{n}\big)^n\cdot e^{-t+n}\; dt = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\cdot n\int_0^\infty u^n\cdot e^{-n(u-1)}\; du\\ &= \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\cdot n\int_0^\infty \exp(-nK(u))\; du \quad \text{mit} \qquad K(u) = -\ln\, u + u - 1.\end{aligned}$$

Die Funktion $K(\cdot)$ nimmt ihr Minimum 0 im Punkt $u_0 = 1$ an. Sie ist konvex und wächst nach $+\infty$ für $u\to 0$ und $u\to\infty$. Der wesentliche Beitrag zum Integral kommt für große n aus einer kleinen Umgebung von $u_0 = 1$. Genau gesagt:

$$\forall u_+ > u_0\; \exists c_+ > 0: \quad \int_{u_+}^\infty \exp(-nK(u))\; du = o(e^{-nc_+})$$

$$\forall u_- < u_0\; \exists c_- > 0: \quad \int_0^{u_-} \exp(-nK(u))\; du = o(e^{-nc_-}).$$

Wir werden jetzt für $0 < u_- < u_0 < u_+ < 1$ zeigen

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \int_{u_-}^{u_+} \exp(-nK(u))\ du = 1 + \tfrac{1}{12}\frac{1}{n} + o(n^{-1}).$$

Es gibt offenbar genau eine im Intervall $(-1, \infty)$ von $-\infty$ nach $+\infty$ monoton aufsteigende Funktion $A(v)$ mit

$$\frac{1}{2}A^2(v) = K(1+v) = v - \ln\ (1+v).$$

Für $|v| \leq 1-\varepsilon < 1$ gilt $K(v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 - \cdots$. Mit der Methode des Koeffizientenvergleichs erhalten wir $A(v) = v - \frac{1}{3}v^2 + \frac{7}{36}v^3 + \cdots$. Die Abbildung $v \mapsto A(v) = a$ besitzt eine Umkehrung $a \mapsto B(a) = v$; und die wird lokal durch eine Potenzreihenentwicklung dargestellt. (Was das bedeutet und warum das so ist, lernen wir im Abschnitt über konvergente Potenzreihen.) Wir können die ersten Koeffizienten von $B(a) = a + b_2a^2 + b_3a^3 + \cdots$ aus einer Differentialgleichung bestimmen

$$\begin{aligned} &A(B(a)) = a, \qquad \tfrac{1}{2}a^2 = K(1+B(a)) = B(a) - \ln\ (1+B(a)),\\ &a = B'(a) - (1+B(a))^{-1} \cdot B'(a), \qquad B(a)\cdot(B'(a) - a) = a,\\ &B(a) = a + \tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{36}a^3 + \cdots. \quad B'(a) = 1 + \tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{12}a^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Dies ergibt für das gesuchte Integral wegen $v = B(a), \quad dv = B'(a)\ da$

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-nK(1+v))\ dv = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-\tfrac{n}{2}a^2)\ B'(a)\ da =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \int_{-\sqrt{n}\delta}^{\sqrt{n}\delta} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2) \cdot \left(1 + \tfrac{2}{3}\tfrac{x}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{12}\tfrac{x^2}{n} + \cdots\right)\ dx \quad = \quad 1 + \tfrac{1}{12}n^{-1} + O(n^{-3}).$$

Man kann die 'asymptotische Entwicklung' weitertreiben; es gibt aber keine Konvergenz. Man kann nicht leicht erklären, warum die Formeln schon für kleine $n = 2, 3, \ldots$ recht gute Approximationen liefern, also einen recht kleine Rest r_n liefern.

$$\ln\ n! = n \cdot \ln\ n - n + \tfrac{1}{2}\ln\ n + \ln\ \sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{12}n^{-1} - \tfrac{1}{360}n^{-3} + r_n.$$

Man kann die Formel natürlich für eine approximative Berechnung der Binomialkoeffizienten benützen. Ein berühmter Spezialwert ist beispielsweise $\quad (\frac{1}{2})^{2n} \cdot \binom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Besonders interessant sind die Folgen, die wir oben als Verallgemeinerungen des Wallis'schen Produkt konstruiert haben.

5.) Die Produktformel für die Gamma-Funktion

Satz. *Für* $\alpha > 0$ *und* $\mathbb{N} \ni n \to \infty$ *gilt*

$$(-1)^n \cdot \binom{-\alpha}{n} \quad = \quad n^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot (1 + O(\tfrac{1}{n})).$$

Beweis. *Bei der Herleitung der Stirling-Formel haben wir nicht benützt, dass das Argument eine natürliche Zahl ist. Im Folgenden benützen wir sie häufig in der Form*

$$\Gamma(\alpha+1)=\sqrt{2\pi}\cdot\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot e^{-\alpha}\cdot e^{S\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\quad \textit{mit}\quad S\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)=\tfrac{1}{12\alpha}+O(\alpha^{-3}).$$

Die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion liefert für $\alpha>0$

$$(-1)^n\cdot\binom{-\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n-1)=\frac{1}{n!}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+n)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+n)\cdot(\Gamma(n+1))^{-1}.$$

Die Stirling-Formel liefert

$$\begin{aligned}&\ln\Gamma(\alpha+n)-\ln\Gamma(n+1)\\ =&(n+\alpha-1+\tfrac{1}{2})\cdot\ln(n+\alpha-1)-(n+\alpha-1)-(n+\tfrac{1}{2})\cdot\ln\ n+n+O(\tfrac{1}{n})\\ =&(n+\tfrac{1}{2}+\alpha-1)\cdot\left[\ln\ n+\ln(1+\tfrac{\alpha-1}{n})\right]-(n+\tfrac{1}{2})\cdot\ln\ n-(\alpha-1)+O(\tfrac{1}{n})\\ =&(\alpha-1)\cdot\ln\ n+(n+\tfrac{1}{2})\cdot\ln(1+\tfrac{\alpha-1}{n})-(\alpha-1)+O(\tfrac{1}{n})\quad=\quad(\alpha-1)\cdot\ln\ n+O(\tfrac{1}{n})\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt $\qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}=\lim\big(n^{1-\alpha}\cdot p_n(\alpha)\big)=\lim\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n-1)}{n!\cdot n^{\alpha-1}}.$

Das Resultat kann als Erklärung dienen für die folgende auf Gauss zurückgehende Formel für die Gamma-Funktion:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z\cdot(z+1)\cdot\dots\cdot(z+n)}{n!\cdot n^z}\quad\text{für}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\ \}.$$

Eine andere noch näher liegende Erklärung ist die für diesen Limes offenkundig gültige Funktionalgleichung. Man muss natürlich nachweisen, das der Limes existiert.

Es ist hier nicht der Platz für ein näheres Studium der Gamma-Funktion mit komplexen Argument. Wir erwähnen nur noch zwei Identitäten, welche die These unterstreichen, dass die Gamma-Funktion zum engeren Kreis der elementaren Funktionen gerechnet werden sollte.

$$\frac{1}{\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)}\ =\ z\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(-z+k)(z+k)}{k^2}\ =\ \frac{1}{\pi}\cdot\sin\ \pi z.$$

Die erste Formel heisst der Ergänzungssatz für die die Γ-Funktion (Die Argumente z und $1-z$ ergänzen sich zu 1); die zweite Identität heisst Eulers Produktdarstellung der Sinusfunktion.

2.4 Elementare und andere besondere Stammfunktionen

Wir befassen uns hier mit sehr speziellen Typen von reellwertigen Funktionen auf Intervallen: $F(\cdot), G(\cdot), \ldots$ oder auch $f(\cdot), g(\cdot), \ldots$.

Definition 2.3. Wir sagen von einer Funktion $f(\cdot)$ auf dem Intervall (A, B), sie sei gleichmäßig stetig auf jedem echten Teilintervall, wenn gilt

$$\forall A < a < b < B\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad a < x_1 < x_2 < b, |x_2 - x_1| < \delta \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Diese Funktionen werden auch die lokal gleichmäßig stetigen Funktionen genannt. Bemerke: Wenn wir an dieser Stelle schon mehr wüssten über das Kontinuum der reellen Achse, dann könnten wir die Forderung einfacher ausdrücken. Wenn nämlich eine Funktion dieser Art auf einer im Intervall dichten Zahlenmenge gegeben ist, etwa im Intervall der rationalen Zahlen zwischen A und B, dann besitzt sie eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen Funktion auf das reelle Intervall $(A, B) \subseteq \mathbb{R}$; und jede stetige Funktion auf dem reellen Intervall (A, B) ist gleichmäßig stetig auf jedem kompakten Teilbereich.

Solange noch keine tieferen Kenntnis über das Kontinuum bereit stehen, scheint es uns angemessen, die Konstruktion von Stammfunktionen, die ohnehin hier noch nicht zu einer elaborierten Theorie ausgebaut werden soll, auf elementare geometrische Vorstellungen zu gründen. Es ist tatsächlich die oben formulierte lokal gleichmäßige Stetigkeit, die benötigt wird im elementaren Umgang mit den Kurven aus der Welt der klassischen Differential- und Integralrechnung. In dieser (auf Newton und Leibniz zurückgehenden) Vorstellungswelt geht man davon aus, dass es einen guten Sinn hat, von der Fläche unter der Kurve $f(\cdot)$ (f nichtnegativ) über dem Abschnitt $[a, b]$ zu sprechen. (Heute versteht man das als eine Annahme, deren Berechtigung an geeigneter Stelle zu überprüfen ist.) Man nennt den Flächeninhalt das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und bezeichnet ihn mit $\int_a^b f(x)\, dx$, oder auch $\int_a^b f(u)\, du$; der Name der 'Integrationsvariablen' ist irrelevant.

Es ist bekannt, dass man auch für größere Klassen von Funktionen das bestimmte Integral über dem Integrationsbereich $[a, b]$ definieren kann. Ein Nachdenken, welche Funktionenklassen das sein könnten oder sollten, müssen wir verschieben, solange wir noch nicht die Grundlagen und den Weitblick für eine tragfähige Theorie des Integrals haben. Wir wollen uns nicht mit adhoc-Verallgemeinerungen des einfachen Integralbegriffs aufhalten, und behandeln daher weder das sog. Regel-Integral noch das Riemann-Integral. Aus der Perspektive der Analysis des 20. Jahrhundert sind diese Verallgemeinerungen des naiven Integralsbegriffs ohnehin als Sackgassen einzuschätzen. Und sie werden auch nicht wirklich benötigt in der klassischen Differential- und Integralrechnung, dem 'Calculus', wie die Amerikaner sagen. Wir begnügen uns hier damit, die Grundzüge des Calculus in einer Sprache vorzustellen, die uns später zur modernen Integrationstheorie hinführen wird.

Notation. Die Menge der Funktionen f, die auf jedem echten Teilintervall von (A, B) gleichmäßig stetig sind, wird mit $\mathcal{C}(A, B)$ bezeichnet; die Menge der nichtnegativen Funktionen dieser Art wird mit $\mathcal{C}^+(A, B)$ bezeichnet.

Satz 2.4.1. *Der Funktionenraum $\mathcal{C}(A, B)$ ist ein Vektorraum mit den zusätzlichen Eigenschaften: Mit f und g gehören auch das punktweise Produkt $f \cdot g$ und das punktweise Minimum $f \wedge g$ zu $\mathcal{C}(A, B)$.*

Beweis. *Der Beweis liegt auf der Hand. Man sagt, $\mathcal{C}(A, B)$ sei sowohl eine Algebra als auch ein Vektorverband.*

Notation. Für ein echtes Teilintervall $[a, b]$ und $f \in \mathcal{C}^+(A, B)$ bezeichnet man mit $\int_a^b f^+(u)\ du$ die Fläche unter der Kurve über dem Intervall $[a, b]$.
Für $f \in \mathcal{C}(A, B)$ definiert man $\int_a^b f(u)\ du = \int_a^b f^+(u)\ du - \int_a^b f^-(u)\ du$.
Wenn $A < a, b < B$ und $a > b$, dann notiert man $\int_a^b f(u)\ du = -\int_b^a f(u)\ du$.

Aus der Annahme, dass das Integral die Fläche unter der Kurve über $[a, b]$ beschreibt, ergibt sich $\int_a^b 1\ du = (b - a)$. Diese Forderung und die folgenden weiteren Forderungen sind die Grundlage des sog. Cauchy-Integrals, welches als einer der großen Bausteine des Calculus anzusehen ist:

Definition 2.4 (Cauchy-Integral)**.**
Die Integration über ein festes Intervall $[a, b] \subset (A, B)$ ist das monotone lineare Funktional auf dem Vektorverband $\mathcal{C}(A, B)$ mit $\int_a^b 1\ du = (b - a)$.

Für $f, g \in \mathcal{C}(A, B), \quad c,\ d \in \mathbb{R}$ gilt also

$$\int_a^b \big(c \cdot f(u) + d \cdot g(u)\big)\ du \ = \ c \cdot \int_a^b f(u)\ du + d \cdot \int_a^b g(u)\ du.$$

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \le g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(u)\ du \le \int_a^b g(u)\ du.$$

Einordnung dieser Grundannahme über die 'Fläche unter der Kurve': Der erste, der es für nötig hielt, für eine abstrakt vorgegebene, (d. h. durch explizit benannte innere Eigenschaften definierte) Klasse von Funktionen das Integral zu konstruieren, war in der Tat Cauchy. Er stellte die stetigen Integranden an den Anfang, wobei er Stetigkeit wie B. Bolzano als Stetigkeit in jedem Punkt des Definitionsbereichs definierte. Weitere von ihm stillschweigend benutzte intuitive Vorstellungen von einer Kurve, welche, 'stetig durchlaufen', das Flächenstück 'abschliesst', werden nicht präzise benannt. Es war Cauchy nicht bewusst, dass die Eigenschaft der Stetigkeit in jedem Punkt (im Hinblick auf eine Integrationstheorie) nicht weit trägt, wenn sie nicht durch weitere Eigenschaften (oder durch Eigenschaften des Definitionsbereichs) ergänzt wird,

Die heutigen Lehrbücher des Calculus beginnen meistens etwas anders als Cauchy. Sie stellen an den Anfang die Annahme, dass jedenfalls einmal bei die Indikatorfunktion eines Intervalls $f = 1_{[a,b]}$ der zweidimensionale Bereich 'unter der Kurve' etwas ist, dem ein Fächeninhalt zukommt, nämlich $\int 1_{[a,b]}(u)\ du = (b - a)$, und dass der Flächeninhalt bei disjunkter Vereinigung additiv ist. Das Projekt, der Fläche unter einer Kurve über einem Intervall einen Inhalt zuzuweisen, klingt plausibel, auch wenn man keine ausgearbeitete

Vorstellung von der Menge aller Punkte in einem Intervall besitzt. Die Problematik tritt beim Umgang mit den Treppenfunktionen nicht so deutlich hervor wie bei dem Versuch, eine Funktion zu 'integrieren', die (nach irgendeinem Verfahren) zunächst nur in den rationalen Zahlen (in einem Intervall) definiert. (Wir denken z. B. an die Funktion a^x, die ja zunächst einmal nur für rationale x definiert wird.)

Es zeigt sich, dass der Zugang über die lokal gleichmäßige Stetigkeit technisch und logisch ebensogut fundiert ist wie der über die Treppenfunktionen. Hier wie dort entwickelt man ein 'Elementarintegral' auf der Grundlage der Vorstellung von der Additivität und der Monotonie des Flächeninhalts. Und dafür wird zunächst einmal noch kein gründliches Verständnis für das Kontinuum benötigt. Heikel wird es erst, wenn man die Klasse der zu integrierenden Funktionen ausweiten will.

Historische Anmerkung: Gegen das tatsächliche Vorgehen von Cauchy sind Zweifel deswegen anzumelden, weil Cauchy von seinen Integranden nur die Stetigkeit fordert und nicht dazusagt, dass er für seine Schlüsse immer wieder einmal die lokal gleichmäßige Stetigkeit heranzieht. Und ohne ein gründliches Verständnis des Zahlenkontinuums $\mathbb{R}$ kann man nicht beweisen, dass die stetigen Funktionen auf einem Intervall lokal gleichmäßig stetig sind. Der Schlüssel für den Nachweis ist Einsicht, dass die reelle Achse (richtig verstanden) ein lokalkompakter Raum ist. Der Begriff der (lokalen) Kompaktheit stand Cauchy nicht zur Verfügung; er ist eine Errungenschaft des späten 19. Jahrhunderts, gut ausgearbeitet erst bei Weierstrass.

In allen Integrationstheorien studiert man Klassen von Funktionen, die durch elementar integrierbare Funktionen approximiert werden. Hier können unterschiedliche Wege verfolgt werden, und es können unterschiedliche Antworten auf die Frage gegeben werden, welche Approximationen zugelassen werden sollen. Die 'elementaren' Integrationstheorien in den Lehrbüchern für Anfänger geben sich (üblicherweise) mit 'bequemen' Antworten zufrieden. In einfachen Kontexten kann man die Defizite verbergen, indem man sie mit adhoc-Konstruktionen überspielt. Ein tiefgreifendes Defizit gegenüber der reifen Integrationstheorie nach Lebesgue zeigt sich dann freilich bei den Grenzwertsätzen; die wirklich nützlichen Grenzwertsätze kann man nämlich ohne die Ideen der σ-Additivität und der fastsicheren Konvergenz nicht entwickeln.

Da es (anscheinend) keinen plausiblen Weg gibt, der vom elementaren Gedanken der Fläche unter der Kurve zur Idee der σ-Additivität führt, müssen wir ein tieferes Eindringen in die Idee der Integration auf den Zeitpunkt verschieben, wo wir uns ein gründliches Verständnis des Kontinuums erarbeitet haben. Unser paralleler Zugang leistet das im Abschnitt 3 (Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit)

Stammfunktionen lokal gleichmäßig stetiger Funktionen.

Definition 2.5. Eine reellwertige Funktion $F(\cdot)$ heisst ein (oder das) unbestimmtes Integral (oder auch Stammfunktion) der Funktion $f(\cdot)$ auf dem Intervall (A, B), wenn für alle echten Teilintervalle $[a, b] \subset (A, B)$ gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\ du = \int_a^b f^+(u)\ du - \int_a^b f^-(u)\ du.$$

Die Funktion $f(\cdot)$, (die hier als gleichmäßig stetig auf jedem echten Teilintervall angenommen wird,) heisst die Ableitung von $F(\cdot)$, und man schreibt $f = F'$ oder $f = D(F)$.

Satz 2.4.2 (Erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)**.** *Wenn* $F(\cdot)$ *ein unbestimmtes Integral von* $f(\cdot) \in \mathcal{C}(A, B)$ *ist, dann gilt für jedes echte Teilintervall* $[a, b]$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \quad \xrightarrow{h \to 0} \quad 0, \quad \textit{gleichmäßig auf } [a, b].$$

Beweis. *Gegeben sei* $\varepsilon < 0$. *Seien* x, h *so, dass* $a < x, x + h < b$ *und sei* δ *so, dass* $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ *für alle* $x_2, x_1 \in (a, b)$ *mit* $|x_2 - x_1| < \delta$. *Es gilt dann*

$$\frac{1}{h}\big[F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x)\big] = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} \big[f(u) - f(x)\big]\ du.$$

Der Integrand ist im Absolutbetrag kleiner als ε*; und so gilt dasselbe für den Mittelwert über das Intervall der Länge* h. *In Formeln sagt das*

$$\forall [a, b] \forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{h} : \forall h < \tilde{h} : \quad \sup_{a \le x \le b} \Big\{ \Big| \frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) - f(x) \Big| \Big\} < \varepsilon.$$

Definition 2.6. Eine Funktion $F(\cdot)$ auf (A, B) heisst eine stetig differenzierbare Funktion, wenn sie Stammfunktion einer Funktion $f \in \mathcal{C}(A, B)$ ist. Mit $\mathcal{C}^1(A, B)$ bezeichnen wir den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall (A, B).

Satz 2.4.3. *Die Ableitung* D, *definiert auf* $\mathcal{C}^1(A, B)$ *ist eine surjektive Abbildung, welche die konstanten Funktionen (und nur sie) auf die Nullfunktion abbildet.*

$$D : \ \mathcal{C}^1(A, B) \ni F \longmapsto F' \in \mathcal{C}(A, B) \quad \textit{surjektiv.}$$

Satz 2.4.4 (Produktregel und partielle Integration.)**.**
Der Raum $\mathcal{C}^1(A, B)$ *ist eine Funktionenalgebra. Mit* F *und* G *ist auch* $F \cdot G$ *stetig differenzierbar und es gilt*

$$D\big(F \cdot G\big) = F \cdot D(G) + G \cdot D(F).$$

Für alle $[a, b]$ *gilt*

$$\int_a^b \big(F' \cdot G\big)(u)\ du = \big[FG(b) - FG(a)\big] - \int_a^b \big(F \cdot G'\big)(u)\ du$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{h}\big[FG(x+h)-FG(x)\big] &= F(x+h)\cdot\tfrac{1}{h}\big[G(x+h)-G(x)\big] \quad + \quad G(x)\cdot\tfrac{1}{h}\big[F(x+h)-F(x)\big]\\ &= \big(FG'+GF'\big)(x)+o(1) \quad \textit{für } h\to 0\end{aligned}$$

$$(FG)(b)-(FG)(a)=\int_a^b (FG)'(u)\;du=\int_a^b\big(F\cdot G'+G\cdot F'\big)(u)\;du.$$

Satz 2.4.5 (Kettenregel und Substitutionsregel)**.**
Ist $\Phi(\cdot)$ stetig differenzierbar auf (C,D) mit Werten in (A,B), dann gilt

- *Für jedes $F\in\mathcal{C}^1(A,B)$ ist die zurückgenommene Funktion $\tilde{F}(\cdot)=F\big(\Phi(\cdot)\big)=F\circ\Phi(\cdot)$ stetig differenzierbar auf (C,D) und es gilt*

$$D\big(F\circ\Phi(\cdot)\big)=F'\big(\Phi(\cdot)\big)\cdot\Phi'(\cdot),$$

- *Für jedes $f\in\mathcal{C}(A,B)$ ist die zurückgenommene Funktion $f\big(\Phi(\cdot)\big)$ gleichmässig stetig auf jedem $[c,d]\subset(C,D)$ und es gilt*

$$\int_c^d f(\Phi(v))\cdot\Phi'(v)\;dv=\int_{\Phi(c)}^{\Phi(d)} f(u)\;du.$$

Beweis. *Es gilt gleichmäßig für die v in jedem vorgegebenen echten Teilintervall*

$$\Phi(v+h)=\Phi(v)+\Phi'(v)\cdot h+o(h),$$
$$F\big(\Phi(v+h)\big)-F\big(\Phi(v)\big)=F'\big(\Phi(v)\big)\cdot\big[\Phi'(v)\cdot h+o(h)\big]=F'\big(\Phi(v)\big)\cdot\Phi'(v)\cdot h+o(h).$$

Wenn F Stammfunktion von f ist, dann ist die Ableitung der Funktion $\tilde{F}(\cdot)=\int^{\Phi(\cdot)}f(u)\;du=F\circ\Phi(\cdot)$ die Funktion $\tilde{F}'(\cdot)=f(\Phi(\cdot))\cdot\Phi'(\cdot)$. Also ergibt sich $\tilde{F}(y)$ als Stammfunktion

$$\int^{\Phi(\cdot)} f(u)\;du=\tilde{F}(y)=\int^{y} f\circ\Phi(v)\cdot\Phi'(v)\;dv.$$

Beispiel 2.4.1.
Die Fläche des halben Einheitskreises $B=\big\{(x,y)\,:\,|x|\le 1,\,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\big\}$ ist bekanntlich $\frac{1}{2}\pi$. Wenn wir nun eine Formel für die Fläche $\int_{-1}^{x}\sqrt{1-u^2}\,du$ suchen, dann brauchen wir die Arcussinusfunktion $a(\cdot)=\arcsin(\cdot)$. Die Einschränkung der Sinusfunktion auf das Intervall $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ bildet dieses Intervall der Länge π in isotoner Weise auf das Intervall $(-1,+1)$ ab.

$$a(\sin\,x)=x\quad\text{für } |x|<\tfrac{1}{2}\pi,\qquad\qquad \sin(a(y))=y\quad\text{für } |y|<1.$$

Die Ableitung nach der Kettenregel liefert

$$a'(\sin\,x)\cdot\cos\,x=1,\quad a'(\sin\,x)\cdot\sqrt{1-\sin^2\,x}=1,\quad a'(y)\cdot\sqrt{1-y^2}=1.$$

Mit der Substitution $u = \sin\ v$, $du = \cos\ v\ dv$ erhalten wir

$$\int_0^y \sqrt{1-u^2}\ du = \int_0^{a(y)} \cos\ v \cdot \cos\ v\ dv = \frac{1}{2}\int_0^{a(y)} (\cos\ 2v + 1)\ dv = \left[\tfrac{1}{4}\sin\ 2v + \tfrac{1}{2}v\right]_0^{a(y)}.$$

und wegen $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos\ x = 2 \cdot \sin x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\int_0^y \sqrt{1-u^2}\ du = \tfrac{1}{2}\sin(a(y))\sqrt{1-\sin^2(a(y))} - \tfrac{1}{2}a(y) = \tfrac{1}{2}y \cdot \sqrt{1-y^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin\ y.$$

Die Probe ergibt in der Tat $\quad D\left[x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin\ x\right] = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}.$

Beispiel 2.4.2. Der 'hyperbolische Sinus' $\sinh\ x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bildet die reelle Achse in isotoner Weise auf sich ab. Die Umkehrabbildung $A(y)$ heisst die Areasinushyperbolicus-Funktion. Ihre Ableitung ist $A'(y) = (1+y^2)^{-1/2}$. Wir bestätigen das auf zwei Wegen.

$$y = \sinh\ A(y) \Longrightarrow 1 = \cosh A(y) \cdot A'(y) = \sqrt{1+\sinh^2 A(y)} \cdot A'(y) = \sqrt{1+y^2} \cdot A'(y).$$

Der zweite Weg führt über die explizite Formel $A(y) = \ln\left[y \pm \sqrt{1+y^2}\right.$, die durch die Lösung einer quadratischen Gleichung gewonnen wird.

$$2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Rightarrow (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \Rightarrow e^x = y + \sqrt{1+y^2}.$$

Wegen $e^x > 0$ kommt nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel in Frage.. Die Differentiation gemäß der Kettenregel liefert das Resultat $\quad A'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$

Beispiel 2.4.3 (Die bekanntesten unbestimmten Integrale).

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{u}\ du &= \ln\ x, & \int_e^x \frac{1}{u \ln\ u}\ du &= \ln\bigl(\ln\ x\bigr),\\
\int_0^x \frac{1}{1+u^2}\ du &= \arctan x, & \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du &= \arcsin x \quad \text{für } |x| < 1,\\
\int_1^x \ln\ u\ du &= x \cdot \ln\ x - x + 1, & \int_1^x 2u \cdot \ln\ u\ du &= x^2 \cdot \ln\ x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2},\\
\int^x u^\alpha\ du &= \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad \text{für } \alpha \neq -1, & \int^x \frac{1}{u \cdot (\ln\ u)^{1+\varepsilon}}\ du &= -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{\varepsilon} + C.
\end{aligned}$$

Wir bemerken noch, dass die Beta$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Dichte eine elementare Stammfunktion besitzt

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{1-u}}\ du = 2 \cdot \arcsin \sqrt{x} \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

Wir wenden uns nun einer größeren Klasse von Stammfunktionen zu, den konvexen Funktionen auf einem Intervall.

Monotone und konvexe Funktionen

Definition 2.7. Eine reellwertige Funktion g auf einem Intervall (A, B) heisst eine monoton wachsende (oder isotone) Funktion, wenn gilt $\quad x_1 \le x_2 \;\Rightarrow\; g(x_1) \le g(x_2)$.
Die Funktion G heisst konvex auf (A, B), wenn gilt

$$\forall \lambda \in [0, 1]\ \forall x_0, x_1 \in (A, B): \quad G\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \le (1-\lambda)G(x_0) + \lambda G(x_1).$$

Bemerke: Es ist bei diesen Definitionen nicht erforderlich, dass wir Genaues über den Definitionsbereich (A, B) sagen; es dürfte sich zunächst durchaus auch um die Menge der rationalen Punkte zwischen A und B handeln. Es wird sich allerdings häufig als bequem erweisen, wenn wir alle reellen Zahlen zwischen A und B in Betracht ziehen.

Sprechweise 2.4.1 (Die erweiterte reelle Achse $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.)**.**
Was den Zielbereich unserer Funktionen betrifft, so benötigen wir aber für die folgenden Konstruktionen, dass dieser tatsächlich die ordnungsvollständige reelle Achse $\mathbb{R}$ oder, noch besser, die erweiterte reelle Achse $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ist. Wir benötigen: Zu jeder Zahlenmenge $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine kleinste obere Schranke $\sup A$ und eine größte unter Schranke $\inf A$.

Lemma. *Es sei g eine isotone Funktion auf (A, B). Wir definieren dann in jedem $x \in (A, B)$ den rechtsseitigen Limes $g^r(x)$ und den linksseitigen Limes $g^\ell(x)$:*

$$g^r(x) = \inf\{g(z) : z > x\}, \qquad g^\ell(x) = \sup\{g(z) : z < x\}.$$

Es gilt dann: g^l und g^r sind isotone Funktionen mit $g^r \le g \le g^r$. Sie haben nur abzählbar viele Sprungstellen; in den übrigen Stellen gilt $g^r(x) = g(x) = g^r(x)$. Man nennt g^l die linksstetige und g^r die rechtsstetige Modifikation von g.

Zum Beweis sagen wir nur: Wenn g im Teilintervall $[a, b]$ um den Betrag M anwächst, $g(b) - g(a) = M$, dann gibt es dort höchstens $n \cdot M$ Sprünge der Höhe $\ge \frac{1}{n}$, d. h.

$$\Big|\{x : a \le x \le b,\ g^r(x) \ge g^l(x) + \tfrac{1}{n}\}\Big| \;\le\; n \cdot M.$$

Wenn wir alle n und alle $[a, b] \subset (A, B)$ zusammennehmen, dann kommen wir auf abzählbar viele Sprungstellen.

Sprechweise. Eine Funktion $G(\cdot)$ heisst unbestimmtes Integral (oder Stammfunktion) der isotonen Funktion $g(\cdot)$ auf dem Intervall (A, B), wenn gilt

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(u)\, du \quad \text{für alle} \quad [a, b] \subset (A, B).$$

In Worten: Über jedem Intervall $[a, b]$ ist die Fläche unter der Kurve g der Zuwachs der Stammfunktion.

Es ist offensichtlich, dass die Fläche unter der Kurve wohldefiniert ist, und dass sich die Stammfunktionen von $g(\cdot)$ nur um eine additive Konstante unterscheiden.

Satz 2.4.6. *Jede Stammfunktion einer isotonen Funktion* g *ist konvex. Sie ist auch Stammfunktionen der Modifikationen* g^l *und* g^r *. Jede konvexe Funktion* $G(\cdot)$ *ist die Stammfunktion einer isotonen Funktion* g*. Es gilt monotone Konvergenz*

$$\tfrac{G(x+h)-G(x)}{h} \searrow g^r(x) \quad \textit{für } h \searrow 0, \qquad \tfrac{G(x+h)-G(x)}{h} \nearrow g^\ell(x) \quad \textit{für } h \nearrow 0$$

Beweis. *Die Konvexität kann man folgendermaßen fassen (als Übung empfohlen!)*

$$\forall x_1 < x_2 < x_3 : \quad \frac{G(x_3)-G(x_2)}{x_3-x_2} \geq \frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}.$$

In unserer Situation haben wir

$$g^l(x_1) \leq \tfrac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} g(u)\ du \leq g^l(x_2) \leq g^r(x_2) \leq \tfrac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3} g(u)\ du \leq g^r(x_3).$$

Die beiden Integrale sind gerade die Differenzenquotienten. Wenn sich x_1 *von links und* x_3 *von rechts auf* x_2 *zu bewegen, dann konvergieren diese Differenzenquotienten aufsteigend nach* $g^\ell(x_2)$ *bzw. absteigend nach* $g^r(x_2)$.

Man könnte diesen Satz über die montone Konvergenz der Differenzenquotienten bei monotonem Integranden einen zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nennen. Die Lehrbücher sind sich aber nicht über die Sprachregelung nicht einig.

Anhang: Ausblicke auf 'Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung': Generalisierend (und etwas unscharf) kann man über die verschiedenen Varianten des 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung' etwa folgendes sagen: Es wird da ein Paar von Funktionenräumen identifiziert, sagen wir $\mathcal{F}^{(0)}$ und $\mathcal{F}^{(1)}$, sowie ein Paar von linearen Abbildungen, genannt 'Differentiation' und 'unbestimmte Integration'. Diese Abbildungen stellen zueinander inverse Bijektionen her zwischen den $f \in \mathcal{F}^{(0)}$ und den Äquivalenzklassen $F + \mathrm{const} \in \mathcal{F}^{(1)}/\mathbb{R}$. (Äquivalent sind die F, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden.)

$$D(\cdot):\ \mathcal{F}^{(1)}/\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^{(0)}, \qquad S(\cdot):\ \mathcal{F}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{F}^{(1)}/\mathbb{R}.$$

$D(F)$ (oder F') ergibt sich als Limes von 'Differenzenquotienten' in einem topologischen Funktionenraum; die $^\circ$Stammfunktion' $S(f)$ (oder $\int f$) gewinnt man durch 'unbestimmte Integration'. Die verschiedenen Varianten des Hauptsatzes unterscheiden sich dadurch, dass sie sich auf verschiedene Funktionenräume beziehen und auf verschieden präzisierte Konvergenz- bzw. Integralbegriffe.

Manchmal geht es auch bei den $f \in \mathcal{F}^{(0)}$ nicht wirklich um Funktionen (auf einem Intervall), sondern um Äquivalenzklassen von Funktionen (‘Gleichheit fastüberall’.)

In einer recht allgemeinen Version des Hauptsatzes sind die $F \in \mathcal{F}^{(1)}$ die sog. absolutstetigen Funktionen auf einem Intervall (A, B) und die $f \in \mathcal{F}^{(0)}$ die Äquivalenzklassen ’lokal Lebesgue-integrierbarer’ Funktionen. Es ist leider ohne ausgiebige Vorbereitungen schwerlich möglich, präzise zu beschreiben, in welchem Sinne die Differenzenquotienten einer absolutstetigen Funktion F gegen die Ableitun F' konvergieren.

Auch in der abstrakten Integrationstheorie über einem messbaren Raum gibt es den Begriffe ‘unbestimmtes Integral’ und ’ Absolutstetigkeit’. Die ‘Integranden’ heissen hier die Radon-Nikodym-Dichten. Wir können hier leider nicht einmal andeuten, wie die Konvergenzsätze aussehen, welche auf Radon-Nikodym-Dichten führen. (Ein Stichwort wäre der Martingal-Konvergenzsatz).

Für den Plan unserer Einführungsveranstaltung wollen wir festhalten: Der (ursprünglich recht unscharf formulierte) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung war für den analytischen Kalkül des 18. Jahrhunderts ein Dreh- und Angelpunkt. Die Analytiker des 19. Jahrhunderts begriffen es als eine Herausforderung, in diesem Bereich mathematische Sicherheit herzustellen. Als das geschafft war, haben sich im 20. Jahrhundert dann die Ideen der Differenzierbarkeit (insbesondere im Kontext der glatten Mannigfaltigkeiten) und die Ideen der Integration (insbesondere im Kontext der Stochastik) weit auseinanderentwickelt. Wir versuchen uns nun hier der didaktischen Herausforderung zu stellen, einerseits die wichtigsten Resultate der klassischen Theorien sichtbar zu machen, und andererseits den Bogen der mathematisch gut begründeten Verallgemeinerung soweit herauszuarbeiten, dass sich solide Grundlagen für modernere Anwendungen und für die Weiterentwicklung ergeben.

In dem Abschnitt 5 „Besondere Funktionen “, den wir hier abschliessen, haben wir uns damit begnügt, die Ideen des ‘Hauptsatzes’ auf besondere Funktionen beziehen. Wir haben ebenso wie schon im Abschnitt 2 einige spezielle (bereits im 18. Jahrhundert bekannte) Fakten ohne tiefere Begründung durch plausible Überlegungen miteinander in Verbindung gesetzt. Damit können wir uns als Mathematiker bekanntlich nicht zufrieden geben. Wir müssen uns auch der Frage stellen, wie man die analytischen Argumentationsweisen fassen muss, damit ihre Ausweitung auf allgemeinere, durch Axiome zu bestimmende Klassen von Funktionen als mathematisch gesichert gelten kann. Diesem Unternehmen dienen die im parallelen mengentheoretischen Zug unserer Veranstaltung entwickelten Begriffe und Argumentationsweisen.

Nachdem wir da noch nicht ganz den erwünschten festen Stand in den topologischen Grundlagen gewonnen haben, wollen wir uns zuerst einmal noch einen weiteren Themenkomplex vornehmen, in welchem man sich auch ohne penible analytische Grundlegung auf recht sicherem Grund fühlen darf. So wollen wir uns also mit dem geometrischen Phänomen der Konvexität auf dem n-dimensionalen ‘Anschauungraum’ $\mathbb{R}^n$ auseinandersetzen.

3 Konvexität im $\mathbb{R}^n$.

Die Differential- und Integralrechnung des 18. Jahrhunderts befasst sich nicht nur mit Kurven oder Funktionen auf einem Intervall; sie arbeitet auch mit glatten Funktionen mehrerer Variabler. Der Definitionsbereich ist da ein 'Gebiet' im $\mathbb{R}^n$. Was in der streng aufgebauten moderneren Analysis Gebiete und glatte Funktionen sind, werden wir in der Analysis II lernen, wenn wir im parallelen Zug unserer Einführung die nötigen Vorkenntnisse erarbeitet haben.

Hier wollen uns aber schon einmal mit den konvexen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ befassen, einem Typ reellwertiger Funktionen, für dessen Behandlung kein tieferes Wissen über die topologischen Eigenschaften des Raums $\mathbb{R}^n$ erforderlich ist. Wir benötigen lediglich einige Vorkenntnisse aus der elementaren analytischen Geometrie. Da nun aber heutzutage in den meisten Anfängervorlesungen zur Linearen Algebra die von uns benötigten geometrischen Aspekten zugunsten der algebraischen Aspekte nur nebensächlich behandelt werden, werden wir hier zunächst einmal die für uns wichtigsten Begriffe und Fakten kurz ansprechen.

3.1 Konvexe Mengen im reellaffinen Raum.

Definition 3.1. Ein n-dimensionaler reellaffiner Raum ist eine Menge S, auf welcher ein n-dimensionaler reeller Vektorraum V einfach transitiv wirkt. Der Vektor $v \in V$ wirkt als 'Translation' T_v. $\quad T_v: \quad S \ni P \longmapsto T_v(P) = P + v.$

Einfach transitive Wirkung bedeutet: Zu jedem Punktepaar P, Q existiert genau ein Vektor v, sodass $Q = P + v$. Man notiert auch $v = Q - P$.

Beispiel. Der Prototyp eines n-dimensionalen reellaffinen Raums ist bekanntlich der Raum $S = \mathbb{R}^n_{Sp}$ der reellen n-Spalten. Seine Punkte $P, Q, R, \ldots$ werden Ortsvektoren genannt. Die Verschiebungsvektoren $v \in V$ werden ebenfalls durch n-Spalten dargestellt. Sie werden manchmal kontravariante Vektoren genannt, zur Unterscheidung von den covarianten Vektoren, welche die Linearformen beschreiben; die covarianten Vektoren werden durch Zeilen dargestellt. $V^* = \mathbb{R}^n_Z$.

Definition 3.2. (Verbindungsgerade und Verbindungsstrecke)
Für jedes Punktepaar (P, Q) mit $P \neq Q$ definiert man die Verbindungsgerade als die Punktemenge

$$\{R : R = (1-\lambda)P + \lambda Q, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\} = \{R : R = P + \lambda \cdot (Q - P), \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Die Verbindungsstrecke ist die Punktemenge

$$\{R : R = (1-\lambda)P + \lambda Q, \text{ mit } \lambda \in [0,1]\}.$$

Definition 3.3. Ein affiner Teilraum S' des affinen Raums (S, V) ist eine nichtleere Teilmenge, welche mit je zwei Punkten P, Q auch die gesamte Verbindungsgerade enthält. Die einpunktigen Mengen nennt man auch die nulldimensionalen affinen Teilräume.

Wir stellen fest: Ein affiner Teilraum S' ist selbst ein affiner Raum. Zu jedem affinen Teilraum S' gibt es einen Teilvektorraum $V' \subset V$, welcher einfach transitiv auf S' wirkt; man nennt ihn den Tangentialraum des affinen Teilraums S'. Wenn er k-dimensional ist, nennt man S' einen k-dimensionalen affinen Teilraum.

In diesem Sinn ist dann also die Verbindungsgerade von P und Q ein eindimensionaler affiner Teilraum, dessen Tangentialraum von dem Vektor $v = Q - P$ aufgespannt wird.

Satz 3.1.1 (Affine Hülle)**.**
Zu jeder Teilmenge B des affinen Raums (S, V) gibt es einen kleinsten B umfassenden affinen Teilraum. Man nennt ihn die affine Hülle von B und bezeichnet ihn mit aff B. Es gilt

$$\textit{aff}\, B = \Big\{R : R = \sum_j \lambda_j \cdot P_j,\ \textit{mit}\, P_j \in B, \quad \sum \lambda_j = 1\Big\}.$$

Sprechweise 3.1.1 (Affine Unabhängigkeit)**.** Von einem $(m+1)$-Tupel von Punkten in einem affinen Raum (S, V) sagt man, es sei affin unabhängig, wenn die affine Hülle die Dimension m hat. Man sagt in diesem Fall auch, dass sich die Punkte in allgemeiner Lage befinden.

Satz 3.1.2. *Wenn das $(m+1)$-Tupel $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ affin unabhängig ist, dann gibt es für jeden Punkt P der affinen Hülle genau eine Darstellung*

$$P = \lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \cdots + \lambda_m \cdot P_m, \quad \sum_0^m \lambda_j = 1.$$

Das Tupel der Koeffizienten $\{\lambda_j;\ j = 0, 1, \dots, m\}$ heisst das Tupel der affinen Koordinaten von P bzgl. der affinen Basis $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$. Jeder Vektor v im Tangentialraum von aff$\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ besitzt in diesem Falle genau eine Darstellung

$$v = \lambda_1 \cdot (P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_m \cdot (P_m - P_0) \quad = \sum_0^m \lambda_j \cdot P_j \quad \text{mit} \quad \lambda_0 = 1 - \sum_1^m \lambda_j.$$

Satz 3.1.3 (Existenz einer affinen Basis)**.**
Es sei B eine Menge in einem affinen Raum (S, V), deren affine Hülle die Dimension m hat. Dann existiert in B ein affin unabhängiges $(m+1)$-Tupel. Und für jedes affin unabhängige $(m+1)$-Tupel in B ist die affine Hülle gleich der affinen Hülle von B.

Konvexe Mengen

Definition 3.4. Eine Teilmenge K eines affinen Raums (S, V) heisst eine konvexe Menge, wenn mit je zwei Punkten auch die gesamte Verbindungsstrecke zu K gehört, d. h. wenn gilt

$$\forall P, Q \in K\, \forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)P + \lambda Q \in K.$$

Satz 3.1.4 (Konvexe Hülle).
Zu jeder Teilmenge des affinen Raums (S, V) gibt es eine kleinste B umfassende konvexe Menge. Man nennt die die konvexe Hülle von B und bezeichnet sie mit conv B. Es gilt

$$\text{conv}\, B = \Big\{P : P = \sum_j \lambda_j \cdot P_j,\ \textit{mit}\ P_j \in B, \quad \lambda_j \geq 0\ \textit{für alle}\ J\ \ \textit{und} \sum \lambda_j = 1\Big\}.$$

Sprechweise 3.1.2. Wenn das $(m+1)$-Tupel $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ affin unabhängig ist, dann nennt man die konvexe Hülle das m-dimensionale Simplex mit den Extremalpunkten $P_0, P_1, \ldots, P_m$.

Satz 3.1.5 ('Satz von Radon'). *Es seien $P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}$ Punkte in einem n-dimensionalen affinen Raum. Es existiert dann eine Partition der Indexmenge $\{0, 1, \ldots, n+1\} = J_+ \cup J_-$ sodass conv $\{P_j : j \in J_+\} \cap$ conv $\{P_j : j \in J_-\} \neq \emptyset$.*

Beweis. *Die Verschiebungsvektoren $P_1 - P_0, \ldots, P_{n+1} - P_0$ sind linear abhängig. $\sum_1^{m+1} \lambda_j(P_j - P_0) = 0$. Wir setzen $\lambda_0 = -\sum_1^{m+1} \lambda_j$ sowie $J_+ = \{j : \lambda_j < 0\}$, $J_- = \{j : \lambda_j \leq 0\}$. Es gilt $\sum_0^{m+1} \lambda_j = 0$, und wir können o. B. d. A. annehmen $\sum_0^{m+1} |\lambda_j| = 2$. Wir gewinnen einen Punkt $P^* = \sum_{J_+} \lambda_j P_j = \sum_{J_-} (-\lambda_j) P_j$ im Durchschnitt der beiden konvexen Hüllen.*

Beispiel. Es seien vier Punkte im 2-dimensionalen Anschauungsraum gegeben, der Übersichtlichkeit halber keine drei auf einer Geraden. Offenbar liegt dann entweder einer der Punkte in der konvexen Hülle der übrigen drei; oder die vier Punkte sind die Ecken eines konvexen Vierecks. Im zweiten Fall liegt der Schnittpunkt der Diagonalen im gesuchten nichtleeren Durchschnitt.

Satz 3.1.6 ('Satz von Caratheodory'). *Es sei B eine Menge in einem n-dimensionalen affinen Raums (S, V). Zu jedem Punkt P der konvexen Hülle $K =$ conv B existiert dann ein $(n+1)$-Tupel in B, dessen konvexe Hülle den Punkt P enthält.*

Beweis. *Es genügt zu zeigen, dass man für einen Punkt P mit der Darstellung*

$$P = \sum_0^{m+1} \lambda_j \cdot P_j, \qquad \textit{mit}\ P_j \in B, \quad \lambda_j \geq 0\ \textit{für alle}\ j\ \ \textit{und} \sum \lambda_j = 1$$

auch eine 'verkürzte' Darstellung finden kann

$$P = \sum_0^{m+1} \mu_j \cdot P_j,\ \textit{mit}\ P_j \in B, \quad \mu_j \geq 0\ \textit{für alle}\ j\ \ \textit{und} \sum \mu_j = 1,\ \textit{mindestens ein}\ \mu_j = 0$$

Zu diesem Zweck beachten wir, dass die Vektoren $v_j = P_j - P_0,\ j = 1, 2, \ldots, m+1$ *linear abhängig sind. Wie im Beweis oben* $\sum_1^{m+1} a_j \cdot v_j = 0, \quad \sum_0^{m+1} a_j \cdot P_j = 0$ *mit* $\sum_0^{m+1} a_j = 0$. *Für jedes* t *erhalten wir eine Darstellung* $P = \sum_0^{m+1}(\lambda_j + t \cdot a_j) \cdot P_j$. *Für kleine* $t > 0$ *sind die Koeffizienten allesamt positiv. Wenn wir* t *wachsen lassen, dann erhalten für ein* t_0 *eine Darstellung, in welcher (mindestens) ein Koffizient verschwindet.*

Satz 3.1.7 ('Satz von Helly'). *Es sei* $\{K_j : j \in J\}$ *eine endliche Familie von konvexen Mengen in einem* n*-dimensionalen affinen Raums* $\big(S, V\big)$. *Wenn je* $n+1$ *dieser konvexen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt haben, dann gilt* $\bigcap_J K_j \neq \emptyset$.

Beweis. *Im Falle* $|J| = n + 1$ *ist nichts zu beweisen. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach der Mächtigkeit* $m = |J|$. *Wenn wir (für* $m \geq n+1$*) die Richtigkeit der Aussage für beliebige* m*-Tupel konvexer Mengen annehmen, dann schliessen wir für das* $m+1$*-Tupel* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ *folgendermaßen:*
In jedem Durchschnitt $\tilde{K}_k = \bigcap_{j \neq k} K_j$ *wählen wir einen Punkt* P_k *(*$k = 0, 1, \ldots, m$*). Die Anzahl ist* $m + 1 \geq n + 2$*; der Satz von Radon liefert eine Partition der Indexmenge, sodass conv* $\{P_j : j \in J_+\} \cap$ *conv* $\{P_j : j \in J_-\} \neq \emptyset$. *Es sei* P^* *ein Punkt in diesem Durchschnitt. Die Konstruktion der* P_j *garantiert* $P_j \in K_- = \bigcap_{j \in J_-} K_j$ *für alle* $j \in J_+$ *und wegen der Konvexität conv* $\{P_j : j \in J_+\} \subseteq K_-$*; inbesondere* $P^* \in K_-$. *In derselben Weise ergibt sich* $P^* \in K_+ = \bigcap_{j \in J_+} K_j$, *und somit* $P^* \in K_- \cap K_+ = \bigcap_0^{m+1} K_j$.

3.2 Offene und abgeschlossene konvexe Mengen

Dieser Unterabschnitt kann sowohl als Beispielmaterial zum Kapitel Stetigkeit und Halbstetigkeit verstanden werden, als auch als Vorbereitung auf die folgenden tieferliegenden Aussagen über konvexe Mengen und konvexe Funktionen.

Für einen endlichdimensionalen affinen Raum (S, V) ist klar, was die offenen und was die abgeschlossenen Mengen sind. Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge B bezeichnen wir mit cl B. ('closure of B'). Es ist auch klar, was die (folgen)-kompakten Teilmengen sind; wir werden uns gelegentlich auch des bekannten Kompaktheitskriteriums bedienen: Eine Teilmenge ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist. Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von konvexen Mengen ist eine konvexe Menge, wenn er nicht leer ist. Der Durchschnitt abgeschlossener konvexer Mengen ist abgeschlossen und konvex, wenn er nicht leer ist.

Sprechweise 3.2.1 (Die abgeschlossene konvexe Hülle clc)**.**
Zu jeder Teilmenge B des affinen Raums (S, V) gibt es eine kleinste abgeschlossene konvexe Obermenge. Sie heisst die abgeschlossene konvexe Hülle und wird (im Folgenden) mit clc B bezeichnet.

Satz 3.2.1. *Die abgeschlossene Hülle einer konvexen Menge ist konvex. Die konvexe Hülle einer kompakten Menge ist kompakt. Die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge ist nicht notwedigerweise abgeschlossen.*

Beweis.

1) Sei K eine konvexe Menge und P^*, Q^* zwei Punkte in cl K. Wir wählen konvergente K-Folgen $P_n \to P^*, \quad Q_n \to Q^*$. Für jedes $\lambda \in [0, 1]$ erhalten wir eine konvergente Folge $(1-\lambda)P_n + \lambda Q_n \to (1-\lambda)P^* + \lambda Q^* \in cl K$. cl K ist also konvex.

2) Es sei B eine kompakte Menge in einem m-dimensionalen affinen Raum, und $K = conv\ B$ die konvexe Hülle. Wir zeigen, dass es zu jeder Folge in K eine konvergente Teilfolge gibt mit Limespunkt in K. Die Punkte $P^{(n)}$ der gegebenen Folge haben nach dem Satz von Caratheodory eine Darstellung $P^{(n)} = \sum_0^m \lambda_j^{(n)} P_j^{(n)}$ mit $P_j^{(n)} \in B$ und $\lambda_j^{(n)} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^m \lambda_j^{(n)} = 1$ für jedes n. Es gibt eine Teilfolge, entlang der für alle $j \in \{0, 1, \ldots m\}$ die Folgen $P_j^{(n)}$ und $\lambda_j^{(n)}$ konvergieren. Der Limespunkt der Punktfolge entlang dieser Teilfolge ist eine konvexe Kombination von Punkten in B, also ein Punkt von K.

3) Man denke im zweidimensionalen Raum an die abgeschlossene Menge, die aus einer Geraden G und einem nicht darin enthaltenen Punkt P^* besteht. Die konvexe Hülle ist, grob gesprochen, ein Streifen. Von der zur Geraden G parallelen Geraden durch P^* gehört jedoch nur der Punkt P^* selbst zur konvexen Hülle.

Sprechweise 3.2.2 (Das relative Innere rint)**.** Es sei B eine Punktmenge in einem affinen Raum (S, V), welche mindestens zwei Punkte enthält. Wir betrachten B als Teilmenge des affinen Teilraums $S' = \text{aff } B$, und nennen den offenen Kern das relative Innere von B, bezeichnet mit rint$B$. ('relative interior' im Englischen.)

Satz 3.2.2. *Eine konvexe Punktmenge* K *mit mindestens zwei Punkten hat ein nichtleeres relatives Inneres rint* K. *Diese Menge ist konvex und ihre abgeschlossene Hülle umfasst* K.

Beweis. *Wenn die affine Hülle von* K *die Dimenson* m *hat, dann gibt es in* K $m+1$ *affin unabhängige Punkte. Das Simplex mit diesen Extremalpunkten, aufgefasst als Teilmenge des affinen Raums aff*K *besitzt innere Punkte. Die Menge rint* K *ist die Vereinigung der rint's dieser Simplizes. Die Extremalpunkte der Simplizes liegen in der abgeschlossenen Hülle von rint* K. *Zu jedem Punkt* $P \in K$ *gibt es eine* m*-Tupel in* K, *sodass* P *zusammen mit diesem* m*-Tupel affin unabhängig ist. Alle Elemente der abgeschlossenen Hülle von* K *lassen sich somit als Grenzwerte von Folgen in rint* K *gewinnen.*

Sprechweise 3.2.3 (Minkowski-Funktional)**.**
Eine nichtnegative Funktion $F(\cdot)$ auf einem reellen Vektorraum V heisst ein Minkowski-Funktional, wenn gilt

(i) $F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$ für alle $\alpha \geq 0, \quad v \in V.$ ('positive Homogenität')

(ii) $F(v + w) \leq F(v) + F(w)$ für alle $v, w \in V.$ ('Subadditivität')

Man nennt die Minkowski-Funktionale auch die nichtnegativen sublinearen Funktionen, oder die nichtnegativen positivhomogenen konvexen Funktionen auf dem reellen Vektorraum V.

Bemerke: Zu jeder konvexen Menge K im Vektorraum V, welche den Nullpunkt im Inneren enthält, ist die Funktion $v \mapsto \inf\{r > 0 : \frac{1}{r}v \in K\}$ das eindeutig bestimmte Minkowski-Funktional $F(\cdot)$ mit $\{v : F(v) \leq 1\} = \mathrm{cl}\, K$. Man nennt diese Funktion daher auch das Minkowski-Funktional zur konvexen Nullumgebung K. Man bemerke auch: Für ein $\tilde{v} \neq 0$ gilt $F(\tilde{v}) > 0$ genau dann, wenn die Halbgerade mit der Richtung $\tilde{v}$ den Rand von K trifft.

Besonders wichtig sind die Minkowski-Funktionale zu beschränkten symmetrischen K. Ein solches Minkowski-Funktional heisst eine Norm, die Norm zur Einheitskugel K.

Beispiel.

1. Im Vektorraum $\mathbb{R}^m$ sei $\{(x_1, \ldots, x_m) : \quad \sum x_i^2 \leq R^2\}$. Das Minkowski-Funktional dazu ist $F(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{R}\sqrt{\sum x_i^2}$.
   Ist $p \geq 1$, so ist $K^{(p)} = \{(x_1, \ldots, x_m) : \quad \sum |x_i|^p \leq 1\}$ eine konvexe Nullumgebung und das dazugehörige Minkowski-Funktional ist $\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$. Dies ist die endlichdimensionale Version der in der Funktionalanalysis gutbekannten p-ten Minkowski-Norm.

2. Im Raum $\mathbb{R}^2$ sei $K_P = \{(y, x) : \quad 2y \geq x^2 - 1\}$. (Es handelt sich offenbar um den 'Epigraphen' einer konvexen Parabel, welcher den Nullpunkt im Inneren enthält.) Das Minkowski-Funktional ist die Funktion $F(y, x) = -y + \sqrt{y^2 + x^2}$; denn
   $$(\tfrac{1}{r}y, \tfrac{1}{r}x) \in \partial K \Rightarrow 2\tfrac{1}{r}y = (\tfrac{1}{r}x)^2 - 1 \Rightarrow r^2 + 2ry = x^2 \Rightarrow r = -y + \sqrt{y^2 + x^2}.$$
   Das Minkowski-Funktional verschwindet auf dem Strahl $\{(x, y) : x = 0, y \geq 0\}$.

3. Betrachten wir auch noch den Epigraphen zu einer Hyperbel
Für $K_H = \{(y, x): \quad y \geq -\sqrt{2} + \sqrt{1 + x^2}\}$. suchen wir $r > 0$, sodass

$$\tfrac{1}{r} y = -\sqrt{2} + \sqrt{1 + (\tfrac{1}{r} x)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad y + \sqrt{2} r = \sqrt{r^2 + x^2}$$
$$\Longrightarrow \qquad y^2 + 2\sqrt{2} r y + 2r^2 = r^2 + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad r + \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es gilt $F(y, x) = 0$ auf dem Kegel $\{(x, y) : |x| \leq y, y \geq 0\}$ und sonst $F(y, x) = -\sqrt{2} \cdot y + \sqrt{y^2 + x^2}$.

Die Minkowski-Funktionale sind Funktionen auf reellen Vektorräume. Wir wenden uns jetzt den konvexen Funktionen auf reellaffinen Räumen zu. Wir beginnen mit den Distanzfunktionen. Aus dem eben Bewiesenen folgt sofort

Satz 3.2.3. *Es sei* $\big(S, V\big)$ *ein endlichdimensionaler reellaffiner Raum, und* K *eine konvexe Teilmenge. Wenn* P^* *ein innerer Punkt von* K *ist, dann existiert genau eine nichtnegative Funktion* $m_{(K,P^*)}(\cdot)$, *sodass gilt*

- $m_{(K,P^*)}(P) < 1$ *für* P *im Inneren von* K, $\qquad m_{(K,P^*)}(P) > 1$ *für* $P \notin cl\, K$.
- *Die Funktion* $V \ni v \mapsto m_{(K,P^*)}(P^* + v)$ *ist positivhomogen und subadditiv.*

Man nennt diese Funktion die Distanzfunktion für K in Bezug auf P^*. Die Konstruktion wird auch verallgemeinert auf allgemeinere Situationen.

Sprechweise. Es sei K eine konvexe Menge in einem reelaffinen Raum $\big(S, V\big)$, welche mindestens zwei Punkte enthält, also ein nichtleeres relatives Inneres besitzt. Für jedes $P^* \in \operatorname{rint} K$ definiert man dann die Distanzfunktion in Bezug auf P^*:

$$m_{(K,P^*)}(P) = m_{(K,P^*)}(P^* + v) = \begin{cases} \inf\{r > 0 : \; P^* + \tfrac{1}{r} v \in K\} & \text{wenn} \quad P \in \operatorname{rint} K, \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

es handelt sich um eine unterhalbstetige konvexe Funktion im Sinne der folgenden

Definition 3.5. Eine Funktion $k(\cdot)$ auf einem reellaffinen Raum S mit Werten in $\mathbb{R} \cup +\infty$ heisst eine unterhalbstetige konvexe Funktion, wenn gilt

$$\forall P, \, Q \, \forall \lambda \in [0, 1] \quad k\big((1 - \lambda) P + \lambda Q\big) \leq (1 - \lambda) k(P) + \lambda k(Q),$$

Sie heisst unterhalbstetig, wenn gilt $\forall M : \{P : \; k(P) > M\}$ offen.

Hinweis: Viele Lehrbücher sprechen von konvexen Funktionen auf konvexen Definitionsbereichen. Diese Funktionen sind dann reellwertige Funktion; der Wert $+\infty$ wird nicht zugelassen. Wir finden das unpraktisch. Wir bemerken, dass für unsere konvexen Funktionen $k(\cdot)$ der 'Endlichkeitsbereich' $\{P : \; k(P) \leq +\infty\}$ eine konvexe Menge ist.

Satz 3.2.4. *Eine Funktion auf dem affinen Raum* S *ist genau dann konvex, wenn ihr 'Epigraph' im affinen Raum* $\mathbb{R} \times \mathsf{S}$ *eine konvexe Menge ist.*

Sie ist genau dann unterhalbstetig konvex, wenn der Epigraph eine abgeschlossene konvexe Menge ist.

Beweis. *Der Epigraph ist die Menge* $\mathsf{E}_k = \{(y, P) : \ y \geq k(P)\} \subset \mathbb{R} \times \mathsf{S}$. *Es seien* (y_1, P_1) *und* (y_2, P_2) *Punkte im Epigraphen der Funktion* $k(\cdot)$. *Die Verbindungsstrecke besteht aus den Punkten* $\big((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2,\ (1-\lambda)P_1 + \lambda P_2\big)$ *mit* $\lambda, \in [0,1]$. *Das Weitere liegt auf der Hand.*

Mit den Epigraphen unterhalbstetiger Funktionen auf topologischen Räumen werden wir später in allgemeiner Zusammenhängen näher beschäftigen. Hier diskutieren wir schon einmal das Verhalten einer unterhalbstetigen konvexen Funktion in den Randpunkten ihres Endlichkeitsbereichs. Unterhalbstetigkeit im Punkt P^* *bedeutet bekanntlich* $k(P^*) \leq \liminf k(P_n)$ *für jede gegen* P^* *konvergierende Folge. Betrachten wir beispielsweise* $k(\cdot)$ *auf einer Geraden durch* P^*, *die den Endlichkeitsbereich noch in weiteren Punkte schneidet. Die Konvexität zusammen mit der Unterhalbstetigkeit garantiert, dass die Folge der Funktionswerte auf diesem Weg gegen* $k(P^*)$ *konvergiert.*

Satz 3.2.5. *Wenn* $\{k_\alpha : \ \alpha \in I\}$ *eine Familie unterhalbstetiger konvexer Funktionen ist, dann ist auch das punktweise Supremum* $k = \sup_\alpha k_\alpha$ *unterhalbstetig konvex.*

Beweis. *Hier muss auch der Fall zugelassen werden, dass* k *identisch* $= +\infty$ *ist, wo also der Epigraph die leere Menge ist. Der Epigraph von* k *ist der Durchschnitt der Epigraphen, und der Durchschnitt abgeschlossener konvexer Mengen ist bekanntlich abgeschlossen und konvex. Man notiert übrigens auch* $k = \bigvee_{\alpha \in I} k_\alpha$.

Beispiel. Es sei K eine abgeschlossene konvexe Menge in S. Wir definieren dazu die Funktion $O_K(\cdot)$, die auf K den Wert 0, und sonst überall den Wert $+\infty$ hat. Sie ist unterhalbstetig und konvex. Wenn $k(\cdot)$ irgendeine unterhalbstetige konvexe Funktion ist, dann ist das Maximum $k \vee O_K$ eine unterhalbstetige konvexe Funktion.

3.3 Distanzfunktionen und Stützfunktionen.

Ein wichtiger Typ von Funktionen auf einem (endlichdimensionalen) affinen Raum (S, V) sind die affinen Funktionen. Eine reellwertige Funktion $a:\ S \ni P \mapsto a(P) \in \mathbb{R}$ heisst eine affine Funktion, wenn sowohl a als auch $-a$ konvex ist. Das bedeutet

$$a\big((1-\lambda)P + \lambda Q\big) = (1-\lambda)a(P) + \lambda a(Q) \quad \text{für alle } P, Q \text{ und alle reellen } \lambda.$$

Neben dem Begriff der affinen Funktion werden wir gelegentlich auch den Begriff der affinen Abbildung benötigen.

Definition 3.6 (Affine Abbildung)**.**
Es seien (S, V) und (T, W) endlichdimensionale reellaffine Räume.
Eine Abbildung $\varphi:\ S \longrightarrow T$ heisst eine affine Abbildung, wenn gilt

$$\forall P, Q \in S\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi\big((1-\lambda)P + \lambda Q\big) = (1-\lambda)\varphi(P) + \lambda\varphi(Q),$$

wenn also jede Gerade in eine Gerade (oder auf eine auf einen Punkt degenerierte Gerade) abgebildet wird.

Zu jeder affinen Abbildung $\varphi:\ S \longrightarrow T$ gehört eine lineare Abbildung $d\varphi:\ V \longrightarrow W$ der Tangentialräume.

$$d\varphi: \quad V \ni v \longmapsto \langle d\varphi, v\rangle = \varphi(P^* + v) - \varphi(P^*) \in W.$$

Hier kann P^* beliebig gewählt werden, und $\langle d\varphi, \cdot\rangle$ ist wirklich eine lineare Abbildung. Wir bemerken nämlich

$$\varphi(P^* + \lambda v) = \varphi\big((1-\lambda)P^* + \lambda P\big) = (1-\lambda)\varphi(P^*) + \lambda\varphi(P) = \varphi(P^*) + \lambda\langle d\varphi, v\rangle,$$
$$\varphi(P^* + u + v) - \varphi(P^*) = \langle d\varphi, u + v\rangle = \langle d\varphi, u\rangle + \langle d\varphi, v\rangle$$

Beispiel. Wir betrachten $S = \mathbb{R}^n$ und $T = \mathbb{R}^m$ als affine Räume. Die Tangentialvektoren notieren wir als Spalten. Eine affine Abbildung φ liefert eine lineare Abbildung $d\varphi$: $\mathbb{R}^n_{Sp} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{Sp}$, die man durch eine $m \times n$-Matrix A darstellt: $v \mapsto A \cdot v$. Die affine Abbildung ist bestimmt, wenn man die lineare Abbildung und für irgendeinen Punkt P^* den Bildpunkt $\varphi(P^*)$ kennt. $\varphi(P^* + v) = \varphi(P^*) + A \cdot v$.

Wir kehren zu den affinen Funktionen zurück. Zu jeder affinen Funktion a auf dem affinen Raum (S, V) gehört eine Linearform auf V, also ein Element des Dualraums V^*; man nennt sie den Gradienten der Funktion $a(\cdot)$ oder auch den Anstieg von $a(\cdot)$.

Wenn wir an $\mathbb{R}^n$ als den Prototyp eines n-dimensionalen reellen affinen Raums denken, dann sehen wir die Punkte $P \in S$ und die Vektoren $v \in V$ als n-Spalten und die Linearformen als Zeilen.

Wir notieren die Linearformen mittels griechischer Kleinbuchstaben wie θ, η, oder auch $\langle\theta, \cdot\rangle$, $\langle\eta, \cdot\rangle$. Die zur affinen Funktion a gehörende Linearform wird vorzugsweise mit $\langle da, \cdot\rangle$ bezeichnet.

Offene konvexe Mengen und Distanzfunktionen
Jede nichtkonstante affine Funktion auf S partitioniert den affinen Raum S in zwei konvexe Mengen, eine offene und eine abgeschlossene konvexe Menge:

$$\mathsf{S} = \{\mathsf{P} : \alpha(\mathsf{P}) < 0\} \cup \{\mathsf{P} : \alpha(\mathsf{P}) \geq 0\}.$$

Das Phänomen, welches wir in diesem Unterabschnitt verfolgen wollen, ist der

Satz 3.3.1 (Der fundamentale lineare Trennungssatz)**.**
Sind K_0 und K_1 disjunkte konvexe Mengen, K_0 offen, dann existiert eine affine Funktion α, die negativ ist auf K_0 und nichtnegativ auf K_1, (und dann übrigens auch auf der abgeschlossenen Hülle cl K_1.)

Wir sagen in diesem Fall, dass α die offene Menge K_0 von K_1 trennt. Bevor wir diesen Trennungssatz beweisen, diskutieren wir einige Konsequenzen und Spezialfälle.

Lemma (Das elementareTrennungslemma)**.**
Ist K eine offene konvexe Menge in einem Vektorraum, welche den Nullpunkt nicht enthält, dann existiert eine Linearform θ mit $\langle\theta, \nu\rangle < 0$ für alle $\nu \in \mathsf{K}$.

Wir zeigen, wie man den fundamentalen Trennungssatz aus diesem anscheinend schwächeren Trennungslemma herleitet.

Beweis (Zurückführung des fundamentalen Trennungssatzes auf das Lemma)**.**
Seien $\mathsf{K}_0, \mathsf{K}_1$ wie im fundamentalen Trennungssatz; und sei

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_0 - \mathsf{K}_1 = \{\nu : \nu = \mathsf{P} - \mathsf{Q} \text{ mit } \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0,\ \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1\}.$$

Offenbar ist K eine offene konvexe Menge in V, welche den Nullpunkt nicht enthält. Sei nun θ eine Linearform, wie sie im Satz für K garantiert wird. Wir suchen eine affine Funktion α mit dem Anstieg $d\alpha = \theta$, die das im fundamentalen Trennungssatz Gewünschte leistet. Ist α eine affine Funktion mit $d\alpha = \theta$, so gilt wegen $0 > \langle d\alpha, \nu\rangle$ für alle $\nu \in \mathsf{K}_0 - \mathsf{K}_1$

$$\begin{aligned} 0 \geq \sup\left\{\langle d\alpha, \nu\rangle : \nu = \mathsf{P} - \mathsf{Q},\, \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0, \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1\right\} &= \sup\left\{\alpha(\mathsf{P}) - \alpha(\mathsf{Q}) : \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0, \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1\right\} \\ &= \sup\left\{\alpha(\mathsf{P}) : \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0\right\} - \inf\left\{\alpha(\mathsf{Q}) : \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1\right\} \end{aligned}$$

Wir setzen $\mathsf{c} = \sup\left\{\alpha(\mathsf{P}) : \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0\right\}$ *und haben* $\inf\left\{\alpha(\mathsf{Q}) : \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1\right\} \geq \mathsf{c}$. *Somit*

$$\alpha(\mathsf{P}) - \mathsf{c} \leq 0 \quad \text{für alle } \mathsf{P} \in \mathsf{K}_0, \qquad \alpha(\mathsf{Q}) - \mathsf{c} \geq 0 \quad \text{für alle } \mathsf{Q} \in \mathsf{K}_1.$$

Da nun aber K_0 offen ist, liegt K_0 im offenen Kern des Halbraums; also gilt $\alpha(\mathsf{P}) - \mathsf{c} < 0$ für alle $\mathsf{P} \in \mathsf{K}_0$. Die affine Funktion $\alpha(\cdot) - \mathsf{c}$ *trennt K_0 von K_1.*

Beachte: Wir haben weder den Trennungssatz noch das Lemma bewiesen. Wir haben bisher nur gezeigt, wie man den Satz, der sich affine Funktionen bezieht, herleiten kann aus dem scheinbar schwächeren elementaren Trennungslemma, welches sich auf Linearformen bezieht.

In manchen elementaren Lehrbüchern gibt man sich mit der Trennung disjunkter kompakter Mengen zufrieden. Mit dem (übrigens sehr einfachen) Beweis dieser Trennbarkeit wollen wir uns nicht aufhalten; er passt nicht gut in die hier verfolgte Linie.

Satz 3.3.2 (Verschärfung des Trennungslemma)**.**
Es sei K *eine offene konvexe Menge in einem affinen Raum und* $\tilde{\mathsf{L}}$ *ein Teilvektorraum, der* K *nicht trifft. Dann existiert eine Hyperebene, die* $\tilde{\mathsf{L}}$ *enthält und* K *nicht trifft.*

Anschaulicher Beweis für den einfachsten Spezialfall: Im zweidimensionalen Anschauungsraum sei eine offene konvexe Menge K gegeben und ein Punkt P ausserhalb. Es wird behauptet, dass eine Gerade durch P existiert, welche K nicht trifft. In der Tat: wenn man eine Gerade durch P nach und nach um 360° dreht, dann trifft man manchmal mit der linken 'Halbgeraden' die Menge K und dann wieder mit der rechten Halbgeraden. Dazwischen gibt es einen Winkel, für welchen die Gerade K überhaupt nicht trifft, denn wegen der Konvexität von K kann es keine Stellung geben, in welcher beide Halbgeraden die konvexe Menge K treffen.

Sprechweise 3.3.1 (Stützhyperebene)**.** Wenn der Punkt P auf dem Rand der offenen konvexen Menge K liegt, und H eine Hyperebene durch P ist, die K nicht trifft, dann heisst H eine Stützhyperebene durch den Punkt P.

Der Satz verschärft wirklich das elementare Trennungslemma. Er besagt nämlich nicht nur, dass es durch jeden Punkt ausserhalb der offenen konvexen Menge K eine Hyperebene gibt, welche K nicht trifft. Man kann eine K nicht treffende Hyperebene durch jeden vorgegebenen affinen Teilraum $\tilde{\mathsf{L}} \ni \mathsf{P}$ mit $\tilde{\mathsf{L}} \cap \mathsf{K} = \emptyset$ legen.

Wenn man den Satz beweisen will, kann man sich offenbar auf den Fall einer offenen konvexen Nullumgebung K in einem Vektorraum beschränken. Zu K konstruieren wir das Minkowski-Funktional $m_{\mathsf{K}}(\cdot)$, d. h. die Distanzfunktion in Bezug auf den Nullpunkt. Jeder den Nullpunkt nicht enthaltende abgeschlossene Halbraum kann in eindeutiger Weise durch eine Linearform beschrieben werden: $\{v : \langle\theta,\cdot\rangle \geq 1\}$. Es gilt $\{v : \langle\theta,\cdot\rangle \geq 1\} \cap \mathsf{K} = \emptyset$ (oder $\{v : \langle\theta,\cdot\rangle < 1\} \supseteq \mathsf{K}$) genau dann, wenn $\langle\theta,\cdot\rangle \leq m_{\mathsf{K}}(\cdot)$. In dieser Übersetzung nimmt der Satz die folgende Form an.

Satz 3.3.3 (Der fundamentale Fortsetzungssatz)**.**
Es sei $\mathsf{F}(\cdot)$ *ein Minkowski-Funktional auf dem Vektorraum* V *und* $\tilde{\ell}(\cdot)$ *eine auf einem Teilvektorraum* W *definierte Linearform mit* $\tilde{\ell}(v) \leq \mathsf{F}(v)$ *für* $v \in \tilde{\mathsf{V}}$*. Es existiert dann eine Fortsetzung zu einer Linearform* $\ell(\cdot)$ *auf dem Gesamtraum mit* $\ell(v) \leq \mathsf{F}(v)$ *für alle* $v \in \mathsf{V}$*.*

Beweis (durch vollständige Induktion nach der Dimension des Teilraums).
Es sei $\tilde{\ell}(\cdot)$ *unter* $F(\cdot)$ *auf dem* m*-dimensionalen Raum* W *und* $v^* \notin W$*. Eine Linearform* $\ell(\cdot)$ *auf* $W \oplus [v^*]$*, welche* $\tilde{\ell}(\cdot)$ *fortsetzt, ist durch den Wert* $\beta^* = \ell(v^*)$ *bestimmt. Wegen* $\ell(w + \lambda v^*) = \ell(w) + \lambda\beta^*$ *und der positiven Homogenität von* $F(\cdot)$ *bedeutet* $\ell(\cdot) \leq F(\cdot)$

$$\begin{aligned} \ell(w+v^*) = \ell(w) + \beta^* \quad &\leq \quad F(w+v^*) \quad \textit{für alle } w \in W \quad \textit{und weiter} \\ \ell(u-v^*) = \ell(u) - \beta^* \quad &\leq \quad F(u-v^*) \quad \textit{für alle } u \in W, \quad \textit{d. h. also} \\ \sup\big\{-F(u-v^*) + \ell(u) :\ u \in W\big\} \quad \leq \quad \beta^* &\leq \quad \inf\big\{F(w+v^*) - \ell(w) :\ w \in W\big\}. \end{aligned}$$

Die beiden Ungleichungen für die Zahl β^* *sind erfüllbar; denn es gilt für alle* $u, w \in W$

$$\ell(u) + \ell(w) = \ell(u+w) \leq F(u+w) = F(u - v^* + v^* + w) \leq F(u - v^*) + F(w + v^*).$$

Mit einem solchen $\beta^* = \ell(v^*)$ *erhalten wir also eine Fortsetzung der gewünschten Art.*

Hinweis: Ein verallgemeinerter Fortsetzungssatz dieser Art ist bekannt unter Namen ‘Fortsetzungssatz von Hahn-Banach’. Er spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der unendlichdimensionalen Banachräume. Der Satz garantiert u.a., dass es auf einem vollständigen normierten Vektorraum (‘Banachraum’) viele stetige Linearformen gibt.

Abgeschlossene konvexe Mengen und ihre Stützfunktionen.
Die einfachsten abgeschlossenen konvexen Mengen in einem affinen Raum (S, V) sind die abgeschlossenen Halbräume. Mit der nichtkonstanten affinen Funktion $a(\cdot)$ assoziieren den abgeschlossenen Halbraum $\{P :\ a(P) \leq 0\}$. (Man bemerke, dass zwei affine Funktionen genau dann denselben abgeschlossenen Halbraum definieren, wenn sie sich nur um einen positiven Faktor unterscheiden.)

Es wird bequem sein, in der Menge S einen Punkt P^* als ‘Nullpunkt’ auszuzeichnen und die Verschiebungsvektoren mit den Punkten (‘Ortsvektoren’) zu identifizieren: $S \ni P = P^* + v \leftrightsquigarrow v \in V$. Diese ’Ortsvektoren’ werden wir wie die Verschiebungsvektoren mit Buchstaben wie x, y bezeichnen; und wir denken dabei an n-Spalten. Die Linearformen auf V, die Elemente des Dualraums V^* also, bezeichnen wir mit Buchstaben wie θ, η und wir denken dabei an n-Zeilen. Für $x \in V, \theta \in V^*$ bezeichnet $\langle\theta, x\rangle$ oder auch $\theta \cdot x$ den Wert der Linearform im ‘Punkt’ bzw. ‘Vektor ’ x. Die affinen Funktionen $a(\cdot)$ sind die Funktionen der Gestalt $a(\cdot) = \langle\theta, \cdot\rangle - b$ mit $\theta = da, \quad b = -a(P^*)$. Der dazugehörige Halbraum ist also $\{x : \langle\theta, x\rangle \leq c\ \}$.

Hinweis auf die lineare Algebra: Der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen wird in der analytischen Geometrie als konvexes Polytop bezeichnet, und in der linearen Algebra als der Lösungsraum eines endlichen Systems linearer Ungleichungen. $P = \{x :\ \langle\theta^{(i)}, x\rangle \leq c^{(i)} \quad \text{für alle } i \in I\}$. Ein konvexes Polytop in diesem Sinn ist nicht notwendigerweise kompakt; wenn es kompakt ist, dann kann man es auch als die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge (Menge der Extremalpunkte) gewinnen. Es ist ein Anliegen der linearen Optimierung, herauszufinden, in welchem dieser 'Extremalpunkte' eine vorgegebene affine Funktion ihr Maximum annimmt.

Ziel: Wir werden zeigen, dass man jede abgeschlossene konvexe Menge K als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen darstellen kann. Mit der Struktur der Menge aller Extremalpunkte werden wir uns nicht befassen.

Definition 3.7 (Stützfunktion)**.** Es sei K eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge des n-dimensionalen reellen Vektorraums V. Wir definieren dann

$$\varphi_K(\theta) = \sup\big\{\langle\theta, x\rangle : \ x \in K\big\} \quad \text{für jedes } \theta \in V^* \ ,$$

Die Funktion $\varphi_K(\cdot)$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heisst die Stützfunktion der Menge K.

Wir bemerken, dass die Stützfunktion $\varphi_K(\theta)$ positiv homogen ist und als Supremum von affinen Funktionen unterhalbstetig und konvex. Eine Stützfunktion kann (im Gegensatz zu einer Distanzfunktion) auch negative Werte annehmen.

Satz 3.3.4 (Der Satz von der Stützfunktion)**.**
Jede abgeschlossene konvexe Menge K ist der Durchschnitt aller sie umfassenden abgeschlossenen Halbräume. Wenn $\varphi_K(\cdot)$ die Stützfunktion ist, dann gilt

$$K = \bigcap_{\theta\in V^*} \big\{x : \langle\theta, x\rangle \le \varphi_K(\theta)\big\}.$$

Beweis.
Es gilt $\forall x \in K \, \forall\, \theta \in V^* \quad \langle\theta, x\rangle - \varphi_K(\theta) \le 0$, *und somit* $\quad K \subseteq \bigcap_\theta \{x : \langle\theta, x\rangle \le \varphi_K(\theta)\}$.
Der Halbraum $\{x : \langle\theta, x\rangle \le c\ \}$ *umfasst die Menge* K *genau dann, wenn* $c \ge \varphi_K(\theta)$;

$$\varphi_K(\theta) = \inf\big\{c : K \subseteq \{x : \langle\theta, x\rangle \le c\}\big\}.$$

Zu jedem $x_0 \notin K$ *gibt es eine konvexe Umgebung* K_0, *die die abgeschlossene Menge* K *nicht trifft. Nach dem Trennungslemma gibt es eine affine Funktion* $\langle\theta_0, \cdot\rangle - c$, *die strikt positiv ist auf* K_0 *und nichtpositiv auf* K. $\quad \forall x \in K \langle\theta_0, x\rangle - c \le 0$ *impliziert* $c \ge \varphi(\theta_0)$. *Und wir schliessen aus* $\langle\theta_0, x_0\rangle - \varphi_K(\theta_0) \ge \langle\theta_0, x_0\rangle - c > 0$, *dass* $\quad x_0 \notin \{x : \langle\theta_0, x\rangle \le \varphi_K(\theta_0)\}$.

Bemerkung: Für den Durchschnitt $K_\theta = K \cap \{x : \langle\theta, x\rangle = \varphi_K(\theta)\}$ gibt es mehrere Möglichkeiten: K_θ kann leer sein, K_θ kann gleich K sein, und K_θ kann eine nichtleere echte Teilmenge von K sein. Der erste Fall kann nicht eintreten, wenn K kompakt ist, wenn also K beschränkt und die Stützfunktion endlichwertig ist; denn die stetige Funktion $\langle\theta, \cdot\rangle$ nimmt auf jeder kompakten Menge ihr Supremum an. Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn θ auf $\operatorname{aff} K$ konstant ist. Dieser Fall kann für kein $\theta \ne 0$ eintreten, wenn K ein nichtleeres Inneres besitzt. Im dritten Fall ist $\{x : \langle\theta, x\rangle = \varphi_K(\theta)\}$ eine nichttriviale Stützhyperebene für K in jeden $\tilde{x} \in K_\theta$.

Beispiel. 1. Ist $p \geq 1$, so ist $K^{(p)} = \{(x_1, \ldots, x_m)^T : \quad \sum |x_i|^p \leq 1\}$ eine abgeschlossene konvexe Menge im Spaltenraum $V = \mathbb{R}^m_{Sp}$. Die Höldersche Ungleichung, die wir schon an anderer Stelle behandelt haben, liefert (mit $1/p + 1/q = 1$) die Stützfunktion

$$\varphi_{K^{(p)}}(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \left(\sum |\theta_i|^q\right)^{1/q} \qquad \text{auf dem Zeilenraum} \quad V^* = \mathbb{R}^m_Z.$$

2. Im Raum $\mathbb{R}^2$ sei $K_P = \{(y, x) : \quad 2y \geq x^2 - 1\}$. (Es handelt sich wie oben um den 'Epigraphen' einer konvexen Parabel.) Die Stützfunktion hat den Wert $+\infty$ für $\eta \geq 0$ und den Wert $\varphi_{K_P}(\theta, \eta) = -\frac{1}{2\eta}(\theta^2 + \eta^2)$ für $\eta < 0$.

   Im Abschnitt über 'runde' konvexe Funktionen werden wir einen Kalkül kennenlernen, der diese spezielle Funktion als das Ergebnis einer kurzen Rechnung findet.

3. Betrachten wir auch noch den Epigraphen zu einer Hyperbel:
   Für $K_H = \{(y, x) : \quad y \geq -\sqrt{2} + \sqrt{1 + x^2}\}$ ist der Wert der Stützfunktion $+\infty$, wenn $\eta > 0$ oder $\eta < 0, |\theta| > |\eta|$; ansonsten $\varphi_{K_H}(\theta, \eta) = -\sqrt{2} \cdot \eta - \sqrt{\eta^2 - \theta^2}$.

Hinweis auf den Kalkül der Stützfunktionen. Mit den konvexen Mengen in einem affinen Raum (S, V) (mit einem ausgezeichneten 'Nullpunkt') und ihren Stützfunktionen auf V^* kann man rechnen. Wenn man K verschiebt, dann bedeutet das für die Stützfunktion die Addition einer linearen Funktion. Wenn man so verschiebt, dass K den Nullpunkt enthält, dann ist die Stützfunktion nichtnegativ; sie wird dann also ein Minkowski-Funktional auf dem Vektorraum $V*$. (Im Gegensatz zur Distanzfunktion, welche ein Minkowski-Funktional auf V ist.) Die konvexen Mengen im affinen Raum S kann man konvex kombinieren. Wenn ein 'Nullpunkt ausgezeichnet ist, dann kann man auch 'strecken', und man kann daher positive Linearkombinatonen bilden. — Dies sind wichtige Konstruktionen in der sog. Integralgeometrie.

Satz 3.3.5. *Es seien* K *und* L *abgeschlossene konvexe Mengen. Die Menge*

$$K^{(\lambda)} = (1 - \lambda)K + \lambda L = \left\{R : \ R = (1 - \lambda)P + \lambda Q \quad \textit{mit}\ P \in K,\ Q \in L\right\}$$

ist dann für jedes $\lambda \in [0, 1]$ *konvex und abgeschlossen. Die Stützfunktion ist*

$$\varphi_{K^{(\lambda)}}(\cdot) = (1 - \lambda)\varphi_K(\cdot) + \lambda\varphi_L(\cdot).$$

Beweis. *Die Abgeschlossenheit ist offensichtlich. Kommen wir zur Konvexität.*

$$R_1 = (1 - \lambda)P_1 + \lambda Q_1; \quad R_2 = (1 - \lambda)P_2 + \lambda Q_2, \quad \alpha \in [0.1]$$

$$\Longrightarrow \quad (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2 = (1 - \lambda)\big[(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2\big] + \lambda\big[(1 - \alpha)Q_1 + \alpha Q_2\big] \ \in \ K^{(\lambda)}.$$

$\sup\big\{\langle\theta, (1-\lambda)x+\lambda y\rangle : \ x \in K, y \in L\big\} = (1-\lambda) \sup\big\{\langle\theta, x\rangle : \ x \in K\big\}+\lambda \sup\big\{\langle\theta, y\rangle : \ y \in L\big\}$.

Sei speziell L *eine einpunktige Menge* $L = \{y^*\}$. *Die Stützfunktion ist dann die Linearform* $\varphi_L(\cdot) = \langle\cdot, y^*\rangle$.

Die Rechnung haben wir für konvexe Mengen in einem affinen Raum durchgeführt. Wenn wir konvexe Mengen in einem Vektorraum haben, dann kann man auch 'strecken'. Für K konvex und $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\beta \cdot K = \{\beta \cdot x : \ x \in K\}$ konvex. Für die Stützfunktion gilt $\varphi_{\beta \cdot K}(\theta) \ = \ \sup\big\{\langle\theta, \beta \cdot x\rangle : \ x \in K\big\} \ = \ \sup\big\{\langle\beta \cdot \theta, x\rangle : \ x \in K\big\} = \varphi_K(\beta \cdot \theta)$

3.4 Unterhalbstetige konvexe Funktionen, Legendre-Dualität

Eine Funktion auf dem affinen Raum S mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heisst unterhalbstetige konvexe Funktion, wenn der Epigraph eine abgeschlossene konvexe Menge in $\mathbb{R} \times S$ ist. Man kann nun natürlich den Satz von der Stützfunktion auf diese Epigraphen anwenden. Dies führt zunächst einmal zu dem nächsten Satz. Zu dieser Situation wollen wir dann anschliessend noch eine besonders attraktive Perspektive entwickeln.

Satz 3.4.1. *Jede unterhalbstetige konvexe Funktion* $k(\cdot)$ *ist das punktweise Supremum aller affinen Minoranten.*

Wir wollen wieder einen 'Nullpunkt' auszeichnen, und dementsprechend die Punkte mit den Verschiebungsvektoren identifizieren: $P = P^* + v \leftrightsquigarrow v \in V$. Da wir hierbei in erster Linie an den Raum der reellen n-Spalten denken, bezeichnen wir die Vektoren und die Punkte ('Ortsvektoren') mit dem Buchstaben x. Die affinen Funktionen sind die Funktionen der Gestalt $a(\cdot) = \langle\theta, \cdot\rangle - b$ mit $\theta \in V^*, b \in \mathbb{R}$.

Es sie nun $k(\cdot)$ irgendeine $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$-wertige Funktion, die mindestens eine affine Minorante besitzt. Für ein gegebenes $\theta \in V^*$ berechnen wir die maximale affine Minorante der Form $a(\cdot) = \langle\theta, x\rangle - b$. Man nennt sie die Subtangente zum Anstieg θ. Das minimale $b = \varphi(\theta)$ ergibt sich als ein Supremum ('kleinste obere Schranke').

$$\forall x \quad \langle\theta, x\rangle - b \le k(x) \iff \forall x \quad b \ge \langle\theta, x\rangle - k(x) \iff b \ge \sup\big\{\langle\theta, x\rangle - k(x) : \ x \in V\big\}.$$

Definition 3.8. Wenn $k(\cdot)$ eine $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$-wertige Funktion auf dem n-dimensionalen reellen V ist, die mindestens eine affine Minorante besitzt, dann heisst die Funktion

$$V^* \ni \theta \implies \varphi(\theta) \ = \ \sup\big\{\langle\theta, x\rangle - k(x) : \ x \in V\big\}$$

die Legendre-Transformierte von $k(\cdot)$. Man bezeichnet die Legendre-Transformierte von $k(x)$ häufig mit $k^*(\theta)$.

Bemerke: Die Legendre-Transformierte ist als das punktweise Supremum der affinen Funktionen $\langle\cdot, x\rangle - k(x)$ eine unterhalbstetige konvexe Funktion auf V^*, die nicht identisch $+\infty$ ist. Es gilt $\quad \forall\, \theta \forall x \quad \langle\theta, x\rangle - k(x) \le \varphi(\theta) \quad$ also $\quad \langle\theta, x\rangle - \varphi(\theta) \le k(x)$.

Die Legendre-Transformierte von $\varphi(\cdot)$ ist daher eine unterhalbstetige konvexe Minorante der gegebenen Funktion. $\qquad k(\cdot) \ge \sup\big\{\langle\theta, \cdot\rangle - \varphi(\theta) : \ \theta \in V^*\big\}$.

Wir zeigen nun, dass es die größte unterhalbstetige konvexe Minorante ist; anders formuliert

Satz 3.4.2 (Legendre-Dualität)**.**
Es sei $k(\cdot)$ *auf* V *unterhalbstetig und konvex, und* $\varphi(\cdot)$ *die Legendre-Transformierte.*
Es gilt dann

$$\varphi(\cdot) \ = \sup\big\{ \ \langle\cdot, x\rangle - k(x) : \ x \in V \ \big\}$$
$$k(\cdot) \ = \sup\big\{ \ \langle\theta, \cdot\rangle - \varphi(\theta) : \ \theta \in V^*\big\}.$$

Beweis. *Es sei* (y^*, x^*) *ein Punkt, der nicht zum Epigraphen* E_k *gehört; es sei also* $y^* < k(x^*)$. *Es existiert eine Umgebung* U *von* x^*, *sodass* $E_0^* = (-\infty, y^*) \times U \cap E_k = \emptyset$. *Auf dem Produktraum* $\mathbb{R} \times S$ *existiert eine affine Funktion* $A(y,x) = \eta \cdot y + \langle \theta^*, x \rangle - b$, *welche nichtpositiv ist auf dem Epigraphen und strikt positiv auf* E_0^*. *Werte* $\mathtt{eta} \geq 0$ *kommen nicht in Betracht; wir können o. B. d. A annehmen* $\eta = -1$. *Wir haben* $-y^* + \langle \theta^*, x^* \rangle - b > 0$, *und* $\forall x, y \geq k(x) \quad \langle \theta^*, x \rangle - b \leq y$, *So haben wir eine affine Minorante* $\langle \theta^*, \cdot \rangle - b$, *die im Punkt* x^* *echt größer als* y^* *ist. Das Supremum der affinen Minoranten, und damit auch das Supremum aller Subtangenten ist die gegebene unterhalbstetige konvexe Funktion* $k(\cdot)$.

Der Satz kann auch so formuliert werden: Für eine Funktion $k(\cdot)$, die mindestens eine affine Minorante besitzt, ist $(k^*)^*(\cdot)$ die größte unterhalbstetige konvexe Minorante.

Wir betrachten eine Reihe von Spezialfällen:

Satz.
a) Es sei K *eine abgeschlossene Menge im Vektorraum* V. *Die Funktion* O_K, *die auf* K *verschwindet und ansonsten den Wert* $+\infty$ *hat, ist dann unterhalbstetig konvex. Die Legendre-Transformierte ist die Stützfunktion von* K.

$$k^*(\theta) = \sup\left\{ \langle \theta, x \rangle : \ x \in K \right\}$$

b) Ist $F(\cdot)$ *auf* V^* *unterhalbstetig konvex und positiv homogen, so kann die Legendre-Transformierte nur die Werte* 0 *und* $+\infty$ *annehmen.*

$$F^*(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in K = \{x : \ \langle \theta, x \rangle - F(\theta) \leq 0 \quad \textit{für alle } \theta\}.$$

Sprechweise (Duale Kegel)**.**
Eine Teilmenge K eines reellen Vektorraums V heisst ein konvexer Kegel, wenn gilt

$$\forall x, y \in K, \forall \lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in K.$$

Man definiert dazu den dualen Kegel

$$K^* = \{ \theta : \quad \langle \theta, x \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } x \in K \} \quad \subseteq V^*.$$

Satz. *Wenn* K *ein konvexer Kegel in* V *ist, dann ist* K^* *ein abgeschlossener konvexer Kegel in* V^*, *und* $(K^*)^*$ *ist die abgeschlossene Hülle von* K.

Beweis. *Der Satz bringt die beiden Aussagen des vorigen Satzes zusammen, wenn man die Funktion* k *betrachtet, die auf* K *den Wert* 0 *und sonst den Wert* $+\infty$ *hat. Die Legendre-Transformierte hat dann den Wert* $k^*(\theta) = \sup\left\{ \langle \theta, x \rangle : \ x \in K \right\} = 0$ *für* $\theta \in K^*$ *und sonst den Wert* 0.

Für den folgenden Satz stützen wir auf die bekannten Konventionen: Die Menge $V = \mathbb{R}^n_{Sp}$ der n Spalten und die Menge $V^* = \mathbb{R}^n_Z$ sind vermöge der Matrizenmultiplikation zueinander dual: $\langle \theta, x \rangle = \theta \cdot x$.

Satz (Satz von Farkas).
Es sei A *eine reelle Matrix vom Format* $m \times n$ *und* $N = \{x : A \cdot x \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{Sp}}$. *Für jede nichtnegative* m*-Zeile* $\xi \geq 0$ *ist* $\xi \cdot A$ *eine Linearform, die auf* N *nichtpositiv ist. Zu jeder auf* N *nichtpositiven Linearform* θ *existiert* $\xi \geq 0$ *sodass* $\theta = \xi \cdot A$.

Beweis. *Die erste Aussage ist trivial:*

$$\xi \geq 0, \quad \theta = \xi \cdot A \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in N \quad (\xi \cdot A) \cdot x = \xi \cdot (A \cdot x) \leq 0.$$

Es sei $\{\theta^{(i)} : \in I\}$ *die Familie der Zeilen der Matrix* A. *Die Menge der positiven Linearkombinationen* $M = \left\{\theta : \theta = \xi \cdot A \quad \text{mit } \xi \geq 0\right\}$ *ist ein abgeschlossener konvexer Kegel. Es ist in Tat der duale Kegel zu* N*; denn*

$$M^* = \left\{x : (\xi \cdot A)x \leq 0 \quad \text{für alle } \xi \geq 0\right\} = \left\{x : \theta^{(i)}x \leq 0 \quad \text{für alle } i \in I\right\} = N.$$

Jede Linearform, die auf N *nichtpositiv ist, ist also eine positive Linearkombination der Zeilen von* A.

3.5 Runde konvexe Funktionen

Wir haben oben gesehen: Eine Funktion $k(\cdot)$ auf der reellen Achse ist genau dann unterhalbstetig konvex, wenn gilt

- Im Inneren des Endlichkeitsbereichs (x_-, x_+) ist $k(\cdot)$ die Stammfunktion einer isotonen Funktion $k'(\cdot)$

- Am Rande gilt $k(x_+) = \liminf_{x \to x_+} k(x), \quad k(x_-) = \liminf_{x \to x_-} k(x)$.

Eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn ihre Einschränkung auf jede Gerade konvex ist. Das sei vorausgeschickt, bevor wir uns jetzt mit einem regulären Verhalten in geeigneten offenen konvexen Teilbereichen befassen. Möglicherweise erinnert das Folgende an den Schulunterricht, wo vereinfachend gesagt wird, die konvexen Funktionen seien diejenigen Funktionen auf einem offenen Intervall, die eine positive zweite Ableitung besitzen.

Sprechweise 3.5.1 (Runde konvexe Funktionen)**.**
Es sei $k(x)$ eine unterhalbstetige konvexe Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, und U eine offene konvexe Teilmenge ihres Endlichkeitsbereichs. Wir sagen, $k(x)$ sei rund auf U wenn sie in U zweimal stetig differenzierbar ist mit einer überall positivdefiniten Hesse-Matrix $k''(x)$.

Bemerke: Eine konvexe Funktion $k(\cdot)$ auf der konvexen Menge U wird strikt konvex genannt, wenn für alle $P \neq Q \in U$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ die strikte Ungleichung gilt: $k\big((1-\lambda)P + \lambda Q\big) < (1-\lambda)k(P) + \lambda k(Q)$. Die Rundheit auf U ist offenbar eine stärkere Forderung als die Forderung der strikten Konvexität.

Notation (Gradient)**.**
Wenn $k(\cdot)$ zweimal stetig differenzierbar ist auf der offenen konvexen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n_{Sp}$, dann bezeichnen wir mit $k'(\cdot)$ das n-Tupel der partiellen Ableitungen, als Zeile notiert. Wir fassen $k'(\cdot)$ als stetig differenzierbare Abbildung auf und notieren dann auch

$$G(\cdot) = k'(\cdot) : \quad U \longrightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n_Z.$$

$\tilde{V}$ bezeichnet den Bildbereich, sodass also $G(\cdot)$ eine surjektive Abbildung ist.
(Der Buchstabe $G(\cdot)$ soll an 'Gradient' erinnern).

Wenn $\varphi(\cdot)$ zweimal stetig differenzierbar ist auf der offenen konvexen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n_Z$, dann bezeichnen wir mit $\varphi'(\cdot)$ das n-Tupel der partiellen Ableitungen, als Spalte notiert. Wir fassen $\varphi'(\cdot)$ als stetig differenzierbare Abbildung auf und notieren dann auch

$$B(\cdot) = \varphi'(\cdot) : \quad V \longrightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n_{Sp}.$$

$\tilde{U}$ sei der Bildbereich, sodass also $B(\cdot)$ eine surjektive Abbildung ist.
(Der Buchstabe $B(\cdot)$ wird uns zu gegebener Zeit an 'Berührpunkt' erinnern.)

Die Hesse-Matrix zu $k(\cdot)$ wird mit $k''(\cdot)$ oder mit $G'(\cdot)$ bezeichnet. Die Bezeichnung $G'(\cdot)$ erinnert daran, dass die Hessematrix als die Funktionalmatrix der stetig differenzierbaren Abbildung $G(\cdot)$ aufgefasst werden kann. Bei einer Funktion mit $k''(x^*)$ ist die Abbildung $G(\cdot)$ in einer Umgebung von x^* umkehrbar. Wir werden sehen werden, dass für eine auf U runde Funktion die Abbildung $G(\cdot)$ auf U global umkehrbar ist.

Didaktische Anmerkung: Wenn einem Leser die Begriffe Funktionalmatrix und Hesse-Matrix noch nicht geläufig sind, dann mag er bei der ersten Lektüre durchaus an den eindimensionalen Fall denken, Es sollte ihm auffallen, dass die Konstruktionen nicht an die totale Ordnung auf der reellen Achse gebunden sind. Bei einer zweiten Lektüre mag er die Konstruktionen dann als eine erste Einführung in die Welt der glatten Funktionen mehrerer Variabler verstehen.

Satz 3.5.1 (Hauptsatz über runde konvexe Funktionen)**.**
Es sei $k(\cdot)$ eine auf U runde konvexe Funktion, und es sei V das Bild von U unter der Abbildung $k'(\cdot)$. Dann ist die Legendre-Transformierte $\varphi(\cdot)$ eine auf V runde konvexe Funktion. Die Gradientenabbildungen $k'(\cdot)$ und $\varphi'(\cdot)$ stellen zueinander inverse Bijektionen her zwischen U und V.

$$\begin{aligned} k'(\cdot):\ U &\longrightarrow V, & \varphi'(\cdot):\ V &\longrightarrow U;\\ \varphi'\circ k'(\cdot) &= \mathrm{id}_U(\cdot), & k'\circ\varphi'(\cdot) &= \mathrm{id}_V(\cdot). \end{aligned}$$

Beweis. *Für die θ im Endlichkeitsbereich von $\varphi(\cdot)$ wird der Wert der Legendre-Transformierten $\varphi(\theta)=\sup\{\langle\theta,x\rangle-k(x):\ x\in U\}$ in einem wohlbestimmten Punkt $\tilde{x}(\theta)$ angenommen, denn die Funktion $x\longmapsto\langle\theta,x\rangle-k(x)$ ist strikt konkav. Wenn dieser Punkt in U liegt, dann verschwindet dort der Gradient.*

$$\theta-k'(\tilde{x}(\theta))=0 \quad \textit{wenn } \theta\in V \ \textit{(Bildbereich von } k'\textit{)}$$

Es gilt in diesen Punkten $\varphi(\theta)=\theta\cdot\tilde{x}(\theta)-k(\tilde{x}(\theta))$. Nach Voraussetzung ist $k'(\cdot)$ stetig differenzierbar mit einer nichtsingulären Funktionalmatrix. Wir brauchen jetzt einen bekannten Satz, den Satz von der impliziten Funktion, den wir später in der Differentialrechnung sehr ausführlich behandeln werden. Dieser garantiert, dass die Umkehrabbildung $\tilde{x}(\cdot)$ zu $k'(\cdot)$ ebenfalls stetig differenzierbar ist, wobei die Funktionalmatrizen zueinander invers sind. $\quad k''(\tilde{x}(\theta))\cdot\tilde{x}'(\theta)=E$ *(Einheitsmatrix).*

Nachdem wir nun wissen, dass die Abbildung $\tilde{x}(\cdot)$ stetig differenzierbar ist, können wir die Ableitung der Funktion $\varphi(\theta)=\theta\cdot\tilde{x}(\theta)-k(\tilde{x}(\theta))$ bilden; mit Produktregel und Kettenregel ergibt sich $\varphi'(\theta)=\tilde{x}(\theta)$. Da $\tilde{x}(\cdot)$ stetig differenzierbar ist mit nichtsingulärer Funktionalmatrix $\varphi''(\cdot)$, ist also $\varphi(\cdot)$ eine runde konvexe Funktion auf dem Bildbereich von $k'(\cdot)$. — Alle Konstruktionen können von $\varphi(\cdot)$ ausgehend ebenso durchgeführt werden.

Sprechweise. Es seien $k(\cdot)$ auf U und $\varphi(\cdot)$ auf V zueinander duale runde konvexe Funktionen. Wenn $k'(x^*)=\theta^*$, $\varphi'(\theta^*)=x^*$, dann nennen wir das Punktepaar $(x^*,\theta^*)\in U\times V$ ein konjugiertes Punktepaar, θ^* heisst der Anstieg im Punkt x^*; und x^* heisst der Berührpunkt zum Anstieg θ^*.

Bemerke: Für ein konjugiertes Punktepaar gilt $\langle\theta^*, x^*\rangle = k(x^*) + \varphi(\theta^*)$. Die Gleichung

$$y = k(x^*) + \langle\theta^*, x - x^*\rangle \;=\; \langle\theta^*, x\rangle - \varphi(\theta^*)$$

beschreibt die tangentiale Hyperebene an den Epigraphen der Funktion $k(\cdot)$ in (x^*, θ^*).

Der Satz erlaubt in für manche elementare $k(\cdot)$ l eine schnelle explizite Berechnung der Legendre-Transformatierten $k^*(\cdot)$. Wir nützen die Gelegenheit, weitere Rechnungen mit den klassischen 'Elementaren Funktionen' anzustellen:

Beispiel.

1. Die Exponentialfunktion $k(x) = e^x$ ist rund auf der ganzen reellen Achse. Die Umkehrabbildung der Ableitung $k'(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $\varphi'(\theta) = \ln\,\theta$ auf der positiven Halbachse $V = (0, +\infty)$. Die Stammfunktion mit der richtigen Integrationskonstanten ist $\varphi(\theta) = \theta\cdot\ln\,\theta - \theta$. Die Legendre-Transformierte $k^*(\theta)$ ist gleich dieser Funktion auf V, sowie $= 0$ im Nullpunkt und $= +\infty$ auf der negativen Halbachse.

2. Es sei $k(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $= +\infty$ sonst. Die Umkehrabbildung zur Ableitung $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ist die Abbildung $\varphi'(\theta) = \sqrt{-\theta}$ auf der negativen Halbachse. Die Stammfunktion mit der richtigen Integrationskonstanten ist $\varphi(\theta) = -2\cdot\sqrt{|\theta|}$. Die Legendre-Transformierte hat den Wert $+\infty$ auf der offenen positiven Halbachse.

3. Es sei $k(x) = x\cdot\ln\,x + (1-x)\cdot\ln\,(1-x)$ für $x \in [0,1]$ und $= +\infty$ ausserhalb des Einheitsintervall . (Bemerke: $k(0) = 0 = k(1)$ garantiert die Unterhalbstetigkeit.) Die Funktion ist rund auf dem offenen Einheitsintervall $U = (0,1)$; denn
$k'(x) = \ln\,x - \ln\,(1-x), \quad k''(x) = \frac{1}{x\cdot(1-x)} > 0$ auf U. Die Umkehrabbildung zu

$$\begin{array}{rll} k'(\cdot): & (0,1) \ni x \longmapsto \theta = \ln\frac{x}{1-x} & \text{ist die Abbildung} \\ \varphi'(\cdot): & (-\infty,+\infty) \ni \theta \longmapsto x = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}. & \end{array}$$

   Die Stammfunktion mit der richtigen Integrationskonstanten ist $\varphi(\theta) = \ln\,(1+e^\theta)$.

4. Wir kommen noch einmal auf die Beispiele von oben zurück. Sei also $k(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Die Umkehrabbildung zur Ableitung $k'(x) = x$ ist $\varphi'(\theta) = \theta$ Die Stammfunktion mit der richtigen Integrationskonstanten ist $\varphi(\theta) = \frac{1}{2}(1+\theta^2)$. Der Zusammenhang mit der Stützfunktion des Epigraphen $\Phi(\eta,\theta)$, der wie bei jedem Epigraphen für $\eta > 0$ unendlich ist, ist $\varphi(\theta) = \Phi(-1,\theta)$.

5. Es sei $k(x) = -\sqrt{2} + \sqrt{1+x^2}$. Der Gradient ist die Abbildung $k'(\cdot):\quad x \longmapsto \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ihre Umkehrabbildung auf dem Intervall $V = (-1,+1)$ ist $\varphi'(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$. Die Stammfunktion mit der richtigen Integrationskonstanten ist $\varphi(\theta) = \sqrt{2} - \sqrt{1-\theta^2}$.

6. Die Funktion $k(x) = \ln\ \frac{1}{\sin\ x}$ ist konvex auf dem Intervall $(0, \pi)$. Wir berechnen die Legendre-Transformierte
$$\sup\Big\{\theta x - \ln\ \frac{1}{\sin\ x} : 0 < x < \pi\Big\} \quad = \quad -\tfrac{1}{2}\ln(1+\theta^2) + \theta\cdot(\pi/2 + \arctan\theta).$$
In der Tat gilt
$$\theta = k'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi/2 + \arctan\theta,$$
und die Legendre-Transformierte ist Stammfunktion dieser Umkehrfunktion.

7. Sei Q eine positivdefinite $n \times n$-Matrix und $k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot Q \cdot x$ auf dem Raum der n-Spalten x. Der Gradient im Punkt x ist die Abbildung Zeile $k'(x) = x^T \cdot Q$. Die Umkehrabbildung von $x \longmapsto \theta = x^T Q$ ist die Abbildung $\theta \longmapsto x = C \cdot \theta^T$, wo $C = Q^{-1}$. Die Legendre-Transformierte ist $\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\theta \cdot C \cdot \theta^T$.

Die Gamma-Funktion als logarithmisch konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^+$.
Eine Funktion $G(\cdot)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ heisst logarithmisch konvex, wenn $g(\cdot) = \ln\ G(\cdot)$ konvex ist. Eine positive Funktion $G(\cdot)$ ist also genau dann logarithmisch konvex, wenn gilt:
$$\forall p > 1, \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\ \forall P, Q: \qquad G\big(\tfrac{1}{p}\cdot P + \tfrac{1}{q}\cdot Q\big) \le (G(P))^{1/p} \cdot (G(Q))^{1/q}.$$
Für eine Funktion $G(\cdot)$ ist die logarithmische Konvexität eine schärfere Forderung als die Konvexität.Wenn nämlich $k(\cdot)$ konvex ist, dann ist auch $G(\cdot) = \exp(k(\cdot))$. Der Logarithmus einer positiven konvexen Funktion ist jedoch nicht notwendigerweise konvex.

Wir beweisen ein allgemeineres **Lemma**: Wenn $E(\cdot)$ konvex und isoton ist, dann ist $G(\cdot) = E(k(\cdot))$ konvex. Es gilt in der Tat für alle P, Q und alle $\lambda \in [0, 1]$
$$\begin{aligned} G\big((1-\lambda)P + \lambda Q\big) =& E\Big(k\big((1-\lambda)P + \lambda Q\big)\Big) \le E\big((1-\lambda)k(P) + \lambda k(Q)\big) \\ \le& (1-\lambda)E(k(P)) + \lambda E(k(Q)) = (1-\lambda)G(P) + \lambda G(Q). \end{aligned}$$

Satz 3.5.2 (Die logarithmische Konvexität der momentenerzeugenden Funktionen)**.**
Jede nichtnegative Funktion $r(\cdot) \ge 0$ liefert eine logarithmisch konvexe Funktion
$$M(\theta) = \int e^{\langle\theta, \nu\rangle} \cdot r(x)\, dx.$$

Hinweis: Es ist hier nicht der Platz für einen Beweis des wichtigen weiterführenden Satzes, welcher besagt: Wenn die Funktion $M(\cdot)$ auf einer offenen Menge endliche Werte hat, dann bestimmt sie eindeutig die Funktion $r(\cdot)$.

Wir vergewissern uns zunächst, dass der Satz den Fall der Gamma-Funktion erfasst. In der Tat gilt $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty u^\theta \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{u}du = \int_{-\infty}^\infty e^{\theta\cdot\nu} \cdot \exp(-e^\nu) \cdot d\nu$. (Substitution $\ln u = \nu$) Den Beweis des allgemeinen Satzes führen wir unten. Zuerst beweisen mit Hilfe der logarithmischen Konvexität eine berühmte Charakterisierung der Gamma-Funktion.

Satz 3.5.3 (Satz von H. Bohr und Møllerup). *Die Gamma-Funktion auf* $\mathbb{R}^+$ *ist die einzige logarithmisch konvexe Funktion* $G(\alpha)$ *mit* $G(1) = 1$ *und* $\alpha \cdot G(\alpha) = G(\alpha + 1)$.

Beweis. *Für eine Funktion* $G(\cdot)$ *mit den geforderten Eigenschaften gilt* $G(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Die Funktionalgleichung zeigt, dass es genügt, die eindeutige Bestimmtheit im Intervall* $(0,1)$ *nachzuweisen. Sei also* $0 < \alpha < 1$. *Die logarithmische Konvexität liefert wegen* $n+1 = \alpha(n+\alpha) + (1-\alpha)(n+1+\alpha)$ *und* $n+1+\alpha = (1-\alpha)(n+1) + \alpha(n+2)$

$$\ln G(n+1) \le \alpha \ \ln G(n+\alpha) + (1-\alpha)\ln G(n+1+\alpha) = \ln G(n+1+\alpha) - \alpha \ln(n+\alpha)$$
$$\ln G(n+1+\alpha) \le (1-\alpha)\ln G(n+1) + \alpha \ln G(n+2) = \ln \ n! + \alpha\ln(n+1).$$
$$\alpha\ln(1+\tfrac{\alpha}{n}) + \alpha\ln \ n \le \ln\Big(\tfrac{1}{n!}\cdot G(n+1+\alpha)\Big) \le \alpha\ln n + \alpha\ln(1+\tfrac{1}{n})$$
$$(1+\tfrac{\alpha}{n})^\alpha \quad \le \quad \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n!}G(\alpha)\cdot\alpha(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n) \quad \le \quad (1+\tfrac{1}{n})^\alpha.$$

Da die obere und die untere Abschätzung im Limes den Wert $= 1$ *ergeben, haben wir*

$$\frac{1}{G(\alpha)} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n^\alpha\cdot n!}.$$

Dies zeigt nicht nur die Eindeutigkeit. Es hat sich auch eine bemerkenswerte Formel für den Wert der Gamma- Funktion ergeben. Bei späterer Gelegenheit werden wir zeigen, dass der Limes auch für komplexe Argumente existiert und die (im Sinne der Funktionentheorie wohlbestimmte) in die komplexe Ebene fortgesetzte Gamma-Funktion liefert.

Als eine ‘Anwendung’ des Satzes von H. Bohr und Møllerup geben wir einen zweiten Beweis für die Darstellung der Beta-Funktion.

$$B(\alpha,\beta) \ = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ dx \ = \ \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{für} \quad \alpha,\ \beta\ > 0.$$

Beweis. *Für festes* β *ist (nach dem noch nicht bewiesenen Satz) die Funktion*

$$B(\,\cdot\,,\,\beta): \quad \alpha \longmapsto \int_0^1 e^{\alpha\cdot\ln x}(1-x)^{\beta-1}\ \tfrac{1}{x}\ dx$$

logarithmisch konvex. Durch partielle Integration erhalten wir (wie oben berechnet) die Beziehung $B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot B(\alpha,\beta)$. *Für die Funktion* $\alpha \longmapsto G(\alpha) = B(\alpha,\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta)$ *gilt daher*

$$G(\alpha+1) = B(\alpha+1,\beta)\cdot\Gamma(\alpha+1+\beta) = \alpha\cdot B(\alpha,\beta)\cdot\Gamma((\alpha+\beta) = \alpha\cdot G(\alpha).$$

Nach dem Satz von H. Bohr und Møllerup ist $G(\cdot)$ *ein Vielfaches der Gamma-Funktion. Aus der Symmetrie der Beta-Funktion ergibt sich die Konstante* $= \Gamma(\beta)$; *und damit ist alles bewiesen.*

Momentenerzeugende Funktionen sind logarithmisch konvex:
Wenn $r(x) \geq 0$ auf dem Spaltenraum $\mathbb{R}^n_{Sp}$ dann nennt man $M(\theta) = \int e^{\langle\theta,x\rangle} r(x)\ dx$ die momentenerzeugende Funktion der Dichte $r(x)\ dx$. Häufig wird die Normierung der Gewichtung angenommen: $\int r(x)\ dx = 1$. Technisch gesehen ist die Annahme für das Folgende unnötig. Sie ist aber (insbesondere bei den Stochastikern) beliebt zur Unterstützung des intuitiven Argumentierens. Man interpretiert dann nämlich $r(x)\ dx$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte oder als die Verteilungsdichte eines Zufallsvektors X; und man notiert $M(\theta) = \mathfrak{E}e^{\langle\theta,X\rangle}$. Den Logarithmus $\psi(\theta) = \ln\ M(\theta)$ nennt man die **kumulantenerzeugende Funktion** der Verteilungsdichte.

Man betrachtet üblicherweise den Fall, wo der Endlichkeitsbereich von $M(\cdot)$ eine Umgebung des Nullpunkts ist. Wenn der Endlichkeitsbereich eine Umgebung von θ^* ist, dann studiert man auch gerne die momentenerzeugende Funktion der 'getilteten' Verteilungsdichte $r^*(x)\ dx = e^{\langle\theta^*,x\rangle} \cdot r(x) \cdot (M(\theta^*))^{-1}\ dx$. Ihre kumulantenerzeugende Funktion ist offenbar die Funktion $\psi_{\theta^*}(\eta) = \psi(\theta^* + \eta) - \psi(\theta^*)$.

Für den Beweis der logarithmischen Konvexität einer momentenerzeugenden Funktion benötigen wir eine Version der Hölder'schen Ungleichung, in welcher eine Integration an die Stelle der oben betrachteten Summation tritt.

Satz 3.5.4 (Hölder'sche Ungleichung)**.** *Es sei* $r(\cdot) \geq 0$ *auf de* $\mathbb{R}^n$ *und i* $p \geq 1$ *und* $1/p + 1/q = 1$. *Für beliebige Paare messbarer komplexwertiger Funktionen* $f(x)$, $g(x)$ *gilt dann*

$$\int |f(x) \cdot g(x)|\ r(x)\ dx \leq \left(\int |f(x)|^p\ r(x)\ dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g(x)|^q\ r(x)\ dx\right)^{1/q}$$

Beweisskizze :
Die Ungleichung wird üblicherweise für komplexwertige Funktionen f, g formuliert. Beim Beweis kann man sich aber offenbar auf nichtnegative Funktionen beschränken. Wenn eines der Integrale auf der rechten Seite den Wert $+\infty$ annimmt, dann ist nichts zu beweisen. Wir setzen

$$a(x) = |f(x)|^p, \quad A = \int a(x) \cdot r(x)\ dx, \qquad b(x) = |g(x)|^q, \quad B = \int b(x) \cdot r(x)\ dx.$$

Aus der Konkavität der Logarithmusfunktion folgt $(a(x))^{1/p} \cdot (b(x))^{1/q} \leq \frac{1}{p}a(x) + \frac{1}{q}b(x)$ für alle x. Die 'gewichtete Integration' ergibt für die normierten Funktionen $\frac{1}{A}a(\cdot)$, $\frac{1}{B}b(\cdot)$

$$\int \left(\tfrac{1}{A}a(x)\right)^{1/p} \cdot \left(\tfrac{1}{B}b(x)\right)^{1/q}\ r(x)\ dx \leq \int \left[\tfrac{1}{p} \cdot \tfrac{1}{A}a(x) + \tfrac{1}{q} \cdot \tfrac{1}{B}b(x)\right]\ r(x)\ dx\ =\ 1.$$
$$\int (a(x))^{1/p} \cdot (b(x))^{1/q}\ r(x)\ dx \leq A^{1/p} \cdot B^{1/q}.$$

Und das ist die Hölder'sche Ungleichung.

Einen Beweis der logarithmischen Konvexität der momentenerzeugenden Funktion erhalten wir, wenn wir speziell betrachten $f(\nu) = \exp(\frac{1}{p}\theta \cdot \nu),\ g(\nu) = \exp(\frac{1}{q}\eta \cdot \nu)$. Die rechte Seite der Ungleichung wird $M(\theta)^{1/p} \cdot M(\eta)^{1/q}$. Für die linke Seite ergibt sich

$$f(\nu) \cdot g(\nu) = \exp\big((\tfrac{1}{p}\theta + \tfrac{1}{q}\eta) \cdot \nu\big), \qquad \int |f(\nu) \cdot g(\nu)|\ r(\nu)\ d\nu = M(\tfrac{1}{p}\theta + \tfrac{1}{q}\eta).$$

Beispiel 3.5.1. In der Stochastik trifft man immer wieder auf die sog. Gammadichten auf der positiven Halbachse. Die Gamma-Dichte mit dem Erwartungswert α und der Varianz α ist die Dichte

$$r_\alpha(x)\ dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\ dx \quad x \geq 0.$$

Ihre kumulantenerzeugende Funktion $\psi_\alpha(\cdot)$ ist endlichwertig auf dem Intervall $(-\infty, 1)$.

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\theta) &= \ln\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{\theta x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\ dx\Big) \\ &= \ln\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty e^{\theta x} \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-x(1-\theta)} \cdot \tfrac{1}{x}\ dx\Big) = \quad -\alpha \cdot \ln(1-\theta).\end{aligned}$$

Die Legendre-Transformierte dieser konvexen Funktion haben wir oben berechnet:

$$k_\alpha(x) = \alpha \cdot \left[\frac{x}{\alpha} - 1 - \ln\ \frac{x}{\alpha}\right] \qquad \text{für} \quad x > 0.$$

Beachte: Bei den Gamma-Dichten erscheint ein Wert der Gamma-Funktion als Normierungskonstante, während α in der Gamma-Funktion das Argument ist.

Ähnlich verhält es sich bei den sog. Beta-Dichten auf dem Einheitsintervall

$$r_{\alpha,\beta}(x)\ dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\ dx \quad = \quad \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot e^{\alpha \ln x + \beta \ln(1-x)} \cdot \tfrac{1}{x(1-x)}\ dx$$

die für ganzzahlige $(k, n-k)$ in der Stochasik ebenfalls eine gewisse Bedeutung haben.

4 Mengen und Mengensysteme (1A)

Wir beginnen hier nicht mit den Zahlen, die ja bereits starke mathematische Strukturen sind, sondern mit den Mengen, den (nach heute üblicher Meinung) elementarsten mathematischen Objekten. G. Cantor führte 1895 die folgende Sprechweise ein:

> *Unter einer Menge M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Auf diese ‘Definition’ gründet sich die sog. naive Mengenlehre.

4.1 Mengenalgebren, Boole’sche Verbände.

Eine Grundmenge Ω, bestehend aus bestimmten wohlunterschiedenen Objekten ω, sei uns gegeben. Das Wort ‘wohlunterschieden’ betont die Forderung, dass bei zwei Elementen ω_1 und ω_2 feststeht, ob sie gleich sind ($\omega_1 = \omega_2$) oder ungleich ($\omega_1 \neq \omega_2$). Für den Mathematiker ist die Gleichheit $=$ eine zweistellige Relation mit den Eigenschaften einer

Definition 4.1 (Äquivalenzrelation)**.**

1. $\omega = \omega \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega,$ (Reflexivität)
2. $\omega_1 = \omega_2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_2 = \omega_1,$ (Symmetrie)
3. $\omega_1 = \omega_2, \quad \omega_2 = \omega_3 \quad \Longrightarrow \quad \omega_1 = \omega_3.$ (Transitivität)

Es ist klar, was Teilmengen sind. Im System der Teilmengen von Ω kann man ‘rechnen’. Die Komplementbildung ist eine ’einstellige’ Rechenoperation, zweistellige Rechenoperationen sind die Vereinigung und die Durchschnittsbildung. Aus diesen elementaren Rechenoperationen gewinnen wir weitere Operationen wie z. B. das relative Komplement. Die Vereinigungsbildung wird mit dem Symbol $\cup$ notiert, die Durchschnittsbildung mit dem Symbol $\cap$; die Notation für die Komplementbildung ist nicht einheitlich.

$$\Omega \setminus A = A^c = \complement A = \neg A = \{\omega : \omega \in \Omega, \omega \notin A\}.$$

Für $B \cap A^c$ schreibt man auch $B \setminus A$ oder $B - B \cap A$, und man liest: ‘B ohne A’.

Rechenregeln: Die Komplementbildung ist involutorisch, d. h. $(A^c)^c = A$. Für die Operationen $\cap$ und $\cup$ gelten die Assoziativ- Distributiv- und Kommutativitätsgesetze. Und es gelten die sog. de Morgan’schen Regeln:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Die Inklusion als partielle Ordnung

Man schreibt $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$, wenn A eine Teilmenge von B ist. Man kann die ’Teilmengenrelation’ $\supseteq$ auf vielerlei Weisen algebraisch zum Ausdruck bringen:

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \leftrightarrow \quad \neg A \cup B = \Omega \quad \leftrightarrow \quad A \cap \neg B = \emptyset.$$

Das System aller Teilmenge von Ω heisst die Potenzmenge (zu Ω). Diese Menge von Mengen wird mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet. Die Inklusion macht das System $\mathfrak{P}(\Omega)$ zu einer partiell geordneten Menge; denn sie ist eine zweistellige Relation mit den folgenden Eigenschaften:

Definition 4.2 (Axiome der partiellen Ordnung).

1. $A \subseteq A$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
2. $A \subseteq B,\ B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad A = B$,
3. $A \subseteq B,\ B \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq C$.

Indikatorfunktionen und ganzzahlige Treppenfunktionen

Die Teilmengen $A \subseteq \Omega$ präsentiert man manchmal durch Funktionen auf Ω, die nur die Werte 1 und 0 annehmen können, die sog. Indikatorfunktionen 1_A.

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \in A \\ 0 & \text{wenn } \omega \notin A \end{cases}.$$

Summen und Differenzen von Indikatorfunktionen nennt man ganzzahlige Treppenfunktionen. Mit ihnen kann man rechnen wie man es in $\mathbb{Z}$ gewohnt ist, und dieses Rechnen liefert oft schneller die gewünschten Ergebnisse als mühsame Fallunterscheidungen.
Zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} 1_A + 1_B &= 1_{A\cup B} + 1_{A\cap B}, \\ 1_{A\cup B\cup C} &= 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\cap B} - 1_{A\cap C} - 1_{B\cap C} + 1_{A\cap B\cap C}. \end{aligned}$$

Aussagen

George Boole (1815- 1864) hat in seiner Schrift 'The Laws of Thought' herausgearbeitet, dass man mit Aussagen rechnen kann. Welche Art von Aussagen (propositions) gemeint sind, lernt der Mathematiker im Laufe seines Studiums; eine professionelle Auseinandersetzung ist Sache der Logiker; der Kalkül (propositional calculus) ist unstrittig.

$A \vee B$ ist wahr, wenn A wahr ist oder B wahr ist; daher liest man $A \vee B$ als 'A oder B'. Entsprechend liest man $A \wedge B$ als 'A und B'. Die zweistellige Operation $\vee$ heisst die Disjunktion; die Operation $\wedge$ heisst die Konjunktion. Es gelten die Distributivgesetze. Die einstellige Operation $\neg$ heisst die Negation. $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A nicht wahr ist. ('tertium non datur').

$$\neg(\neg A) = A, \quad A \vee \neg A = \tilde{1}, \qquad A \wedge \neg A = \tilde{0},$$

wo $\tilde{1}$ die sichere Aussage, die Aussage, die immer wahr ist, bezeichnet und $\tilde{0}$ die Aussage, die immer falsch ist.

Ein System von Aussagen im Sinne des Kalküls von Boole heisst bei den Mathematikern ein Boole'scher Verband, oder eine Boole'sche Algebra, oder auch ein distributiver, komplementärer Verband mit einem größten und einem kleinsten Element.

$$\Big(\mathcal{B}, (=), \tilde{0}, \tilde{1}, \neg, \vee, \wedge\Big)$$

Es gelten dieselben Regeln wie für die Systeme von Teilmengen einer Grundmenge Ω — und dies ist ein beweisbarer mathematischer Satz, der 'Satz von Stone' aus dem Jahr 1936, welcher in der Variante des 'Satzes von Loomis' (1948) unter Stochastikern sehr hoch geschätzt wird.

Hinweis: Die Mathematiker arbeiten sowohl mit Teilmengen einer Grundmenge als mit Aussagen im Sinne der Boole'schen Algebra, die dann noch ergänzt wird durch die Operationen $\exists$ und $\forall$, welche aus einer (möglicherweise unendlichen) Familie von Aussagen eine Aussage machen. Die Vielfalt der Ausdrucksweise, sorgfältig genützt, dient dem intuitiven Verständnis der mathematischen Argumente. Da die Formeln ein solides Fundament bilden, kann auf Einheitlichkeit im sprachlichen Ausdruck verzichtet werden,

Definition 4.3 (Mengenalgebra)**.** Es sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen heisst eine Mengenalgebra über Ω, wenn gilt

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, \quad \Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$

Bemerke: In der Mengenalgebra $\mathcal{A}$ gehören mit A, B auch $A \cup B$ und $\complement A \cup B$ zu $\mathcal{A}$.

Definition 4.4. Eine Partition einer endlichen Menge Ω ist eine Darstellung von Ω als Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen: $\Omega = \sum_i A_i$. Die nichtleeren A_i heissen die Atome der Partition.
Die Partition $\mathcal{P}_2 = \left(\Omega = \sum_j B_j\right)$ heisst Verfeinerung der Partition $\mathcal{P}_1 = \left(\Omega = \sum_i A_i\right)$, wenn jedes B_j in einem A_i enthalten ist. Wir notieren in diesem Fall $\mathcal{P}_2 \sqsupseteq \mathcal{P}_1$. Zwei Partitionen heissen gleich, wenn jede eine Verfeinerung der anderen ist.

Bemerke: Die Definition der partiellen Ordnung '$\sqsupseteq$' ist so gefasst, dass für die Atome keine Reihenfolge festgelegt ist. Die Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation (im Sinne der obigen Definition) auf der Menge aller Partitionen von Ω.

Satz 4.1.1. *Jede Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über der endlichen Menge Ω ist von einer Partition von Ω erzeugt, in dem Sinne, dass die Elemente von $\mathcal{A}$ gerade diejenigen Mengen sind, die sich als Vereinigung von Atomen gewinnen lassen.*

Bemerke: Die Partition $\mathcal{P}_2$ ist genau dann eine Verfeinerung der Partition $\mathcal{P}_1$, wenn die erzeugte Mengenalgebra $\mathcal{A}_2$ die Mengenalgebra $\mathcal{A}_1$ umfasst.

$$\mathcal{P}_2 \sqsupseteq \mathcal{P}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_2 \supseteq \mathcal{A}_1.$$

(Es sollte klar sein,was es heisst, dass ein Mengensystem ein Teilsystem ein anderen Mengensystems ist. Es geht nicht um die Inklusion im Bereich der Teilmengen von Ω, sondern um Inklusion im Bereich der Mengensysteme über Ω.)

Bemerke auch: Wenn die Partition $\mathcal{P}$ m Atome hat, dann hat die erzeugte Mengenalgebra 2^m Elemente.

Ergänzung: In Analogie zum Besprochenen definiert man auch den Begriff der abzählbaren Partition (einer beliebigen Grundmenge Ω). Die Gesamtheit aller $A \subseteq \Omega$, die man als eine abzählbare Vereinigung der Atome gewinnen kann, heisst die von der Partition erzeugte σ-Algebra. Eine solchermaßen gewonnen σ-Algebra heisst eine diskrete σ-Algebra über Ω.

Wenn Ω eine abzählbare Grundmenge ist, dann ist jede σ-Algebra über Ω von einer (abzählbaren!) Partition erzeugt. Wenn Ω eine nichtabzählbare Grundmenge ist, dann gibt es über Ω auch noch andere σ-Algebren in dem Sinne der

Definition 4.5 (σ-Algebra)**.** Eine Mengenalgebra über Ω heisst eine σ-Algebra, wenn über die von einer Mengenalgebra geforderten Abgeshlossenheitseigenschaften hinaus auch noch gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \quad \in \mathcal{A} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}.$$

4.2 Suprema und Infima in der Mengenlehre

Sprechweise 4.2.1. Es seien a, b Elemente der partiell geordneten Menge $(M, \leq)$. Man sagt, c sei eine Majorante (bzw. Minorante) für a und b, wenn $a \leq c$, $b \leq c$ bzw. $c \leq a$, $c \leq b$. Man sagt in diesem Falle auch, c sei eine obere (bzw. untere) Schranke für die Menge $\{a, b\}$.

Wenn es unter den oberen Schranken für $\{a, b\}$ ein kleinstes Element gibt, dann nennt man dieses (offensichtlich eindeutig bestimmte) Element die kleinste obere Schranke oder das Supremum oder die kleinste gemeinsame Majorante. Es wird mit $a \vee b$ bezeichnet.

Entsprechend ist das Infimum (oder größte untere Schranke) $a \wedge b$ definiert, wenn ein entsprechendes Element existiert.

Wenn es zu einer Teilmenge $A \subseteq M$ eine kleinste obere Schranke gibt, dann wird sie mit $\sup A$ bezeichnet; wenn eine größte untere Schranke existiert, dann wir sie mit $\inf A$ bezeichnet.

(Im Englischen schreibt man $\mathrm{l.u.b.}\ A$ für 'lowest upper bound', und $\mathrm{g.l.b.}\ A$ für 'greatest lower bound' of A.)

Beispiel 4.2.1. Für $m, n \in \mathbb{N}$ schreibt man $m \mid n$, wenn m ein Teiler von n ist und andernfalls $m \nmid n$. $(\mathbb{N}, |)$ ist eine partiell geordnete Menge. Zu jedem Paar a, b existiert die größte untere und die kleinste obere Schranke. Die größte untere Schranke ist der größte gemeinsame Teiler; die kleinste obere Schranke ist das kleinste gemeinsame Vielfache.

Beispiel 4.2.2. Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ (über Ω) wird durch die Inklusion zu einer partiell geordneten Menge. Zu jedem Paar $A, B \in \mathcal{A}$ gibt es in $\mathcal{A}$ eine kleinste obere Schranke, und die ist die mengentheoretische Vereinigung $A \cup B$. Der mengentheoretische Durchschnitt $A \cap B$ ist die größte untere Schranke.

Eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn zu jeder abzählbaren Familie $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{A}$ die kleinste obere und die größte untere Schranke existiert. Es handelt sich in diesem Fall um die Vereinigung bzw. den Durchschnitt dieser abzählbar vielen Mengen. Man notiert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ bzw. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Beispiel 4.2.3. Die übliche Ordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist eine 'totale' oder 'lineare' Ordnung in dem Sinn, dass für s, t entweder s oder t obere Schranke ist: $s \vee t$ ist $= s$ oder $= t$. Zu einer abzählbaren Familie rationaler Zahlen $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibt es in $\mathbb{Q}$ nicht notwendigerweise die kleinste obere oder die größte untere Schranke — auch dann nicht, wenn es obere und untere Schranken gibt, wenn also die Folge $(r_n)_n$ nach oben und unten beschränkt ist.

Die Zahlenachse sollte nach den Vorstellungen der Analytiker dieses Defizit nicht aufweisen; die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, Vervollständigung genannt, schafft Abhilfe.

Definition 4.6. Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heisst ein Verband (lattice im Englischen), wenn zu jedem Paar a, b das Supremum $a \vee b$ und das Infimum $a \wedge b$ existiert. Ein Verband wird σ-vollständig genannt, wenn zu jeder abzählbaren Familie das Supremum und das Infimum existiert.

Ein Verband heisst ein vollständiger Verband, wenn zu jeder Familie $\{a_i : i \in I\}$ das Supremum $\bigvee_{i\in I} a_i$ und das Infimum $\bigwedge_{i\in I} a_i$ existiert.

Beispiel 4.2.4. Das System aller Teilmengen einer Grundmenge Ω wird die Potenzmenge genannt und mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichnet. Die Inklusion macht die Potenzmenge zu einem vollständigen Verband.

Beispiel 4.2.5. Es seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Mengenalgebren über Ω. Der Durchschnitt $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ ist eine Mengenalgebra. Sie ist kleiner (man sagt 'gröber') als die beiden, und offenbar die feinste unter den gemeinsamen Vergröberungen. Wenn $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren sind, dann ist auch der Durchschnitt eine σ-Algebra. In der Gesamtheit der σ-Algebren über Ω gibt es also zu jedem Paar die feinste gemeinsame Vergröberung $\mathcal{A}_0 = \inf\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$.

Gibt es nun auch eine gröbste unter den gemeinsamen Verfeinerungen? Wenn wir an die von Partitionen erzeugten Mengenalgebren über einer endlichen Menge Ω denken, dann ist das klar: die Atome ergeben sich als die Durchschnitte der Atome aus den beiden Partitionen. Ebenso steht des bei den Paaren diskreter σ-Algebren (über einer beliebigen Grundmenge Ω). Auch da ergibt sich die σ-Algebra $\mathcal{A} = \sup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$.

Die Sache ist aber noch viel einfacher dadurch zu erledigen, wenn man bedenkt, dass der Durchschnitt aller derjenigen σ-Algebren, welche $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ umfassen, eine σ-Algebra ist, welche $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ umfasst. Dieser (möglicherweise überabzählbare) Durchschnitt im System der Mengensysteme über Ω ist offenbar die gröbste gemeinsame Verfeinerung $\sup\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$.

Der Übergang zum (durch Inklusion geordneten) System der Mengensysteme über Ω ist erfahrungsgemäß gewöhnungsbedürftig. Er ist aber von entscheidender Bedeutung, nicht nur wenn es um Mengenalgebren und σ-Algebren (über Ω) geht. Der Aufstieg von den Mengen $A \subset \Omega$ über die Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ zum den Systemen von Mengensystemen ist auch in anderen Zusammmenhängen bedetungsvoll. (Dem Fortgeschrittenen wird die von einem Mengensystem erzeugte Topologie in den Sinn kommen.) Wir halten fest:

Satz 4.2.1. *Wenn $\mathcal{S}$ irgendein Mengensystem (über Ω) ist, dann gibt es eine kleinste $\mathcal{S}$ umfassende Mengenalgebra und auch eine kleinste $\mathcal{S}$ umfassende σ-Algebra. Man bekommt diese von $\mathcal{S}$ erzeugten Mengensysteme als Durchschnitte von Mengensystemen.*

Beispiel 4.2.6. Es sei $\mathcal{S}$ das System aller Intervalle auf der reellen Achse $\Omega = \mathbb{R}$. Es existiert eine gröbste $\mathcal{S}$ umfassende σ-Algebra. Sie heisst die Borel-Algebra über $\mathbb{R}$. Es ist nicht die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$, es ist aber unmöglich eine Menge konkret zu beschreiben, die nicht Borel-Menge ist.

4.3 Abzählbare und überabzählbare Mengen.

Man sagt von einer Menge Ω, dass sie die Mächtigkeit n hat, wenn man ihre Elemente in umkehrbar eindeutige Beziehung zu den Zahlen $1, 2, \ldots, n-1, n$ bringen kann. Die leere menge hat die Mächtigkeit 0, die einpunktigen Mengen sind die mit der Mächtigkeit 1, ... Die einfachsten unendlichen Mengen sind die **abzählbar unendlichen** Mengen; das sind diejenigen unendlichen Mengen, deren Elemente aufgezählt werden können.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Prototyp; hier sind die Elemente nämlich bereits in einer speziellen einfachen Abzählung gegeben, nämlich 1, 2, 3, 4, ...

Beispiel 4.3.1. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen kann z. B. folgendermaßen aufgezählt werden: 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, ... Wir zeigen unten, dass die Menge $\mathbb{Q}_+$ der positiven rationalen Zahlen (und dann natürlich auch die Menge $\mathbb{Q}$) abzählbar ist.

Die Mathematiker bevorzugen bei ihren Definitionen die Sprechweise der Abbildungen. Das liest sich in unserem speziellen Fall folgendermaßen:

Definition 4.7. Eine Menge Ω heisst eine Menge der Mächtigkeit n, wenn eine bijektive Abbildung $\beta(\cdot) : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \Omega$ existiert.

Eine Menge Ω wird eine abzählbare Menge genannt, wenn eine surjektive Abbildung $\beta(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \Omega$ existiert.

Die leeren Mengen (als einfacher Sonderfall) bleiben bei dieser Definition aus dem Spiel; sie gelten, wie gesagt, als abzählbare Mengen mit der Mächtigkeit 0. Die endlichen Mengen gelten als spezielle abzählbare Mengen.

Unsere Definition wird von einem gewissenhaften Mathematiker nicht so einfach hingenommen. Er möchte geklärt wissen, dass die Mächtigkeit wohldefiniert ist. Eine Klärung ergäbe sich aus einem sauberen Beweis des folgenden Satzes

Satz 4.3.1. *Wenn es eine bijektive Abbildung von Ω auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, dann gibt es für kein $m \neq n$ eine bijektive Abbildung auf $\{1, 2, \ldots, m\}$.*

Der Beweis, der üblicherweise als Widerspruchsbeweis mit der Methode der vollständigen Induktion geführt wird, würde uns hier nicht weiterbringen, und wird daher ausgelassen.

Die Sprechweise der surjektiven und bijektiven Abbildungen wird im nächsten Unterabschnitt von Grund auf entwickelt. Hier sollte der folgende Hinweis ausreichen:

Definition 4.8. Es seien Ω_1, Ω_2 Mengen Wenn in irgendeiner Weise jedem Element von Ω_1 ein wohlbestimmtes Element aus Ω_2 zugeordnet ist, dann spricht man von einer Abbildung von Ω_1 in Ω_2 (oder auch 'nach' Ω_2,) und man notiert

$$\varphi(\cdot) : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2, \qquad \text{oder auch} \quad \Omega_1 \ni \omega_1 \longmapsto \varphi(\omega_1) \in \Omega_2.$$

Ω_1 heisst der Definitionsbereich von φ oder auch der Urbildbereich. Ω_2 heisst der Zielbereich. Die Menge $\{\varphi(\omega_1) : \omega_1 \in \Omega_1\}$ heisst der Wertebereich von φ.

Bemerkung: Der Wertebereich der auf Ω_1 definierten Abbildung wird manchmal mit $\varphi(\Omega_1)$ bezeichnet. Allgemeiner definiert man auch das φ-Bild einer Teilmenge $A_1 \subseteq \Omega_1$:

$$\varphi(A_1) = \{\omega_2 : \omega_2 = \varphi(\omega_1) \text{ mit } \omega_1 \in A_1\}.$$

Definition 4.9 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Eine Abbildung $\varphi(\cdot) : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ wird eine injektive Abbildung genannt, wenn jedes ω_2 höchstens ein Urbild besitzt, wenn also verschiedene Elemente von Ω_1 auf verschiedene Elemente aus Ω_2 abgebildet werden. Sie heisst eine surjektive Abbildung, wenn jedes ω_2 mindestens ein Urbild besitzt, wenn also der Wertebereich der gesamte Zielbereich ist. Sie heisst bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist, wenn also jedes ω_2 genau ein Urbild $\varphi^{-1}(\omega_2)$ existiert. Dies ist der Fall, wo eine Abbildung $\psi(\cdot) : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ existiert, sodass das Hintereinanderschalten (die 'Verkettung') die Identitätsabbildung ergibt:

$$\psi \circ \varphi(\cdot) = id_{\Omega_1}, \qquad \text{und} \qquad \varphi \circ \psi(\cdot) = id_{\Omega_2}.$$

Die Sprechweise von oben kann durch die folgende Vereinbarung konsolidiert werden:

Eine *Aufzählung* der Menge M ist eine surjektive Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow M$. Eine *einfache Abzählung* oder *Anordnung* ist eine bijektive Aufzählung $\alpha : \mathbb{N} \longleftrightarrow M$. . In einer 'einfachen Abzählung' von M hat demnach jedes $m \in M$ seine wohlbestimmte Nummer, und jede Nummer kommt auch vor. Eine Aufzählung einer unendlichen Menge M kann man z. B. dadurch zu einer Abzählung machen, dass man diejenigen Elemente, die schon früher aufgetreten sind, 'überspringt'. Wenn die abzuzählende Menge die Mächtigkeit n hat, dann stoppt die Abzählung nach genau n Schritten.

Bemerke: Eine aufgezählte Menge nennt man auch eine *Familie mit der Indexmenge* $\mathbb{N}$; man notiert $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bei einer Familie von Objekten kann man nicht nur fragen, ob sie eine Aufzählung einer gegebenen Mengen ist, sondern z. B. auch, mit welcher Häufigkeit ein vorgegebenes Element m vorkommt. Objekte können einer Aufzählung auch unendlich oft aufgerufen werden.

Beispiel 4.3.2 (Cantors erstes Diagonalargument).

Da jede positive rationale Zahl als Quotient zweier natürlicher Zahlen dargestellt werden kann, liefert die folgende Aufzählung aller Paare (m, n) natürlicher Zahlen den Beweis, dass $\mathbb{Q}_+$ eine abzählbare Menge ist.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \\
 & \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & & & & & &
\end{array}$$

Das Diagonalelement wird manchmal auch Cauchy zugeschrieben. Mit derselben Idee sehen wir:

Satz : Seien $M_1, M_2, \ldots$ abzählbare Mengen
$M_1 = \{m_{11}, m_{12}, m_{13}, \ldots\}$
$M_2 = \{m_{21}, m_{22}, m_{23}, \ldots\}$
$\cdots\cdots\cdots$
Dann ist auch $M = \bigcup\limits^{\infty} M_i$ abzählbar.

Beispiel 4.3.3. Das einfachste Beispiel einer **nichtabzählbaren** Menge ist wohl die Menge Ω aller $\{0,1\}$-Folgen

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \quad \text{mit} \quad \omega_i \in \{0,1\}$$

G. Cantor hat die Nichtabzählbarkeit mit seinem berühmten Diagonalelement (in Form eines Widerspruchsbeweises) folgendermaßen bewiesen:

Angenommen, wir hätten eine Aufzählung $\Omega = \left\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \ldots\right\}$. Jedes $\omega^{(i)}$ ist eine Folge

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \left(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}, \ldots\right) \\ \omega^{(2)} &= \left(\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}, \ldots\right) \\ \cdots \end{aligned}$$

Wir können dann eine Folge $\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots)$ konstruieren, welche in der Aufzählung nicht vorkommt. Wir konstruieren z.B.

$$\omega_1^* = 1 - \omega_1^{(1)}, \;\; \omega_2^* = 1 - \omega_2^{(2)}, \;\; \omega_3^* = 1 - \omega_3^{(3)}, \;\; \ldots$$

Die Folge ω^* unterscheidet sich im n-ten Eintrag von $\omega^{(n)}$. ω^* kommt also in der (hypothetischen) Aufzählung nicht vor. q.e.d.

Satz 4.3.2. *Die Menge der reellen Zahlen im Intervall* $[0,1]$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. *Jedes* $x \in [0,1]$ *besitzt eine Dualbruchentwicklung*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \cdot \frac{1}{2^n} \;\; \textit{mit} \;\; \omega_n \in \{0,1\}\,.$$

Nur für die sog. Dualzahlen $\frac{k}{2^N}$ $\left(N \in \mathbb{N}\,,\;\; k \in \{1, \ldots, 2^N - 1\}\right)$ *ist die Darstellung nicht eindeutig; für sie gibt es zwei Darstellungen, die eine mit nur endlich vielen Einsen und die andere mit nur endlich vielen Nullen. Die Nichtabzählbarkeit von* $[0,1]$ *ergibt sich aus der Nichtabzählbarkeit von* Ω.

Bemerke : Ist M eine abgezählte unendliche Menge, $\mathbb{N} \longleftrightarrow M$, also $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$, dann kann man die Teilmengen A mit den Indikatorfunktionen auf der Indexmenge $\mathbb{N}$, d. h. mit den $\{0,1\}$-Folgen identifizieren:

$$A \leftrightarrow 1_A(\cdot) \text{ auf } \mathbb{N} \text{ mit } \quad 1_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad m_n \in A \\ 0 & \text{wenn} \quad m_n \notin A \end{cases}$$

4.4 Cartesische Produkte, Familien mathematischer Objekte.

Definition 4.10 (Cartesisches Produkt).
Wenn Ω_1 und Ω_2 Mengen sind, dann definiert man das cartesische Produkt $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ als die Menge der geordneten Paare

$$\Omega = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \quad \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\big\}.$$

Cartesische Produkte werden sehr vielseitig verwendet. Man kann z. B. eine reellwertige Funktion $f(\cdot)$ auf Ω durch ihren Graph ('Funktionsgraph') als eine Teilmenge des cartesischen Produkts $\mathbb{R} \times \Omega$ präsentieren:

$$\mathsf{Gr}_f = \{(y, \omega) : y = f(\omega)\}.$$

Es sind natürlich nur sehr spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}\times\Omega$, die als Graphen einer Funktion auftreten. A ist genau dann der Graph einer auf Ω definierten reellen Funktion, wenn zu jedem $\omega \in \Omega$ genau ein y existiert, sodass $(y, \omega) \in A$. Es gibt Situationen, in welchen die Vorstellungsweis mit dem Funktionsgraphen intuitiver ist als die oben besprochene Vorstellungsweise der Abbildung (oder 'Zuordnung')

$$f(\cdot) : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Omega \ni \omega \longmapsto f(\omega).$$

Wenn $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ nichtleere Mengen sind, dann ist ihr cartesisches Produkt die Menge $\Omega_1 \times \Omega_2, \times \ldots \times \Omega_n$ aller geordneten n-Tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. (Wenn eine der Mengen leer ist, dann ist (nach Übereinkunft) das cartesische Produkt eine leere Menge.)

Wenn die Ω_i endliche Mengen sind mit $|\Omega_i| = m_i$, dann hat das cartesische Produkt die Mächtigkeit $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$. Wenn die Ω_i abzählbar sind, dann ist auch das carteische Produkt abzählbar. Im Fall $n = 2$ beweist man das mit dem Cantor'schen Diagonalverfahren; und man geht dann weiter gemäß

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \big(\Omega_1 \times \Omega_2\big) \times \Omega_3, \qquad \text{oder auch} \quad = \Omega_1 \times \big(\Omega_2 \times \Omega_3\big).$$

Hier kann man auch auf ein Art Distributivgesetz hinweisen: Wenn Ω_1 und Ω_2 partitioniert sind, dann gibt das Anlass zu einer Partionierung des cartesischen Produkts, derenAtome cartesische Produkte sind.

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \big(\sum_i A_i\big) \times \big(\sum_j B_j\big) = \sum_{ij} A_i \times B_j.$$

(Zur Erinnerung: das Summenzeichen bedeutet eine (endliche oder abzählbar unendliche) disjunkte Vereinigung.)

Damit sollte genug gesagt sein über die Mengen, die als cartesische Produkte entstehen. Wir müssen uns jetzt mit den Bezeichnungsweisen für die Elemente in einem cartesischen Produkt befassen, wobei wir beliebige Wertebereiche Ω_i und allgemeinere endliche oder abzählbare Indexmengen zulassen.

Sprechweise (Familien mathematischer Objekte).
Es sei I eine Menge. Eine **Familie** mit der Indexmenge I liegt vor, wenn jeden i aus I ein Objekt o_i zugeordnet ist. Dabei kann o_i aus irgendeiner Menge Ω_i stammen. Man notiert $\{o_i : i \in I\}$ oder $(o_i)_{i\in I}$. Man spricht auch von einer Schar mit dem Scharparameter i aus I, oder im Englischen 'family' oder 'collection of objects, parametrized by $i \in I$'. Das Objekt o_i heisst der Eintrag in der Position i, oder im Englischen 'entry in position i'.
Eine Familie zu einer endlichen Indexmenge nennt man auch ein **I-Tupel**. Ein n-Tupel ist eine Familie mit einer Indexmenge der Mächtigkeit n. Häufig ist $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ und man notiert dann auch $\{o_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ oder einfach $(o_1, o_2, \ldots, o_n)$.

Wenn die Indexmenge I abzählbar ist, dann spricht man auch von einer **Folge** von Objekten, indiziert mit den Elementen der abzählbaren Menge I. Häufig ist $I = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ oder $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und man notiert $\{o_i : i = 1, 2, \ldots\}$ bzw. $\{o_i : i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Auch die Notationen $(o_1, o_2, \ldots)$ bzw. $(o_0, o_1, o_2, \ldots)$ sind gebräuchlich.

Bemerke: Wenn $\{v_i : i \in I\}$ eine endliche Familie von Vektoren (in irgendeinem Vektorraum V) ist, dann ist $\sum_{i\in I} v_i$ ein wohlbestimmter Vektor. Es kommt nicht darauf an, dass man die Indizes irgendwie anordnet, die Reihenfolge der Summanden spielt keine Rolle. Wenn die Indexmenge partioniert ist, $I = I_1 + I_2$ (disjunkte Vereinigung), dann gilt offenbar $\sum_{i\in I} v_i = \sum_{i\in I_1} v_i + \sum_{i\in I_2} v_i$.

Eine wichtige Rolle spielen auch die Familien, deren Indexmenge als ein cartesisches Produkt gegeben ist.

Sprechweise. Eine $I \times J$**-Matrix** A mit Einträgen aus der Menge O liegt vor, wenn jedem Paar $ij \in I \times J$ eine Element o_{ij} aus O zugeordnet ist. Man notiert auch $A = (o_{ij})_{ij\in I\times J}$. Die $i \in I$ heissen die Zeilenindizes der Matrix, die $j \in J$ heissen die Spaltenindizes. Das Objekt o_{ij} heisst der Eintrag in der Position ij oder auch der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Eine $m \times n$-Matrix ist eine $I \times J$-Matrix, wo $|I| = m$, $|J| = n$.

Im Falle der speziellen Indexmengen $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ kann man von der ersten, zweiten,... Zeile bzw. Spalte sprechen. Wenn man eine $n \times m$-Matrix auf Papier notiert, dann muss man sich für eine Aufzählung der Indexmengen entscheiden; man liest man von links nach rechts und von oben nach unten.

$$A = (o_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \ldots & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22} & \ldots & o_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o_{m1} & o_{m2} & \ldots & o_{mn} \end{pmatrix}$$

Warnung: Die Menge aller I-Tupel mit Einträgen aus der Objektmenge O hat zunächst einmal **keinerlei algebraische Struktur**. Wir müssen im konkreten Fall festlegen, welche Rechenoperationen wir ins Spiel bringen wollen.

Zeilen und Spalten

Wenn wir die I-Tupel mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$ (in der naheliegenden Weise) zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum machen, dann sollte man einen Unterschied machen zwischen dem Raum der **I- Spalten** $\mathbb{K}^I_{\mathsf{Sp}}$ und dem Raum der **I- Zeilen** $\mathbb{K}^I_{\mathsf{Z}}$. Man muss beachten: I-Zeilen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ kann man linear kombinieren, ebenso I-Spalten. Eine I-Spalte kann man aber nicht zu einer I-Zeile dazuaddieren.

In der 'Vektorrechnung' arbeitet man nicht nur mit Tupeln von Skalaren, sondern häufig auch mit Tupeln von Vektoren. Beispielsweise ist ein 'aufspannendes System' oder speziell eine 'Basis' in der Regel als eine **Familie von Vektoren** $\{\mathbf{u}_i : i \in I\}$ gegeben, mit einer bestimmten endlichen Indexmenge, die nicht angeordnet ist. Auch hier mag es manchmal hilfreich sein, darauf hinzuweisen, ob man sich das Tupel als eine Zeile oder als eine Spalte aufgelistet denken will.

Eine $I \times J$-Matrix versteht man manchmal gerne als ein Tupel von I-Spalten, nebeneinandergeschrieben mit dem Scharparameter $j \in J$. Manchmal denkt man dabei lieber an ein Tupel von J-Zeilen, untereinandergeschrieben mit dem Scharparameter $i \in I$.

Die Unterteilung von Familien und Matrizen

Eine Familie von Objekten zerteilt man, indem man die Indexmenge zerteilt. (Der Fachmann sagt 'partitioniert') Die Partition $I = I_1 + I_2$ (disjunkte Vereinigung) macht aus einer Familie mit dem Scharparameter $i \in I$ zwei Familien, nämlich $\{o_i : i \in I_1\}$ und $\{o_i : i \in I_2\}$. Andererseits: Wenn zwei Familien mit disjunkte Pametermengen I_1 und I_2 gegeben sind, dann kann man diese zu einer Familie mit der Parametermenge $I = I_1 + I_2$ zusammenfügen.

Wichtig ist das Zerteilen von Matrizen, welches durch eine Partitionierung der Spaltenmenge (oder der Zeilenmenge) entsteht. Wenn wir bei einer Matrix A deutlich machen wollen, dass es sich um eine $I \times J$-Matrix handelt, dann notieren wir $A = A^I{}_J$. Wir denken besonders an Matrizen mit Einträgen aus einem Körper. Für $A = A^I{}_J$ und $B = B^J{}_K$ ist das Produkt eine wohldefinierte $I \times K$-Matrix $A \cdot B = C^I{}_K$.

Wenn die Indexmengen zerlegt sind, dann schreiben wir manchmal

$$A^{I_1+I_2}{}_{J_1+J_2} = \begin{pmatrix} A^{I_1}_{J_1} & A^{I_1}_{J_2} \\ \\ A^{I_2}_{J_1} & A^{I_2}_{J_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{I_1}{}_{J_1} & A^{I_1}{}_{J_2} \\ \\ A^{I_2}{}_{J_1} & A^{I_2}{}_{J_2} \end{pmatrix}.$$

Unterteilte Matrizen werden wir nur dann multiplizieren, wenn die Partition der Spaltenmenge der ersten Matrix $J = J_1 + J_2$ dieselbe ist, wie die Partition der Zeilenmenge des zweiten Faktors. In diesem Fall haben wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.5 Abbildungen, Pullback.

Wie wir oben schon erörtert haben, liegt eine Abbildung φ von Ω_1 nach Ω_2 genau dann vor, wenn jedem $\omega_1 \in \Omega_1$ genau ein $\omega_2 = \varphi(\omega_1) \in \Omega_1$ zugeordnet ist.

Definition 4.11 (Volles Urbild)**.**
Zur Abbildung $\varphi(\cdot) : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ definiert man die 'Volles-Urbild-Abbildung' als die Abbildung $\varphi^\sharp(\cdot) : \mathfrak{P}\big(\Omega_1\big) \longleftarrow \mathfrak{P}\big(\Omega_2\big)$, mit

$$\varphi^\sharp(A_2) = \{\omega_1 : \varphi(\omega_1) \in A_2\} \subseteq \Omega_1 \quad \text{für} \quad A_2 \subseteq \Omega_2.$$

Die Abbildung φ respektiert offensichtlich die Mengenoperationen, d. h.

1. $\varphi^\sharp(\Omega_2) = \Omega_1, \qquad \varphi^\sharp(\emptyset) = \emptyset,$
2. $\varphi^\sharp(A_2' \cap A_2'') = \varphi^\sharp(A_2') \cap \varphi^\sharp(A_2''), \qquad \varphi^\sharp(A_2' \setminus A_2'') = \varphi^\sharp(A_2') \setminus \varphi^\sharp(A_2''),$
3. $\varphi^\sharp\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \varphi^\sharp(A_i)$ für alle Familien $\{A_i : i \in I\}$.

Daraus ergibt sich

1. Die Abbildung $\varphi^\sharp$ ordnet jeder abzählbaren Partition von Ω_2 eine abzählbare Partition Ω_1 zu
$$\Omega_2 = \sum A_i \quad \Longrightarrow \quad \Omega_1 = \sum \varphi^\sharp(A_i),$$
2. Wenn $\mathcal{A}_2$ eine Mengenalgebra (oder σ-Algebra) über Ω_2 ist, dann ist $\mathcal{A}_1 = \{\varphi^\sharp(A_2) : A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ eine Mengenalgebra (oder σ-Algebra) über Ω_1.

Hinweis: In der Stochastik hat man häufig die folgende Situation: Auf einem Ω_2 (etwa $\Omega_2 = \mathbb{R}$) ist eine σ-Algebra $\mathcal{A}_2$ ausgezeichnet (etwa die Borelalgebra). Jede Abbildung $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \big(\Omega_2, \mathcal{A}_2\big)$ 'erzeugt' dann eine σ-Algebra über Ω_1.

Neben den von den Abbildungen φ erzeugten σ-Algebren interessiert man sich auch für die von den Abbildungen erzeugten Äquivalenzrelationen. Wir holen weiter aus:

Definition 4.12.
Eine zweistellige Relation $\sim$ über Ω heisst eine Äquivalenzrelation, wenn gilt

$$(i)\, \omega \sim \omega, \qquad (ii)\, \omega' \sim \omega'' \Rightarrow \omega'' \sim \omega', \qquad (iii)\, \big(\omega' \sim \omega'',\, \omega'' \sim \omega'''\big) \Rightarrow \omega' \sim \omega'''.$$

Bemerke: Die Menge aller Äquivalenzrelationen über Ω ist partiell geordnet. Die schärfste Äquivalenzrelation ist die Gleichheit, die lascheste ist die triviale Äqivalenzrelation, bei welcher alle ω als äquivalent angesehen werden. Es handelt sich in der Tat um einen vollständigen Verband. Zu jeder Familie von Äquivalenzrelationen $\{\underset{i}{\sim} : i \in I\}$ gibt es eine lascheste gemeinsame Verschärfung und eine schärfste gemeinsame Abschwächung.

Wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation über Ω ist, dann ordnet man jedem $\omega \in \Omega$ seine Äquivalenzklasse $A_\omega = \{\omega' : \ \omega' \sim \omega\}$ zu. Die Äquivalenzklassen zu ω' und ω'' sind entweder disjunkt oder gleich. Die Elemente in einer Äquivalenzklasse nennt man die Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse. Die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen ist eine Menge von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten, eine Menge im Sinne von Cantor also. Man bezeichnet sie gelegentlich mit $(\Omega, \sim)$. In Spezialfällen sind aber auch andere Notationen im Gebrauch.

Definition 4.13. Zu einer Abbildung $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ definiert man die von φ erzeugte Äquivalenzrelation auf dem Urbildraum: $\quad \omega_1' \underset{\varphi}{\sim} \omega_1'' \Leftrightarrow \varphi(\omega_1') = \varphi(\omega_1'')$.

Man nennt die Abbildung φ verträglich mit einer vorgegebenen Äquivalenzrelation $\sim$, wenn $\underset{\varphi}{\sim}$ gröber ist als $\sim$, wenn also gilt

$$\omega_1' \sim \omega_1'' \Longrightarrow \omega_1' \underset{\varphi}{\sim} \omega_1' \quad \text{d. h.} \quad \omega_1' \sim \omega_1'' \Longrightarrow \varphi(\omega_1') = \varphi(\omega_1'').$$

Wenn φ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich ist, dann kann man φ als eine Abbildung verstehen, die den Äquivalenzklassen Ω_1 Punkte in Ω_2 zuordnet

$$\varphi : \ (\Omega_1, \sim) \longrightarrow (\Omega_2, =).$$

Es ist unnötig, für die Abbildung der Äquivalenzklassen einen neuen Namen einzuführen. Jedem Repräsentanten ω_1 einer Äquivalenzklasse wird dasselbe Bild $\varphi(\omega_1)$ zugeordnet.

Beispiel 4.5.1.
Es sei p eine natürliche Zahl. Auf der Grundmenge $\mathbb{Z}$ wird die 'Äquivalenz modulo p' definiert: $\quad a \underset{p}{\sim} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b$ ist durch p teilbar.

Es gibt genau p Äquivalenzklassen; man nennt sie die Restklassen modulo p; Repräsentanten sind z. B. die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Die Menge der Restklassen heisst der Restklassenring, und im Falle, wo p eine Primzahl ist, der Restklassenkörper modulo p. Er wird mit $(\mathbb{Z}_p, =, 0, 1, +, \cdot)$, manchmal auch mit $(\mathbb{Z}. \underset{p}{\sim}, 0, 1, +, \cdot)$ bezeichnet. Addition und Multiplikation sind mit der Äquivalenz modulo p verträgliche Verknüpfungen.

Bemerke: Wenn es für eine Äquivalenzrelation über Ω nur abzählbar viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt, dann sind diese die Atome einer Partition von Ω. Umkehrt liefert jede Partition eine Äquivalenzrelation mit abzählbar vielen Äquivalenzklassen. Eine mit einer solchen Äquivalenzrelation verträgliche Abbildung ist konstant auf jedem Atom.

Zurück zur Idee des vollen Urbilds:

Definition 4.14. Sei $\varphi(\cdot) : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung. Für jede (reellwertige) Funktion f_2 auf Ω_2 definiert man die 'zurückgenommene' Funktion $f_1 = \varphi^\sharp(f_2)$ als die Funktion auf Ω_1 mit $f_1(\omega_1) = f_2(\varphi(\omega_1))$.
Als Beispiel: Wenn A_1 das volle Urbild von A_2 ist, $A_1 = \varphi^\sharp(A_2)$, dann ist die Zurückgenommene der Indikatorfunktion 1_{A_2} die Indikatorfunktion 1_{A_1}, $1_{A_1} = \varphi^\sharp(1_{A_2})$.

Pullback: Die auf Funktionen angewandte Abbildung $\varphi^\sharp$ wird die Pullback-Abbildung genannt, während die auf Mengen angewandte Abbildung die Volles-Urbild-Abbildung genannt wird. Eine Unterscheidung in der Notation ist unnötig.

Definition 4.15 (Verkettung von Abbildungen).
Gegeben seien Abbildungen $\varphi_1: \quad \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2, \qquad \varphi_2: \quad \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3.$
Die Verkettung (oder das 'Hintereinanderschalten') liefert einerseits die Punktabbildung

$$\chi(\cdot) = \varphi_2 \circ \varphi_1(\cdot), \qquad \Omega_1 \ni \omega_1 \longmapsto \chi(\omega_1) = \varphi_2\big(\varphi_1(\omega_1)\big) \in \Omega_3,$$

und andererseits die Funktionenabbildung

$$\chi^\sharp(\cdot) = \varphi_1^\sharp \circ \varphi_2^\sharp(\cdot): \qquad f_3 \longmapsto \chi^\sharp(f_3) = \varphi_1^\sharp\big(\varphi_2^\sharp(f_3)\big).$$

Beachte: Die Reihenfolge der Partner bei der Verkettung ist umzukehren.

Didaktischer Hinweis: Die Idee des Pullbacks muss nicht auf reellwertige Funktionen beschränkt werden. Sie ist da aber besonders naheliegend, weil man die reellwertigen Funktionen auffassen kann als verallgemeinerte Treppenfunktionen (d. h. Linearkombinationen von Indikatorfunktionen), sodass man da also wirklich nahe an der Vorstellungsweise der Volles-Urbild-Abbildung bleiben kann. Man bemerke, dass bei einer Pullback-Abbildung das Bild einer Summe von Funktionen die Summe der Bilder ist. Das Pullback-Bild eines punkweisen Produkts ist das Produkt der zurückgenommenen Funktionen.

$$\varphi^\sharp(f_2' + f_2'') = \varphi^\sharp(f_2') + \varphi^\sharp(f_2''), \qquad \varphi^\sharp(f_2' \cdot f_2'') = \varphi^\sharp(f_2') \cdot \varphi^\sharp(f_2'').$$

Dem Anfänger, (der erfahrungsgemäß zunächst einmal Schwierigkeiten mit der Idee des Pullback hat) wird empfohlen, zuerst einmal an den Pullback für reellwertige Funktionen zu denken, bevor er den Begriff auf allgemeinere Objekte zu übertragen versucht. In der Literatur wird übrigens die Pullback-Abbildung gern mit $\varphi^*(\cdot)$ bezeichnet. Wir wollen diesem Brauch nicht folgen, weil das Symbol * schon an allzuvielen Stellen benützt wird.

5 Vollständige metrische Räume (2 A)

Definition 5.1 (Metrischer Raum)**.**
Eine abstrakte Punktmenge S wird dadurch zu einem **metrischen Raum**, dass man eine nichtnegative Funktion $d(\cdot,\cdot)$ auf $S \times S$ auszeichnet, welche den Forderungen an eine Metrik genügt.

Definition 5.2 (Semi-Metrik)**.**
Eine Funktion $d(\cdot,\cdot)$ heißt eine **Semi-Metrik**, wenn gilt

(i) $d(P,Q) \geq 0$ für alle P,Q, $\quad d(P,P) = 0$

(ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$ ('Symmetrie')

(iii) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ ('Dreiecksungleichung')

Eine Semi-Metrik wird eine Metrik genannt, wenn gilt

(iv) $d(P,Q) = 0 \Longrightarrow P = Q$

Bemerke: Eine Semi-Metrik $d(\cdot,\cdot)$ liefert eine Äquivalenzrelation $P \sim Q \Longleftrightarrow d(P,Q) = 0$, und sie liefert eine Metrik auf der Menge aller Äquivalenzklassen.

Definition 5.3 (Kugeln, Umgebungen, offene Mengen)**.**
Es sei $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum.
Für $P^* \in S$ und $\varepsilon > 0$ heisst die Menge $B_\varepsilon(P^*) = \{Q :\ d(Q,P^*) < \varepsilon\}$ die offene Kugel mit Mittelpunkt P^* und Radius ε.

Eine Menge B heisst eine Umgebung von P^*, wenn $\exists \varepsilon > 0 : B \supset B_\varepsilon(P^*)$.

Eine Menge U heisst eine (für die Metrik $d(\cdot,\cdot)$)) offene Menge, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist; d. h. wenn gilt

$$\forall P \in U\ \exists \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(P^*) \subset U.$$

Die Menge $B_{\leq\varepsilon}(P^*) = \{Q :\ d(Q,P^*) \leq \varepsilon\}$ heisst die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt P^* und Radius ε.

Definition 5.4. Man sagt von einer Menge $\tilde{S}$, sie sei dicht im metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$, wenn $\tilde{S} \cap B_\varepsilon(P) \neq \emptyset$ für jede Kugel $B_\varepsilon(P)$.

Definition 5.5. Man sagt von einem metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ er sei separabel, wenn eine abzählbare dicht Teilmenge existiert.

Es sei $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum. Durch die Einschränkung der Metrik auf eine Teilmenge B wird diese Menge B zu einem metrischen Raum. Die Metrik heisst die auf B induzierte Metrik. auf B induzierten Metrik. Man überlegt sich leicht: Wenn $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ separabel ist, dann ist auch jede Teilmenge B mit der induzierten Metrik separabel.

5.1 Cauchy-Folgen, Vervollständigung, Folgenkompaktheit.

Definition 5.6 (Konvergente Folge, Cauchy-Folge).
Man sagt von einer Punktfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$, dass sie gegen den Punkt P^* konvergiert, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists N : \forall n \geq N \quad d(P_n, P^*) < \varepsilon.$$

Man nennt die Punktfolge in diesem Fall eine konvergente Folge mit dem Limes P^*; und man notiert $P^* = \lim_{n\to\infty} P_n$.

Man sagt, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists N : \forall m, n \geq N \quad d(P_m, P_n) < \varepsilon.$$

Definition 5.7 (Vollständigkeit). Ein metrischer Raum heisst ein vollständiger metrischer Raum, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Hinweis: Die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ garantiert, dass die reelle Achse mit dem üblichen Abstand ein vollständiger metrischer Raum ist. Wir werden das noch ausführlich diskutieren.

Definition 5.8 (Äquivalente Cauchy-Folgen).
Man sagt von zwei Cauchy-Folgen $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(P''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sie seien äquivalent, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists N : \forall m, n \geq N \quad d(P'_m, P''_n) < \varepsilon.$$

Bemerke: Es handelt sich in der Tat um eine Äquivalenzrelation: Jede Cauchy-Folge ist zu sich selber äquivalent, und die Relation ist sowohl symmetrisch als auch transitiv.

Satz 5.1.1. *Sind $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, so konvergiert die Zahlenfolge $d(P_n, Q_n)$ gegen einen Wert d, der nur von den Äquivalenzklassen abhängt. Es gilt*

$$\exists d\,\forall \varepsilon > 0\,\exists N : \forall m, n \geq N \quad \big|d(P_m, Q_n) - d\big| < \varepsilon.$$

Es gilt $d = 0$ genau dann, wenn die Folgen äquivalent sind.

Beweis. *Wir wählen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Zahl N so groß, dass gilt*

$$\forall m, n \geq N : \quad d(P_m, P_n) < \varepsilon/2,\ d(Q_m, Q_n) < \varepsilon/2$$

Dies machen wir für $\varepsilon = 1/k$. Für die dazu konstruierten N_k ist die Zahlenfolge $d_k = d(P_{N_k}, Q_{N_k})$ eine Cauchy-Folge; denn für alle $m, n \geq N_k$ gilt $d(P_m, Q_n) < \varepsilon = 1/k$. Den Limes $d = \lim_{k\to\infty} d_k$ nennen wir den asymptotischen Abstand der beiden Cauchy-Folgen.

Wenn $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalente Folgen sind, dann wählen wir N zu ε so groß, dass auch noch gilt $\forall m, n \geq N : \quad d(P'_m, P_n) < \varepsilon/2,\ d(Q'_m, Q_n) < \varepsilon/2$. Wir haben dann $\forall m, n \geq N \quad \big|d(P'_m, Q'_n) - d\big| < 2\varepsilon$.

Wenn $\bar{P}$ *die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bezeichnet und* $\bar{Q}$ *die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dann bezeichnen wir mit* $\bar{d}(\bar{P},\bar{Q})$ *den asymptotischen Abstand der Äquivalenzklassen.*

Sind $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folgen mit den asymptotischen Abständen* $\bar{d}(\bar{P},\bar{Q})$, $\bar{d}(\bar{Q},\bar{R})$, $\bar{d}(\bar{P},\bar{R})$*, dann gilt* $\bar{d}(\bar{P},\bar{Q})+\bar{d}(\bar{Q},\bar{R})\geq\bar{d}(\bar{P},\bar{R})$.

Definition 5.9 (Vervollständigung)**.**
Es sei $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum und $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ ein vollständiger metrischer Raum. Man sagt, dass T als Vervollständigung von S erscheint, wenn eine isometrische Abbildung $\iota:\ S\longrightarrow T$ gegeben ist, wobei die Bildmenge $\iota(S)$ in T dicht ist. Man sagt in diesem Fall auch, $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ sei eine Vervollständigung von $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ bezüglich der Injektion ι.

Bemerke: Wenn T als Vervollständigung von S erscheint, dann gilt: $(P_n)_n$ ist genau dann eine Cauchyfolge in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$, wenn $(\iota(P_n))_n$ eine konvergente Folge in $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ ist. Ausserdem gilt: Jeder Punkt in T ist der Limes einer Folge $(\iota(P_n))_n$.

Ein Beispiel ist die reelle Achse $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik. Sie erscheint als Vervollständigung der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen. Die Injektion ist die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge des metrischen Raums $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ ist ein separabler vollständiger metrischer Raum.

Satz 5.1.2 (Existenz und Eindeutigkeit der Vervollständigung)**.** *Jeder metrische Raum kann vervollständigt werden; er besitzt eine Vervollständigung. Die Vervollständigung ist eindeutig in dem folgenden Sinn: Sind* $\iota_1:\ S\longrightarrow T_1$ *und* $\iota_2:\ S\longrightarrow T_2$ *Vervollständigungen, dann existiert genau eine isometrische Bijektion* $\tilde{\iota}:T_1\longrightarrow T_2$ *mit* $\tilde{\iota}\circ\iota_1=\iota_2$.

Beweis. *Die Eindeutigkeit liegt auf der Hand. Die Existenz haben wir schon fast vollständig bewiesen. Wir haben gezeigt: Die Menge* $\bar{S}$ *der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in* S *ist ein metrischer Raum bzgl. des asymptotischen Abstands* $\bar{d}(\cdot,\cdot)$*. Die Injektion ist die Abbildung, die jedem* $P^*\in S$ *die Folge zu, die konstant gleich* P^* *ist. Es bleibt zu zeigen, dass* $\big(\bar{S},\bar{d}(\cdot,\cdot)\big)$ *vollständig ist. Sei also* $(\bar{P}_n)_n$ *eine Cauchy-Folge in* $\bar{S}$*. Wir wählen zu jedem* $\bar{P}_n$ *ein* $P_n\in S$*, sodass für die Folge* $\tilde{P}_n$*, die konstant gleich* P_n *ist, gilt* $\bar{d}(\tilde{P}_n,\bar{P}_n)<\frac{1}{n}$*. Die Folge* $(P_n)_n$ *ist eine Cauchy-Folge mit einem Limes* $P^*\in\bar{S}$*, und der Abstand der* $\bar{P}_n$ *von der Folge konstant* P^* *konvergiert nach* 0*.*

Cauchy-Familien: Wir haben hier immer von Cauchy-Folgen gesprochen. Folgen sind im üblichen Jargon abzählbare Familien $\{P_i : i\in I\}$, wo die Indexmenge I die Menge der natürlichen Zahlen ist, wo also die Indexmenge aufgezählt vorliegt. Für den Begriff der Cauchy-Folge ist nun aber die Aufzählung irrelevant. Wir nennen eine Familie $\{P_i : i\in I\}$ mit einer abzählbar unendlichen Indexmenge I eine Cauchy-Familie, wenn gilt

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, I' \text{ endlich}, I'\subset I\ :\quad \forall\, i,j\notin I'\quad d(P_i,P_j)<\varepsilon.$$

Wenn $\{P_i : i\in I\}$ eine Cauchy-Familie ist, dann ist offenbar für jede Aufzählung der Indexmenge ($\mathbb{N}\ni n\mapsto i_n\in I$ bijektiv) die Folge $(P_{i_n})_n$ eine Cauchy-Folge. Umgekehrt:

Die Familie $\{P_i : i \in I\}$ ist eine Cauchy-Familie. wenn für irgendeine Aufzählung der Indexmenge die Folge $(P_{i_n})_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Eine notwendige hinreichende Bedingung dafür, dass die Folge $(P_n)_n$ nach P^* konvergiert, ist offenbar die Bedingung, dass die Folge der Abstände von P^* eine Nullfolge ist. In Formeln $\lim P_n = P^* \iff \lim d(P_n, P^*) = 0$. Wenn man dieses 'Kriterium' benützen will, um die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, dann muss man den Limespunkt P^* kennen.

Sprechweise (Das sog. Cauchy-Kriterium)**.**
In einem vollständigen Raum weist man die Konvergenz einer Folge meist dadurch nach, dass man sich vergewissert, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Die Identifikation des Limes kann dann in einem zweiten Schritt erfolgen. Dieses Vorgehen läuft unter dem Namen Cauchy-Kriterium mit anschliessender Identifikation des Grenzwerts.

Die Ordnungsvollständigkeit der erweiterten reellen Achse $\bar{\mathbb{R}}$.
Im Falle der reellen Achse ist die Vollständigkeit im Sinne der Metrik eng verbunden mit der Vollständigkeit im Sinne der Ordnung.

Satz 5.1.3. *Wenn eine aufsteigende Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, dann konvergiert sie gegen $x^* = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Zu jeder nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen $A \subset \mathbb{R}$ existiert eine aufsteigende A-Folge, die gegen die kleinste obere Schranke $\sup A$ konvergiert.

Der Beweis liegt auf der Hand. Wenn $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, dann ist $x^* - x_n = \mathtt{dist}(x_n, x*)$ eine nach 0 absteigende Folge. Andererseits: Wenn $x^* = \sup\ A$, dann gibt es im Intervall $(-\infty, x^* - \frac{1}{n}]$ ein $x_n \in A$. Die Folge $\tilde{x}_n = \max\{x_k : k \leq n\}$ leistet das Gewünschte.

Sprechweise (Konvergenz gegen $+\infty$)**.**
Man sagt von einer reelle Zahlenfolge $(a_n)_n$, dass sie nach $+\infty$ strebt und notiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{wenn gilt} \quad \forall M > 0\, \exists N : \forall n \geq N \quad a_n \geq M.$$

Entsprechend ist die Konvergenz gegen $-\infty$ definiert, oder äquivalent damit, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$ Bemerke: Wenn eine Zahlenfolge nach oben unbeschränkt ist, dann existiert eine monotone A-Folge, die gegen $+\infty$ strebt.

Es sei nebenher bemerkt, dass es die Konvergenz gegen ∞ auch bei den komplexen Zahlen gibt. Man sagt von einer Folge komplexer Zahlen $(z_n)_n$, dass sie gegen ∞ strebt, wenn gilt

$$\forall M > 0\, \exists N : \forall n \geq N \quad |z_n| \geq M.$$

Man spricht in diesen Fällen auch von uneigentlicher Konvergenz der Zahlenfolge oder (in älteren Lehrbüchern) von bestimmter Divergenz.

Die erweiterte reelle Achse $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ist ein vollständiger Verband, d. h. : Jede Teilmenge A besitzt in $\bar{\mathbb{R}}$ eine kleinste obere Schranke $\sup A$ und eine größte untere Schranke $\inf A$. Wir diskutieren jetzt eine Konstruktion mit Folgen in einem σ-vollständigen Verband $(L, \leq)$, die sowohl in den elementaren Betrachtungen über reelle Zahlenfolgen als auch (später!) in der Theorie der σ-Algebren eine Rolle spielt.

Satz 5.1.4 (Oberer und unterer Limes).
In einem σ-vollständigen Verband $(L, \leq)$ besitzt jede Folge $(a_n)_n$ einen 'oberen Limes' $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und einen 'unteren Limes' $\liminf_{n\to\infty} a_n$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_m \downarrow \sup\{a_n : n \geq m\}, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_m \uparrow \inf\{a_n : n \geq m\}.$$

In jedem Fall gilt $\quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Mit Hilfe der Konstruktion erhalten wir im Falle der reellen Achse ein beliebtes 'Konvergenzkriterium' für Folgen im metrischen Raum $\mathbb{R}$: Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Für die folgende Zahlenfolge ist der limessuperior $= 1$ und der limesinferior $= 0$.

$$-\tfrac{1}{2},\ 1+\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ 1+\tfrac{1}{4},\ \ldots .$$

Zur Verdeutlichung der Konstruktion formulieren wir noch den

Satz. *Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}$. Es gilt dann*

$$\limsup_n a_n \geq \bar{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : \quad a_n \geq \bar{a} - \varepsilon,$$
$$\limsup_n a_n < \bar{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : \quad a_n < \bar{a} - \varepsilon.$$

Es sei $\{a_\alpha : \alpha \in I\}$ eine abzählbare Familie in $\bar{\mathbb{R}}$ und $\bar{a} \in \bar{\mathbb{R}}$. Es gilt dann

$$\limsup_\alpha a_\alpha \geq \bar{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a' < \bar{a} \quad \forall I' \text{ endlich } \exists \alpha \notin I' : \quad a_\alpha \geq a',$$
$$\limsup_\alpha a_\alpha < \bar{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a' < \bar{a} \quad \exists I' \text{ endlich } \forall \alpha \notin I' : \quad a_\alpha < a'.$$

Der obere Limes einer abzählbaren Familie ist offenbar der obere Limes der Folge, die man durch eine beliebig gewählte Aufzählung der Indexmenge erhält.

Wir erwähnen ein weiteres Beispiel (neben $\bar{\mathbb{R}}$) eines σ-vollständigen Verbands, in welchem obere und untere Limiten wichtige Konstruktionen sind

Beispiel. Es sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über einer beliebigen Grundmenge Ω, partiell geordnet durch die Inklusionsrelation. Für eine Folge $(A_n)_n$ gilt

$$A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n = \{\omega : A_n \ni \omega \quad \text{für unendlich viele } n\}$$
$$A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} A_n = \{\omega : A_n \ni \omega \quad \text{für schliesslich alle } n\}.$$

Nach diesem Ausflug in die Welt der geordneten Mengen wenden wir uns jetzt wieder den Folgen in abstrakten metrischen Räumen zu.

Totalbeschränkte und folgenkompakte Mengen

Definition 5.10. Eine Teilmenge B eines metrischen Raums heisst totalbeschränkt, wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen ε-Kugeln überdeckt werden kann, wenn also Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{N(\varepsilon)}$ existieren, sodass alle $P \in B$ von mindestens einem der P_j einen Abstand $< \varepsilon$ haben. $S \subseteq \bigcup^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(P_j)$.

Bemerke: B als Teilmenge von $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ist genau dann totalbeschränkt, wenn im metrischen Raum $\big(B, d(\cdot,\cdot)\big)$ (mit der induzierten Metrik) der Gesamtraum B totalbeschränkt ist. Die Totalbeschränktheit ist in diesem Sinn eine innere Eigenschaft der betreffenden Menge; sie bezieht sich nicht auf den umfassenden Raum S.

In demselben Sinn ist die Vollständigkeit einer Teilmenge M eines metrischen Raums eine innere Eigenschaft der Menge.

Wir werden sehr bald Eigenschaften von Teilmengen eines metrischen Raums kennenlernen, die keine inneren Eigenschaften dieser Teilmengen sind. Die Abgeschlossenheit ist ein Beispiel.

Satz 5.1.5. *In einem totalbeschränkten metrischen Raum besitzt jede Folge eine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist. Umgekehrt: Wenn $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ nicht totalbeschränkt ist, dann existiert ein $\varepsilon^* > 0$ und eine unendliche Punktmenge mit paarweisen Abständen $\geq \varepsilon^*$.*

Beweis. *Sei $(P_n)_n$ eine beliebige Folge im totalbeschränkten Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$. Zu $\varepsilon = \frac{1}{m}$ seien $B_1^{(m)}, B_2^{(m)}, \dots, B_{N(m)}^{(m)}$ endlichviele $\frac{1}{m}$-Kugeln, die S überdecken.*

Die Konstruktion der Teilfolge $(P_{n_m})_m$ beginnen wir mit $m = 1$. Für mindestens eine der Kugeln $B_j^{(1)}$ gibt es unendlich viele Indizes n mit $P_n \in B_j^{(1)}$. Wir wählen ein solches j_1 und ein P_{n_1} in dieser Kugel. Für mindestens eine der Kugeln $B_j^{(2)}$ gibt es unendlich viele Indizes $n > n_1$ mit $P_n \in B_j^{(2)} \cap B_{j_1}^{(1)}$. Wir wählen ein solches j_2 und ein P_{n_2} im Durchschnitt $B_{j_2}^{(2)} \cap B_{j_1}^{(1)}$ mit $n_2 > n_1$. So fahren wir fort:

Für mindestens eine der Kugeln $B_j^{(m+1)}$ gibt es unendlich viele Indizes $n > n_m$ mit $P_n \in B_j^{(m+1)} \cap B_{j_m}^{(m)} \cap \dots \cap B_{j_1}^{(1)}$. Wir wählen ein solches j_{m+1} und ein $P_{n_{m+1}}$ im Durchschnitt $B_{j_{m+1}}^{(m+1)} \cap B_{j_m}^{(m)} \cap \dots \cap B_{j_1}^{(1)}$ mit $n_{m+1} > n_m$.

Eine solchermaßen rekursiv konstruierte Teilfolge ist eine Cauchy-Folge.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ nicht totalbeschränkt ist, und dass ε^* so klein ist, dass für jedes $\varepsilon < \varepsilon^*$ und jedes m-Tupel $P_1, \dots, P_m$ die Menge $S \setminus \bigcup^m B_\varepsilon(P_j)$ nicht leer ist. Wir wählen P_{m+1} in dieser Restmenge und haben $d(P_{m+1}, P_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, 2, \dots, m$. Die Konstruktion kann fortgesetzt werden und liefert die gewünschte verstreut liegende unendliche Punktmenge.

Definition 5.11 (Folgenkompaktheit).
Eine Teilmenge B eines metrischen Raums S wird folgenkompakt genannt, wenn jede B-Folge eine Teilfolge besitzt, welche gegen einen Punkt in B konvergiert.

Bemerke: Die Folgenkompaktheit einer Teilmenge $\mathsf{B} \subseteq \big(\mathsf{S}, \mathsf{d}(\cdot,\cdot)\big)$ ist eine innere Eigenschaft des metrischen Raums $\big(\mathsf{B}, \mathsf{d}(\cdot,\cdot)\big)$ mit der induzierten Metrik.

Satz 5.1.6 (Folgenkompakte metrische Räume)**.**
Ein Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann folgenkompakt, wenn sie vollständig und totalbeschränkt ist.

Beweis. *Wir haben gesehen, dass es in einem metrischen Raum, der nicht totalbeschränkt ist unendlich viele Punkte gibt, die paarweise einen Abstand* $\geq \varepsilon^*$ *(mit einem geeigneten* $\varepsilon^* > 0$*). Wenn wir die Punkte aufzählen, dann erhalten wir eine Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Ein folgenkompakter metrischer Raum ist also totalbeschränkt. Er ist auch vollständig; besitzt nämlich eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, dann ist sie konvergent.*

Andererseits haben wir bewiesen, dass in einem totalbeschränkten Raum jede Folge eine Teilfolge besitzt, die Cauchy-Folge ist, und diese ist dann auch konvergent, wenn der Raum vollständig ist.

Bemerke: Das Thema des Satzes erscheint bei der Beschäftigung mit dem System der reellen Zahlen unter dem Stichwort 'Satz von Stone-Weierstrass'.

Vorausschau: Die Kompaktheit (oder Folgenkompaktheit) ist einer der zentralen Begriffe der Analysis. Es handelt sich um einen topologischen Begriff, einen Begriff also, der nicht an besondere Metriken geknüpft werden muss. Wir werden ihn im nächsten Abschnitt nochmals in einem allgemeineren Rahmen entwickeln. An die Stelle der separablen metrischen Räume mit ihren folgenkompakten Teilräumen treten dort die Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis (HRaB) mit ihren kompakten oder bedingt kompakten-Teilräumen.

5.2 Normierte Vektorräume. Unbedingt summierbare Reihen

Definition 5.12 (Normierter Vektorraum)**.** Ein reeller oder komplexer Vektorraum V wird dadurch zu einem normierten Vektorraum, dass man eine Funktion $\|\cdot\|$ auf V auszeichnet, welche den Forderungen an eine Norm genügt.

Definition 5.13 (Seminorm und Norm)**.** Eine nichtnegative Funktion $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V heißt eine Seminorm, wenn gilt

(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$,

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ für alle Skalare α, (' absolute Homogenität')

(iii) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$. ('Subadditivität')

Eine Norm ist eine Seminorm mit der Eigenschaft $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v =$ Nullvektor

Beispiel. Der aus der Schulmathematik bekannte euklidische Abstand im reell-dreidimensionalen Anschauungsraum ist eine Norm. Die Norm in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ kann als Speziallfall gesehen werden; sie kann aber auch als das einfachste Beispiel einer Norm auf einem komplexen Vektorraum (hier komplex-eindimensional!) verstanden werden. Ein hochinteressantes Beispiel, welches wir sehr eingehend studieren werden, ist die 2-Norm auf dem (unendlichdimensionalen!) Raum der trigonometrischen Polynome; sie ist die Grundlage für die Theorie der qudratsummierbaren Fourier-Reihen.

Wir wollen hier zunächst noch eine Anwendung des Begriffs der Subadditivität vorausschicken.

Satz 5.2.1. *Es sei* $F(\cdot, \cdots, \cdot)$ *eine monotonsteigende nichtnegative Funktion auf* $\mathbb{R}_+^N$*, die subadditiv ist. Für* N*-Tupel nichtnegativer Zahlen* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *gelte also*

(i) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ *(komponentenweise)* $\Longrightarrow$ $F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{y})$.

(ii) $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$.

Und es seien $d_1(\cdot,\cdot), \cdots, d_N(\cdot,\cdot)$ *Semimetriken auf einer Menge* S*. Die Funktion* $d(\cdot,\cdot) = F\big(d_1(\cdot,\cdot), \cdots, d_N(\cdot,\cdot)\big)$ *ist dann ebenfalls eine Semimetrik.*

Beweis. *Die Nichtnegativität und die Symmetrie von* $d(\cdot,\cdot)$ *sind offensichtlich. Die Dreiecksungleichung muss bewiesen werden. Für jedes Tripel von Punkten* $P, Q, R \in S$ *und für alle* $i = 1, \cdots, N$ *gilt* $d_i(P,R) \leq d_i(P,Q) + d_i(Q,R)$*. Wir schreiben das kurz* $\mathbf{d}(P,R) \leq \mathbf{d}(P,Q) + \mathbf{d}(Q,R)$ *(komponentenweise). Die Monotonie und die Subadditivität von* F *ergeben*

$$F(\mathbf{d}(P,R)) \leq F\big(\mathbf{d}(P,Q) + \mathbf{d}(Q,R)\big) \leq F(\mathbf{d}(P,Q)) + F(\mathbf{d}(Q,R)).$$

Beispiel. 1. Wenn $d(\cdot,\cdot)$ eine Semimetrik ist dann sind auch

$$d'(\cdot,\cdot) = d(\cdot,\cdot) \wedge 1 \qquad \text{und} \qquad d''(\cdot,\cdot) = \tfrac{d(\cdot,\cdot)}{1+d(\cdot,\cdot)}$$

Semimetriken. In der Tat erfüllen die Funktionen $F'(x) = x \wedge 1$, $F''(x) = \frac{x}{1+x}$ mit $x \geq 0$ die Voraussetzungen des Satzes. Die Monotonie und die Ungleichung $(x+y) \wedge 1 \leq x \wedge 1 + y \wedge 1$ sind trivial. Ausserdem gilt

$$F''(x+y) = \tfrac{x+y}{1+x+y} = \tfrac{x}{1+x+y} + \tfrac{y}{1+x+y} \leq \tfrac{x}{1+x} + \tfrac{y}{1+y} = F''(x) + F''(y).$$

2. Wenn $d_1(\cdot,\cdot), \cdots, d_N(\cdot,\cdot)$ Semimetriken auf S sind, dann sind auch die Summe und das Maximum Semimetriken

$$d'(\cdot,\cdot) = d_1(\cdot,\cdot) + \cdots + d_N(\cdot,\cdot) \qquad \text{und} \qquad d''(\cdot,\cdot) = \sup\big\{d_1(\cdot,\cdot), \cdots, d_N(\cdot,\cdot)\big\}.$$

3. Für jedes $p > 1$ ist $\quad d_{(p)}(\cdot,\cdot) = \left(\sum_i (d_i)^p(\cdot,\cdot)\right)^{1/p}$ eine Semimetrik.

Den Beweis der letzten Aussage stellen wir zurück. Die Subadditivität der Funktion $F(\mathbf{x}) = \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p}$ auf dem positiven 'Oktanten' $\mathbb{R}_+^N = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0\}$ ist der Schlüssel zur berühmten Minkowski'schen Ungleichung, die uns immer wieder begegnen wird.

Definition 5.14. (Translationsinvariante Metriken auf einem affinen Raum)
Eine Semimetrik auf einem affinen Raum heisst translationsinvariant, wenn der Abstand der Punkte P und Q nur vom Verschiebungsvektor $v = \vec{PQ}$ abhängt.

Satz 5.2.2 (Die Metrik zu einer Norm)**.**
Wenn L ein (reell- oder komplex-) affiner Raum ist, und $\|\cdot\|$ eine Seminorm auf dem Vektorraum V der Verschiebungen, dann ergibt sich eine translationsinvariante Semimetrik $d(\cdot,\cdot)$ auf der L, wenn man definiert: $d(P, P+v) = \|v\|$.

Beweis. *Die 'Subadditivität' der Norm (Forderung (iii)) impliziert in der Tat die Dreiecksungleichung für die daraus abgeleitete Metrik. Alles Übrige ist trivial.*

Beispiel. Es seien $n_1(\cdot), n_2(\cdot). \ldots$ Seminormen auf einem Vektorraum V und $d(w, w+v) = \sum_i \frac{1}{2^i} \cdot n_i(v) \wedge 1$. Dann ist $d(\cdot,\cdot)$ eine translationsinvariante Semimetrik. Diese ist genau dann eine Metrik, wenn für jedes $v \neq 0$ ein i existiert mit $n_i(v) \neq 0$.

Eine Folge $(w_n)_n$ konvergiert bzgl. einer solchen Metrik gegen $\tilde{w}$ genau dann, wenn $n_i(w_n) \to 0$ für alle i.

Hinweis: Die Konstruktion ist auch interessant wenn man unendlichviele Semimetriken hat, die nicht translationsinvariant sind. Seien z. B. $\big(S_1, d_1(\cdot,\cdot)\big)$, $\big(S_2, d_2(\cdot,\cdot)\big)$, $\ldots$ metrische Räume. Wir erhalten eine Metrik auf dem cartesischen Produkt $S = S_1 \times S_2 \times \cdots$, wenn wir die Punkte $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ definiert

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \tfrac{1}{2^i} \cdot d_i(x_i, y_i) \wedge 1.$$

Man versteht hier die $d_i(\cdot,\cdot)$ als Semimetriken auf dem cartesischen Produkt S. Eine Folge von Punkten $(\mathbf{x}^{(n)})_n$ konvergiert bzgl. dieser Metrik genau dann, wenn alle 'Komponenten' $(x_i^{(n)})_n$ konvergieren. Man sagt, dass $d(\cdot,\cdot)$ die punktweise Konvergenz metrisiert.

Hinweis: In der Sprache der konvexen Analysis sagt man: Eine Seminorm auf einem reellen Vektorraum ist eine symmetrische nichtnegative positivhomogene konvexe Funktion. Beispiele konvexer (und speziell positivlinearer konvexer) Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ studieren wir in einem eigenen Abschnitt.

Hier geht es uns nicht um konvexe Geometrie, wir sind im Abschnitt 'Vollständige metrische Räume'. Der Grund, dass wir hier Normen ins Auge fassen, ist der, dass man translationsinvariante Metriken auf Vektorräumen für eine Theorie der Summen mit unendlich vielen Summanden benötigt. Und die translationsinvarianten Metriken sind meistens durch Normen gegeben.

Sprechweise (Banachraum)**.** Ein vollständiger normierter Vektorraum wird Banachraum genannt. Ein normierter Vektorraum wird manchmal ein Prä-Banachraum genannt. Durch Vervollständigung wird er zu einem Banachraum.

Das Kommutativgesetz der Addition impliziert: Wenn $\{v_i : i \in I\}$ eine endliche Familie von Vektoren ist, dann ist $\sum_{i\in I} v_i$ ein wohldefinierter Vektor. Wenn $\{v_i : i \in I\}$ eine abzählbare Familie von Elementen eines Banachraums $\big(V, \|\cdot\|\big)$ ist, dann ist die Summe nur unter gewissen einschränkenden Umständen definiert. Dabei spielt im Falle endlichdimensionaler Vektorräume die gewählte Norm keine entscheidende Rolle.

Hinweis: In den meisten elementaren Lehrbüchern summiert man nur Folgen endlichdimensionaler Vektoren, und in erster Linie Zahlenfolgen $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. Man nimmt also an, dass die Indexmenge aufgezählt vorliegt. Man studiert in diesem Falle die Folge der Partialsummen $\{s_n = \sum_{i=1}^n : n \in \mathbb{N}\}$; und man sagt, die Folge $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ sei 'bedingt' summierbar, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. So ist dann z. B. die Folge $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots)$ 'bedingt summierbar'; und die Tatsache, dass die Folge der Partialsummen gegen den Wert $\ln\, 2$ konvergiert, wird (nach dem Vorbild von Euler) folgendermaßen notiert

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \ln\, 2 = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\, \tfrac{1}{i}.$$

Man sagt, die alternierende harmonische Reihe habe den Wert $\ln\, 2$.

Diesem Sprachgebrauch wollen wir uns nicht anschliessen. Die Konvergenz einer Folge von Partialsummen ist für uns eine andere Angelegenheit als die (unbedingte!) Summierbarkeit einer abzählbaren Familie von Elementen eines Banachraums, und die Wohldefiniertheit ihrer Summe. Wir definieren daher

Definition 5.15. Eine Familie $\{v_i : i \in I\}$ von Vektoren in einem Banachraum $\big(V, \|\cdot\|\big)$ heisst unbedingt summierbar, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists I' \text{endlich} \qquad \forall I'' \quad I'' \cap I' = \emptyset \;\Rightarrow\quad \|\sum_{i\in I''} v_i\| < \varepsilon.$$

Die Definition kann man etwas allgemeiner fassen. Man braucht nur einen Vektorraum V, welcher vollständig ist bzgl. einer translationsinvarianten Metrik $\big(d(P,Q) = \||Q-P\||\big)$.

Notation. Unter einer Aufzählung einer abzählbaren Menge I verstehen wir eine bijektive Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{N}$. Die Menge $I_n = \{i : \alpha(i) \leq n\}$ heisst der Abschnitt der Länge n für die Aufzählung $\alpha(\cdot)$.

Satz 5.2.3 (Wert einer Reihe). *Wenn die Familie* $\{v_i : i \in I\}$ *von Vektoren im Banachraum* $\big(V, \|\cdot\|\big)$ *unbedingt summierbar ist, dann existiert ein* $v \in V$*, sodass für jede Aufzählung der Indexmenge die Folge der Partialsummen gegen* v *konvergiert:*

$$w_n = \sum_{\{i:\alpha(i)\leq n\}} v_i \xrightarrow{n\to\infty} v.$$

Im Fall dieses Satzes und nur in diesem Fall notieren wir: $v = \sum_{\{i\in I\}} v_i$ in $\big(V, \|\cdot\|\big)$, und wir nennen v den Wert der Reihe.

Beweis. *Wenn die Familie unbedingt summierbar ist, dann ist die Folge der Partialsummen für jede Aufzählung* α *eine Cauchy-Folge. Sei nämlich* I' *eine Indexmenge zur Genauigkeit* ε*(im obigen Sinn der unbedingten Summierbarkeit), und sei* N *so groß, dass* $I_N \supset I'$*, dann gilt für alle* $m, n \geq N$ $\quad \|w_n - w_m\| = \| \sum_{\{i:m\leq\alpha(i)\leq n\}} v_i\| < \varepsilon.$

Wenn β *eine weitere Aufzählung ist, und* M *so groß ist, dass* $\{i : \beta(i) \leq M\} \supset \{i : \alpha(i) \leq N\}$*, dann gilt* $\| \sum_{\{i:\beta(i)\leq M\}} v_i - \sum_{\{i:\alpha(i)\leq N\}} v_i\| < \varepsilon$*. Die Cauchy-Folge der Partialsummen für* β *ist äquivalent zu der für* α*. Die Limiten sind dieselben.*

Bemerke: Die Konstruktion einer unendlichen Summe von Vektoren funktioniert ebenso, wenn wir auf dem Vektorraum eine translationsinvariante Metrik spezifiziert haben, die den Vektorraum zu einem vollständigen Raum macht. Bei unendlichen Summen in unendlichdimensionalen Vektorräumen muss immer klar sein, auf welche translationsinvariante Metrik $d(\cdot,\cdot)$ die Summation bezogen sind: $\quad \sum_{\{i\in I\}} v_i = v$ bezüglich $d(\cdot,\cdot)$.

Beispiel (Unbedingte Summabilität in einfachen Fällen).

1. Eine Folge positiver Zahlen ist genau dann unbedingt summabel, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist. In diesem Fall gilt $\sum_n a_n = \sup_N \sum_{n=1}^N a_n$. Wenn die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist, dann notiert man $\sum_n a_n = \infty$.

2. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ ist genau dann unbedingt summabel, wenn die Folgen $(a_n^+)_n$ und $(a_n^-)_n$ summabel sind; es gilt $\sum_n a_n = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$.

3. Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_n$ ist genau dann unbedingt summabel, wenn die Folge der Realteile und die Folge der Imaginärteile unbedingt summabel sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Folge der Beträge $(|z_n|)_n$ summabel ist.

4. Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in I\}$ eine Familie von Vektoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$. Sie ist genau dann unbedingt summabel, wenn für jede Linearform $l(\cdot)$ die Zahlenfolge $\{l(v_\alpha) : \alpha \in I\}$ unbedingt summabel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Folge der Normen $\{|v_\alpha| : \alpha \in I\}$ summabel ist.

Beweis. *Wir beweisen nur die zweite Behauptung: Aus der Summabilität der Positiv- und Negativteile folgt offensichtlich die unbedingte Summabilität von* $(a_n)_n$.

Für den Beweis der umgekehrten Richtung bezeichne $I^+ = \{\alpha : a_\alpha \geq 0\}$ *die Familie der Indizes zu positiven Summanden und* $I^- = \{\alpha : a_\alpha \leq 0\}$ *die Familie der Indizes zu negativen Summanden: Wenn* $\sum_{I^+} a_\alpha = \infty$*, dann gibt es zu jeder endlichen Indexmenge* I' *eine dazu disjunkte Indexmenge* I''*, sodass* $\sum_{\alpha \in I''} a_\alpha$ *beliebig groß ist. Die Familie ist also nicht unbedingt summabel. Entsprechendes gilt im Fall* $\sum_{I^-} a_\alpha = -\infty$.

Wir bemerken: Ist $\{a_\alpha : \alpha \in I\}$ *eine Nullfolge mit* $\sum_{I^+} a_\alpha = \infty = \sum_{I^-} a_\alpha = \infty$*, so existiert zu jeder vorgegebenen Zahl* $\tilde{s}$ *eine Aufzählung* $\alpha : I \to \mathbb{N}$*, sodass die Folge der Partialsummen*$s_N = \sum j = 1^N a_{\alpha_j}$ *gegen* $\tilde{s}$ *konvergiert. (Diese Aussage heisst in manchen Lehrbüchern der 'Große Umordnungssatz'. Den Beweis überlassen wir dem Leser.)*

Nach unserer Meinung verdient der folgende Satz eher den Namen 'Großer Umordnungssatz'. Er macht explizit, dass man mit den Summen unbedingt summabler Familien ebenso operieren kann, wie mit den Summen endlicher Familien.

Satz 5.2.4. *Es sei* $\{v_\alpha : \alpha \in I\}$ *eine Familie von Vektoren in einem Banachraum* $(V, \|\cdot\|)$. *Dann ist auch jede Teilfamilie* $\{v_\alpha : \alpha \in I'\}$ *unbedingt summabel. Wenn die Indexmenge* $I = \{\alpha : \alpha \in I\}$ *partitioniert ist* $I = \sum_{\beta \in J} I_\beta$*, und* $w_\beta = \sum_{\alpha \in I_\beta} v_\alpha$*, dann ist die Familie dieser 'Partialsummen'* $\{w_\beta; \beta \in J\}$ *unbedingt summabel und es gilt* $\sum_\beta w_\beta = \sum_\alpha v_\alpha$.

Andererseits: Es seien $I_\beta, \beta \in J$ *paarweise disjunkte Indexmengen und* $\{v_\alpha; \alpha \in I_\beta\}$ *unbedingt summable Familien im Banachraum* $(V, \|\cdot\|)$ *mit den Summen* $w_\beta = \sum_{\alpha \in I_\beta} v_\alpha$. *Dann ist auch die Familie* $\{v_\alpha; \alpha \in I_\beta\}$ *undedingt summabel und es gilt*

$$\sum_{\alpha \in I} v_\alpha = \sum_\beta w_\beta = \sum_\beta \sum_{\alpha \in I_\beta} v_\alpha.$$

Beispiele summabler Zahlenfolgen

- Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht summabel. $\sum^\infty \frac{1}{n} = \infty$.
- Die Folge $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ ist summabel für jedes $\alpha > 1$.
- Die Folge $\left(\frac{1}{n \cdot (\ln n)^{1+\varepsilon}}\right)_{n \geq 2}$ ist summabel für jedes $\varepsilon > 0$.

Die Beweise solcher Aussagen kann man oft durch den Vergleich mit einem elementaren Integral führen. Der Schlüssel zum Beweis ist der

Hilfssatz

Es sei $f(x)$ eine monoton nach 0 fallende Funktion, $f(x) \searrow 0$ für $x \to \infty$, und es sei (a_n) eine Nullfolge. Es gilt dann

$$\exists N\ \forall n > N \quad |a_n| \leq f(n) \qquad \int^{\infty} f(x)\,dx < \infty, \qquad \Longrightarrow \sum^{\infty} a_n \quad \text{existiert}$$
$$\exists N\ \forall n > N \quad |a_n| \geq f(n) \qquad \int^{\infty} f(x)\,dx = \infty, \qquad \Longrightarrow \sum^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Wir haben das Thema bereits im Abschnitt über besondere Funktionen diskutiert. Die Idee ist die, dass man mit Treppenfunktionen der Höhen a_n die Funktion $f(\cdot)$ minorisiert bzw. majorisiert. Man erhält

$$\sum_N^M |a_n| \leq \int_{N-1}^M f(x)\,dx \qquad \text{im ersten Fall,}$$
$$\sum_N^M |a_n| \geq \int_N^{M+1} f(x)\,dx \qquad \text{im zweiten Fall}$$

Zu den Beispielen bemerken wir

$$\int_{y_1}^{y_2} \tfrac{1}{x}\,dx = \ln y_2 - \ln y_1; \qquad \int_{y_1}^{y_2} \tfrac{1}{x \ln x}\,dx = \int_{\ln y_1}^{\ln y_2} \tfrac{1}{v}\,dv = \ln(\ln y_2) - \ln(\ln y_1);$$
$$\int_{y_1}^{y_2} \tfrac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\tfrac{1}{\alpha-1} x^{\alpha-1}\right]_{y_1}^{y_2}; \qquad \int_{y_1}^{y_2} \tfrac{1}{x(\ln x)^{1+\varepsilon}}\,dx = \int_{\ln y_1}^{\ln y_2} \tfrac{1}{v^{1+\varepsilon}}\,dv = \left[\tfrac{1}{\varepsilon} v^{\varepsilon}\right]_{\ln y_1}^{\ln y_2}.$$

Alte Sprechweisen: ('Konvergente und divergente Reihen')

Es ist unseres Erachtens kein glücklicher Sprachgebrauch, wenn man auf Grund des Sachverhalts $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ sagt, dass die harmonische Reihe 'divergiert'. Reihen sind bei uns formale Ausdrücke $\sum_\alpha v_\alpha$. (Wir erinnern an die formalen Potenzreihen; später werden wir auch auf formale Fourier-Reihen zu sprechen kommen.) Vom **Wert einer Reihe** reden wir dann und nur dann, wenn die Familie der Summanden unbedingt summabel ist. Wir werden nur sehr selten gemäß dem älteren Sprachgebrauch folgen und auch einmal von konvergenten oder nichtkonvergenten (also 'divergenten') Reihen sprechen. Grundsätzlich sind es bei uns immer Folgen, die konvergieren oder auch nicht, Reihen andererseits sind summabel oder auch nicht. Die Konvergenz einer Folge von Partialsummen ist bei uns noch kein Indiz, dass die Reihe einen Wert hat. Wir halten es für einen schlechten Brauch, wenn man in manchen älteren Texten eine Reihe $\sum_1^{\infty} v_n$ mit der Folge ihrer Partialsummen 'identifiziert' oder auch gegebenenfalls mit deren Grenzwert.

In manchen Lehrbüchern spricht man von 'absolutkonvergenten' Reihen (meistens handelt es sich um Funktionenreihen) als einem (besonders angenehmen) Fall 'konvergenter' Reihen. Einen solchen Begriff wollen wir nicht einführen. Für eine nützliche Verschärfung der unbedingten Summierbarkeit halten wir dagegen die folgende Begriffsbildung.

Sprechweise. (Normsummabilität)
Eine Folge von Vektoren $(v_n)_n$ in einem unendlichdimensionalen Banachraum nennen wir normsummabel, wenn die Zahlenfolge $(\|v_n\|)_n$ summabel ist.

Offensichtlich ist jede normsummable Folge auch unbedingt summabel. Wie wir gesehen haben ist für Folgen von Vektoren in einem endlichdimensionale Vektorraum die Normsummabilität dasselbe wie die unbedingte Summabilität. Das folgende Beispiel zeigt, dass es in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen Folgen geben kann, die zwar unbedingt summabel aber nicht normsummabel sind.

Anhang 1: Quadratsummable trigonometrische Reihen

Der Raum der trigonometrischen Polynome sei mit der 2-Norm ausgestattet. $\big(\mathcal{H}, \|\cdot\|\big)$ sei die Vervollständigung. Wir haben oben diskutiert, dass die 2-Norm zu einem Skalarprodukt gehört. Es gibt hier also den Begriff der Orthogonalität und den Satz von Pythagoras. Wir betrachten 'Vektoren' v_n, die paarweise zueinander orthogonal sind, (wie z. B. l $v_n = c_n \cdot e^{int}$) mit $\|v_n\| = |c_n|$. Die Familie $\{v_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ist offenbar genau dann normsummabel, wenn die Folge c_n summabel ist: $\sum |c_n| < \infty$. Man zeigt leicht, dass sie genau dann unbedingt summabel ist in $\mathcal{H}$, wenn die Folge der Koeffizienten quadratsummabel ist, d. h. wenn $\sum |c_n|^2 < \infty$.
Nehmen wir nämlich an, die Zahlenfolge $(c_n)_n$ sei quadratsummabel. Zu jedem $\varepsilon < 0$ existiert dann ein N, sodass $\sum_{|n|>N} |c_n|^2 < \varepsilon^2$. Für jede Indexmenge $I'' \subset \{n : |n| > N\}$ gilt nach dem Satz von Pythagoras $\|\sum_{I''} v_n\| = \sqrt{\sum_{I''} |c_n|^2} < \varepsilon$. Daraus folgt, dass $\sum c_n \cdot e^{int}$ einen Wert $\tilde{v}$ in $\mathcal{H}$ besitzt.
Umgekehrt gilt: Wenn für ein ˚formale trigonometrische Reihe' $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ die Koeffizientenfolge $(c_n)_n$ nicht quadratsummabel ist, dann ist die Familie $\{v_n : n \in \mathbb{Z}\}$ nicht unbedingt summabel in $\mathcal{H}$.

Bemerke: Wenn $\sum |c_n| < \infty$ dann konvergiert die Folge der 2π-periodischen Funktionen $f_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_n \cdot e^{int}$ gleichmässig gegen eine stetige 2π-periodische Funktion $\tilde{f}(t)$. Für diese Funktion gilt $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\tilde{f}(t)\,dt = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
Andererseits: Wenn wir lediglich voraussetzen, dass die Koeffizientenfolge quadratsummabel ist, dann können wir nicht schliessen, dass es eine stetige Grenzfunktion gibt. Das Konvergenzverhalten der Folge der Partialsummen kann (muß aber nicht) ziemlich wild sein. Ein noch einigermaßen zahmes Verhalten finden wir bei der Euler'schen Sägezahnfunktion (von der wir früher in einem einigermaßen naiven Verständnis gesprochen haben); von einer gleichmässigen Konvergenz der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot \sin nt$ kann aber auch da nicht die Rede sein; schliesslich ist ja auch die ˚Limesfunktion' eine unstetige Funktion.

Hinweis: In der Lebesgue'schen Integrationstheorie lernt man, dass im Falle quadratsummabler Koeffientenfolgen stets eine Funktion $\tilde{f}(t)$ existiert mit $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\tilde{f}(t)\,dt = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man muss aber genauer diskutieren, was in diesem Zusammenhang unter einer Funktion zu verstehen ist; in Wirklichkeit geht es nämlich gar nicht um Funktionen, sondern um Äquivalenzklassen von Funktionen. Es sind die (Äquivalenzklassen von) Funktionen, die im Sinne der Lebegue'schen Integrationstheorie quadratintegrabel sind.

Die Elemente des vervollständigten Raums $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ sind zunächst einmal Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen im Raum der trigonometrishen Polynome. Es zeigt sich. dass man die Elemente der Vervollständigung auch recht konkret beschreiben kann, und zwar auf zweierlei Weisen: Jedem Element entspricht genau eine quadratsaummable Folge komplexer Zahlen $(c_n)_n$; jedem Element entspricht andererseits auch eine Äquivalenzklasse quadratintegrabler 2π-periodischer Funktionen. Und die c_n ergeben sich aus der Funktion als deren 'Fourier-Koeffizienten'

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int e^{-int}f(t)\,dt \quad \text{im Sinne der Lebegue'schen Integrationstheorie.}$$

Anhang 2: Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung
Für Tupel komplexer Zahlen $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)$ definiert man für jedes $p \geq 1$ die p-Norm:

$$\|\mathbf{z}\|_p = \big(|z_1|^p + \cdots + |z_N|^p\big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=1}^{N} |z_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Die Funktion $\|\cdot\|_p$ ist offenbar positiv und absoluthomogen auf $\mathbb{C}^N$. Die Minkowski-Ungleichung, die wir hier beweisen wollen, zeigt ihre Subadditivität. Es handelt sich somit um eine Norm. Wir holen weiter aus und beweisen zunächst

Satz 5.2.5 (Höldersche Ungleichung).
Es sei $p > 1$ *und* $1/p + 1/q = 1$. *Für* $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ *gilt dann*

$$\sum |z_k \cdot w_k| \leq \|\mathbf{z}\|_p \cdot \|\mathbf{w}\|_q.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn ein c *existiert, sodass* $|w_k|^q = c \cdot |z_k|^p$ *für alle* k.

Beweis. *Von der Schule her ist bekannt, dass das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen* $a \neq b$ *strikt kleiner ist als das arithmetische Mittel:*

$$\sqrt{a\cdot b} \leq \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b, \qquad\qquad a^{1/2}\cdot b^{1/2} = \tfrac{1}{2}(a+b) \iff a = b.$$

Dies kann verallgemeinert werden: Wenn $p > 1$ *und* $1/p + 1/q = 1$, *dann gilt*

$$a^{1/p}\cdot b^{1/q} \leq \tfrac{1}{p}\cdot a + \tfrac{1}{q}\cdot b, \qquad \text{d. h.} \qquad \tfrac{1}{p}\cdot\ln a + \tfrac{1}{q}\cdot\ln b \leq \ln(\tfrac{1}{p}\cdot a + \tfrac{1}{q}\cdot b)$$

mit Gleichheit nur im Fall $a = b$. *Der Beweis ergibt sich aus der Monotonie und der strikten Konkavität der Logarithmusfunktion auf* $\mathbb{R}_+$.

Es seien $a_1, \ldots, a_N$ *und* $b_1, \ldots, b_N$ *positive Zahlen und* $A = \sum a_k$, $B = \sum b_k$. *Wenn man die Ungleichungen für die Paare* $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$. *addiert, dann ergibt sich*

$$\sum_k a_k^{1/p}\cdot b_k^{1/q} \;\leq\; A^{1/p}\cdot B^{1/q}\cdot\Big(\frac{1}{p}\sum_k\frac{a_k}{A} + \frac{1}{q}\sum_k\frac{b_k}{B}\Big) \;=\; A^{1/p}\cdot B^{1/q}.$$

Sind nun z_k, w_k *komplexe Zahlen und* $a_k = |z_k|^p$, $b_k = |w_k|^q$*, so ergibt das*

$$\sum_k |z_k \cdot w_k| \;\leq\; \Big(\sum_{k=1} |z_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1} |w_k|^q\Big)^{1/q} \;=\; \|\mathbf{z}\|_p \cdot \|\mathbf{w}\|_q.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{a_k}{A} = \frac{b_k}{B}$ *für alle* k.

Wir bemerken: Wenn $|w_k|^q = c \cdot |z_k|^p$*, dann liefert die Summe* $\|\mathbf{w}\|_q^q = c \cdot \|\mathbf{z}\|_p^p$*, also* $B = c \cdot A$.

Damit ist die Höldersche Ungleichung bewiesen. Der Spezialfall $p = 2 = q$ *heisst die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (für Tupel).*

Die Bemerkung über den Fall der Gleichheit ergibt weiter

$$\sup\Big\{\sum |z_k \cdot \zeta_k| : \;\sum |\zeta|^q \leq 1\Big\} \;=\; \|\mathbf{z}\|_p.$$

Die Vektoren $\mathbf{z}$ *sehen wir als* n*-Spalten, und die betrachten wir als Linearformen auf dem Raum* $\mathbb{C}^n_Z$ *der komplexen* n*-Zeilen* ζ*:* $\ell_{\mathbf{z}}(\cdot) \,:\, \zeta \mapsto \sum z_k \cdot \zeta_k$ *und entsprechend* $\ell_{\mathbf{w}}(\cdot)$, $\ell_{\mathbf{z}+w}(\cdot) = \ell_z(\cdot) + \ell_w(\cdot)$ *Wir haben dann*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z} + w\|_p &= \sup\big\{|\ell_{\mathbf{z}+w}(\zeta)| : \;\|\zeta\|_q \leq 1\big\} \leq \\ &\leq \sup\big\{|\ell_{\mathbf{z}}(\zeta)| : \;\|\zeta\|_q \leq 1\big\} + \sup\big\{|\ell_{\mathbf{w}}(\zeta)| : \;\|\zeta\|_q \leq 1\big\} = \|\mathbf{z}\|_p \,+\, \|\mathbf{w}\|_p\end{aligned}$$

weil das Supremum der Summe zweier Funktionen (über der Einheitskugel $\|\zeta\|_q \leq 1$*) höchst gleich der Summe der Suprema ist. Und das ist die Minkowskische Ungleichung.*

Bemerke (Sublinearität):
Die Minkowskische Ungleichung liefert die Sublinearität der Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_N) = \Big(\sum |x_k|^p\Big)^{1/p} \quad \text{auf } \mathbb{R}^N_+.$$

Nach dem Satz von oben gilt: Wenn $d_1(\cdot,\cdot), \ldots, d_N(\cdot,\cdot)$ Semimetriken auf irgendeiner Menge S sind, dann ist auch $d_{(p)}(\cdot,\cdot) = \big(\sum d_k^p(\cdot,\cdot)\big)^{1/p}$ eine Semimetrik.

Dasselbe gilt für translationsinvariante Semimetriken auf einem Vektorraum, und insbesondere: Wenn $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_N$ Seminormen auf einem Vektorraum sind, dann ist auch $\|\cdot\|_{(p)} = \big(\sum \|\cdot\|_k^p(\cdot,\cdot)\big)^{1/p}$ eine Seminorm.

5.3 Gleichmäßig stetige Abbildungen, Kontraktionen und das Fixpunktprinzip.

Definition 5.16. Es seien $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ und $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi :\ S \longrightarrow T$ heisst eine gleichmäßig stetige Abbildung, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P, Q \quad d(P,Q) < \delta \Rightarrow e\big(\varphi(P), \varphi(Q)\big) < \varepsilon.$$

Eine reellwertige Funktion $f(\cdot)$ auf dem metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ heisst eine gleichmäßig stetige Funktion, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P, Q \quad d(P,Q) < \delta \Rightarrow \big|f(P) - f(Q)\big| < \varepsilon.$$

Die Gesamtheit aller gleichmäßig stetigen Funktionen ist ein reeller Vektorraum, welcher bzgl. der punktweisen Maximums- und Minimumsbildung abgeschlossen ist. . Auf einem metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ gibt es viele gleichmäßig stetige Funktionen, wie wir sehen werden. Es gibt sogar auch viele Funktionen, die dehnungsbeschränkt sind im Sinne der folgenden

Definition 5.17. Es sei $\alpha > 0$. Eine Abbildung $\varphi :\ \big(S, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ heisst dehnungsbeschränkt mit Dehnungsparameter $\leq \alpha$, wenn gilt $e\big(\varphi(P), \varphi(Q)\big) \leq \alpha \cdot d(P,Q)$. Man sagt in diesem Fall auch, die Abbildung sei Lipschitz-stetig zu einer Lipschitzkonstanten $\leq \alpha$. Wenn $\alpha < 1$, dann sagt man, die Abbildung sei eine α-Kontraktion.

Beispiel 5.3.1 (Der Abstand von einer Menge).
Für jeden festen Punkt P^* ist der Abstand von P^* eine Lipschitz-stetige Funktion.
Wir studieren allgemeiner den Abstand von einer nichtleeren Teilmenge $A \subset S$

$$f(\cdot) = d(\cdot, A) = \inf\{d(\cdot, Q) :\ Q \in A\}.$$

Diese nichtnegative Funktion verschwindet nicht nur auf A, sondern auch auf der Menge aller derjenigen Punkte die von A den Abstand 0 haben; diese heisst die (bzgl. der gegebenen Metrik) abgeschlossene Hülle von A. Eine Menge, die gleich ihrer abgeschlossenen Hülle ist, heisst eine (bzgl. der gegebenen Metrik) abgeschlossene Menge. Wir zeigen, dass $d(\cdot, A)$ Lipschitz-stetig ist; wir zeigen $|f(P_1) - f(P_2)| \leq d(P_1, P_2)$. Es genügt offenbar zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $f(P_1) - f(P_2) < d(P_1, P_2) + \varepsilon$. Um das zu zeigen, finden wir einen Punkt $Q_1 \in A$ mit $d(P_1, Q_1) < d(P_1, A) + \varepsilon$. Es gilt dann wegen der Dreiecksungleichung

$$d(P_2, A) \leq d(P_2, Q_1) \leq d(P_2, P_1) + d(P_1, Q_1) < d(P_2, P_1) + d(P_1, A) + \varepsilon.$$

Beispiel 5.3.2. Der Grundraum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ sei die reelle Achse mit der üblichen Metrik. Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{|x|}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. Im Beweis ist die folgende Begriffsbildung hilfreich.

Sprechweise (Stetigkeitsmodul). Es sei $\varphi : \big(S, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ gleichmäßig stetig. Und für ein $\varepsilon^* > 0$ sei $\delta : (0, \varepsilon^*) \ni \varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$ eine strikt positive isotone Funktion mit $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \delta(\varepsilon) \to 0$. Man sagt, $\delta(\cdot)$ sei ein Stetigkeitsmodul für φ, wenn für alle genügend kleinen ε gilt

$$\forall\ P, Q \quad d(P,Q) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow e\big(\varphi(P), \varphi(Q)\big) < \varepsilon.$$

Bemerke: Die gleichmäßig stetigen Abbildungen sind offenbar genau diejenigen Abbildungen, für die es einen Stetigkeitsmodul gibt. Wenn $\delta(\cdot)$ ein Stetigkeitsmodul für φ ist, dann ist auch jede kleinere striktpositive Funktion $\delta'(\cdot)$ ein Stetigkeitsmodul für φ.

Die Abbildung φ ist genau dann dehnungsbeschränkt zum Parameter $\leq \alpha$, wenn die lineare Funktion $\delta(\varepsilon) = \alpha \cdot \varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$) ein Stetigkeitsmodul für φ ist.

Zum Beispiel $f(x) = \sqrt{|x|}$: Die Funktion $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ist ein Stetigkeitsmodul; denn wegen $|x_2| - |x_1| = \big(\sqrt{|x_2|} - \sqrt{|x_1|}\big)\big(\sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_1|}\big)$ gilt

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon^2 \Rightarrow \Big|\sqrt{|x_2|} - \sqrt{|x_1|}\Big| < \varepsilon.$$

Satz 5.3.1 (Pullback). *Sei $g(\cdot)$ eine gleichmäßig stetige Funktion auf $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ und $\varphi : \big(S, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Die zurückgenommene Funktion $f(\cdot) = \big(\varphi^\sharp g\big)(\cdot) = f\big(\varphi(\cdot)\big)$ ist dann gleichmäßig stetig.*

Beweis. *Wir beweisen eine Verallgemeinerung: Seien $\varphi : \big(S_1, d_1(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(S_2, d_2(\cdot,\cdot)\big)$ und $\psi : \big(S_2, d_2(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(S_3, d_3(\cdot,\cdot)\big)$ gleichmäßig stetige Abbildungen; dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung $\chi : \big(S_1, d_1(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(S_3, d_3(\cdot,\cdot)\big)$ gleichmäßig stetig.*
Zu $\varepsilon > 0$ sei $\rho > 0$ so, dass $d_2(P_2, Q_2) < \rho \Rightarrow d_3(\psi(P_2), \psi(Q_2)) < \varepsilon$, und zu $\rho > 0$ sei $\delta > 0$ so, dass $d_1(P_1, Q_1) < \delta \Rightarrow d_2(\varphi(P_1), \varphi(Q_1)) < \rho$. Es gilt dann $d_1(P_1, Q_1) < \delta \Rightarrow d_3(\chi(P_1), \chi(Q_1)) < \varepsilon$.

Satz 5.3.2. *Es sei $\varphi : \big(S, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Für jede Cauchy-Folge $(P_n)_n$ in S ist dann die Folge der Bilder $\big(\varphi(P_n)\big)_n$ Cauchy-Folge in T.*

Satz 5.3.3. *Es sei $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ ein vollständiger metrischer Raum. Jede auf dem metrischen Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ geichmäßig stetige Abbildung $\varphi : S \longrightarrow T$ kann dann auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung der Vervollständigung fortgesetzt werden.*

Beweis. *Es sei $(P_n)_n$ eine Cauchyfolge in S. Die Bildfolge $(\varphi(P_n))_n$ ist dann eine Cauchy-Folge im vollständigen Raum T; sie hat einen Limes Q. Wir kommen zum gleichen Limespunkt, wenn wir von einer äquivalenten Cauchy-Folge $(P'_n)_n$ ausgehen. Die Punkte der Vervollständigung von S entsprechen den Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Die Abbildung $\bar{\varphi}$, die der Äquivalenzklasse von $(P_n)_n$ den Punkt Q zuordnet, ist die gesuchte Fortsetzung.*

Satz („Banach'scher Fixpunktsatz")
Es sei $(\mathcal{D}, d(\cdot,\cdot))$ *ein vollständiger metrischer Raum, und es sei*

$$\Psi : (\mathcal{D}, d(\cdot,\cdot)) \to (\mathcal{D}, d(\cdot,\cdot))$$

eine α*-Kontraktion* ($\alpha < 1$)*, d.h. es gelte* $\forall y_1, y_2 \quad d(\Psi(y_1), \Psi(y_2)) \leq \alpha \cdot d(y_1, y_2)$.

- *Es existiert dann genau* $\hat{y}$ *mit* $\hat{y} = \Psi(\hat{y})$.
  (Man spricht von einem Fixpunkt der Abbildung Ψ*.)*
- *Für jeden 'Anfangswert'* $y_0 \in \mathcal{D}$ *konvergiert die Folge der iterierten Bilder gegen den Fixpunkt:* $\Psi^n(y_0) \to \hat{y}$.

Satz (Lokaler Fixpunktsatz)
Für $y_0 \in \mathcal{D}$*,* $r > 0$ *sei* $\bar{B}$ *die abgeschlossene Kugel* $\bar{B} = \{y : d(y_0, y) \leq r\}$ *. Es gelte*

1. $\forall y_1, y_2 \in \bar{B} : d(\Psi(y_1), \Psi(y_2)) \leq \alpha \cdot d(y_1, y_2)$
2. $d(\Psi(y_0), y_0) \leq (1-\alpha) r$

Dann konvergiert die Folge $(\Psi^n(y_0))_n$ *gegen einen Fixpunkt in* $\bar{B}$*.*

Beweis :
Sei $y_1 = \Psi(y_0), y_2 = \Psi(y_1), \ldots$. Wir wollen zunächst durch vollständige Induktion beweisen, dass alle y_n in $\bar{B}$ liegen. Wenn wir schon wissen, dass $y_0, y_1 \ldots, y_n$ in $\bar{B}$ liegen dann gilt für alle $m \leq n$

$$\begin{aligned} d(y_m, y_{m+1}) &\leq \alpha \cdot d(y_{m-1}, y_m) \leq \ldots \leq \alpha^m \cdot d(y_0, y_1) \\ d(y_m, y_{n+1}) &\leq d(y_m, y_{m+1}) + d(y_{m+1}, y_{m+2}) + \ldots \\ &\leq d(y_m, y_{m+1})(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) \leq d(y_0, y_1) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \alpha^m \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $d(y_0, y_{n+1}) \leq d(y_0, y_1) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \leq r$, also $y_{n+1} \in \bar{B}$.

Ausserdem folgt aus $d(y_m, y_n) \leq \text{const} \cdot \alpha^m$ für alle $m \leq n$, dass $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Für den Limes $\hat{y}$ gilt

$$\Psi(\hat{y}) = \Psi(\lim y_m) = \lim \Psi(y_m) = \hat{y} .$$

Der Limes $\hat{y}$ ist also ein Fixpunkt der Abbildung Ψ in der Menge $\bar{B}$.

5.4 Anwendung auf das Lösen von Gleichungen

In der Schulmathematik formuliert man Aufgaben folgender Art:

- 'Man löse die Gleichung $3x^2 - 6 = 0$',
- 'Zeigen Sie, dass es genau eine positive Zahl x gibt, deren Quadrat 2 ist: $x^2 = 2$.'
- 'Bestimmen Sie die Zahl $\sqrt{2}$ bist auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma!'

' Das 'Lösen' von Gleichungen ist eine der zentralen Herausforderungen der Mathematik. Was man allgemein unter einer Gleichung versteht, können wir hier nicht diskutieren, auch nicht, was man mit einer 'geschlossenen' im Gegensatz zu einer nicht geschlossenen Lösung meint. Wir befassen uns hier mit Gleichungen und 'Lösungsmethoden', die in den Rahmen der vollständigen metrischen Räume passen. Ein sehr altes und prominentes Problem dieser Art ist z. B. das Lösen polynomialer Gleichungen. Die gesuchten Lösungen sind da Zahlen. Bei uns hier werden allgemeiner die Lösungen Punkte in einem metrischen Raum sein. Man kann an Elemente in einem (passend vervollständigten) Funktionenraum denken.

Ein besonders dankbares Beispiel, an welchen man die Idee des Banachschen Fixpunktsatz illustrieren kann, ist die Quadratwurzel.

In der Schule erfährt man, dass bereits die alten Griechen festgestellt haben, dass es keine Zahl $r = \frac{m}{n}$ gibt, deren Quadrat den Wert 2 hat, und dass sie diese Einsicht für sehr bedeutsam gehalten haben. Auf der anderen Seite erfährt man, dass bereits die alten Babylonier ein Verfahren gekannt haben, die Quadratwurzel einer beliebigen positiven Zahl A beliebig genau zu bestimmen. Die Alten wussten und haben möglicherweise sogar 'bewiesen', was wir heute folgendermaßen ausdrücken:

Wenn a ein positiver 'Näherungswert' für $\sqrt{A}$ ist, dann ist $\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$ ein besserer Näherungswert. Um $\sqrt{A}$, also die Lösung der Gleichung $x^2 = A$ zu bestimmen,wähle man ein $x_0 > 0$ und definiere zu diesem 'Anfangwert' rekursiv $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$. Diese Folge 'konvergiert' gegen einen Wert, dessen Quadrat gleich A ist.

Das Prinzip, nach welchem das Iterationsverfahren für das Quadratwurzelziehen (welches manchmal das Verfahren von Heron genannt wird) konstruiert ist, kann in mehrere Richtungen verallgemeinert werden.

Wenn die gesuchte Lösung der polynomialen Gleichung $p(z) = 0$ eine einfache Nullstelle des Polynoms $p(z)$ ist, und wenn wir eine ausreichend gute Näherungslösung z_0 besitzen, dann dürfen wir erwarten, dass die Zahl

$$z_1 = z_0 - \frac{p(z_0)}{p'(z_0)}$$

eine bessere Näherungslösung ist. (Es ist $p'(z_0) \neq 0$ zu fordern.)
Der Spezialfall $p(z) = z^2 - A$ ergibt das obige Verfahren; denn $z_1 = z_0 - \frac{z_0^2 - A}{2z_0} = \frac{z_0}{2} + \frac{A}{2z_0}$.

Die Konstruktion kann man folgendermaßen plausibel machen:
Wir können das Polynom umzentrieren (z. B. mit dem Horner-Verfahren)

$$\begin{aligned} p(z) = &\quad b_0 + b_1 \cdot (z - z_0) + b_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots + b_N \cdot (z - z_0)^N \\ = &\quad b_0 + b_1 \cdot (z - z_0) + B(z) \cdot (z - z_0)^2. \end{aligned}$$

Die Zahl z_1 löst die Gleichung $b_0 + b_1 \cdot (z_1 - z_0) = 0$, denn $b_0 = p(z_0), b_1 = p'(z_0) \neq 0$.
Der Betrag von $p(z_1) = B(z_1) \cdot (z_1 - z_0)^2$ sollte klein sein im Vergleich zu $p(z_0) = b_0$, wenn z_0 und z_1 bereits nah bei der gesuchten Lösung liegen; und das sollte dann auch bedeuten, dass z_1 'näher' als z_0 an der gesuchten Nullstelle liegt.

Hinweis :
Es ist nicht einfach, für den allgemeinen Fall leicht verifizierbare Forderungen an z_0 zu formulieren, welche garantieren, dass z_{n+1} wirklich ein besserer Näherungswert ist als z_n, und dass die mit dem Anfangswert z_0 gestartete Folge konvergiert. Mit der Kunst, einen 'guten' Anfangswert zu erraten, wollen wir uns hier aber nicht befassen. Bei 'schlechten' Anfangswerten erzeugt die Iteration manchmal sehr merkwürdige Phänomene, wie wir an einem Beispiel am Ende des Abschnitts sehen werden.

Wir skizzieren ein weiteres Beispiel eines Lösungsverfahrens, welches man mit Schulkenntnissen verstehen kann:

Beispiel (Das Newton-Raphson Verfahren)
Es sei $f(\cdot)$ *zweimal stetig differenzierbar im Intervall* $\mathcal{D} = [a, b]$ *mit* $\big(f \cdot f''\big)\big(f'\big)^{-2} \leq \alpha < 1$
Wenn y_0 *ein Punkt im Intervall* $[a + r, b - r]$ *ist* ($r > 0$) *mit* $|f(y_0)| \leq (1 - \alpha) r \cdot |f'(y_0)|$, *dann findet man eine Nullstelle* $\hat{y}$: *(d. h. eine Lösung der Gleichung* $f(\hat{y}) = 0$*) als Grenzwert der Folge der iterierten Bilder bzgl. der sog. Newton-Abbildung*

$$y_1 := y_0 - \frac{f(y_0)}{f'(y_0)}, \quad \ldots\ y_{n+1} := y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad \ldots .$$

Beweis

1. Die „Newton-Abbildung" $\Psi \;: y \longmapsto y - \frac{f(y)}{f'(y)}$ erfüllt die Voraussetzunges des Fixpunktsatzes. Für $y_1, y_2 \in [a, b]$ gilt nämlich

$$\Psi(y_2) - \Psi(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \left[1 - \frac{d}{dy}\left(\frac{f}{f'}\right)(y)\right] dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{f \cdot f''}{(f')^2} dy \leq \alpha \cdot |y_2 - y_1| \ .$$

2. Wegen $|\Psi(y_0) - y_0| = \left|\frac{f(y_0)}{f'(y_0)}\right| \leq (1-\alpha)\cdot r$ liegen alle Punkte $y_n = \Psi^n(y_0)$ im Intervall $[a, b]$.

Numerische Vereinfachung

Es zeigt sich, dass es manchmal unnötigen Arbeitsaufwand bedeutet, wenn man für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ in jedem Iterationsschritt nicht nur $f(x_n)$, sondern auch $f'(x_n)$ berechnen soll. Manchmal führt auch das sog. **Vereinfachte Newton-Verfahren** zum Erfolg: Für eine geeignetes a ($a \sim f'(x_0)$) betrachtet man die Abbildung

$$\psi_a : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{a} \qquad \text{und erhofft} \qquad \psi_a^n(x_0) \to \hat{x}$$

für den (geschickt gewählten) Anfangswert x_0. Wir werden Beispiele sehen.

Hinweis :

Ein noch älteres Verfahren zur approximativen Nullpunktbestimmung für eine stetige Funktion, die in einem Intervall das Vorzeichen wechselt, ist die sog. **Regula falsi**:
Man beginnt mit einem Paar von Anfangsapproximationen x_0, x_1 mit $f(x_0) < 0 < f(x_1)$, und man bestimmt x_2 als die Nullstelle der Geraden durch $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x_1, f(x_1)\big)$. Den nächsten Näherungswert x_3 bestimmt man als die Nullstelle der Geraden durch $\big(x_2, f(x_2)\big)$ und $\big(x_i, f(x_i)\big)$, wo $i = 1$ oder $i = 2$ entsprechend dem Vorzeichen von $f(x_2)$ gewählt wird. Man bemerke : Wenn x_0 und x_1 sehr nahe aneinander liegen, dann läuft die Bestimmung von x_2 nahezu auf das Newton-Raphson-Verfahren hinaus.

Vorausschau: In der Theorie der glatten Abbildungen werden wir das Newton-Verfahrens benützen, um den folgenden fundamentalen Satz zu beweisen.

Satz (Lokale Umkehrbarkeit einer glatten Abbildung)
In einer Umgebung von $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sei $F(\cdot)$ stetig differenzierbar mit einer nichtsingulären Jacobi-Matrix $F'(x)$. Mit $\tilde{A} := F'(\hat{x})$ und $\hat{y} = F(\hat{x})$ gilt dann:
Es existiert eine Umgebung V von $\hat{y}$ und dort eine surjektive Abbildung $H(\cdot)$ auf eine Umgebung U von $\hat{x}$, sodass gilt

$$F\big(H(y)\big) = y \quad \textit{für alle } y \in V\ , \qquad H\big(F(x)\big) = x \quad \textit{für alle } x \in U\,;$$

$H(\cdot)$ *ist stetig differenzierbar mit* $H'(y) = F'(x)^{-1}$ *für* $y = F(x) \in V$.

Beweisidee:

Das vereinfachte Newton-Verfahren (in der Sprache der Gleichungssysteme formuliert) kann für y in einer Umgebung von $\hat{y}$ angewendet werden: zu lösen ist $F(x) - y = 0$.
Wir haben glatte Funktionen $f^{(i)}(x)$ in der Nähe eines zentralen Punkts $\hat{x}$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f^{(1)}(x^1, \dots, x^m) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(m)}(x^1, \dots x^m) \end{pmatrix} \quad A \cong \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^j} \right)(\hat{x}) \quad \text{nichtsingulär ;}$$

und wir suchen eine gemeinsame Nullstelle der Funktionen $f^{(i)} - y^i$ für Tupel y in der Nähe von $\hat{y}$. Diese gewinnen wir einzeln für die gegebenen y als Limes einer Folge $x^{(n)} = x^{(n)}(y)$. Es stellt sich als günstiger heraus, das Problem als ein Fixpunktproblem in einem vollständigen Funktionenraum zu formulieren. Wir konstruieren eine Funktionenfolge $H^{(n)}$ in einer (noch einzugrenzenden) Umgebung $\tilde{V}$ von $\hat{y}$:

$$H^{(0)}(y) \equiv \hat{x}, \qquad H^{(n+1)}(y) = H^{(n)}(y) - A^{-1} \cdot \big(F(H^{(n)}(y)) - y\big) = \psi(H^{(n)}(y)).$$

Die Abbildung ψ wirkt kontrahierend bzgl. der Supremumsnorm auf dem Raum der stetigen Funktionen über $\tilde{V}$. Man zeigt weiter, dass die Funktionenfolge $H^{(n)} = \psi^n(H^{(0)})$ eine Cauchy-Folge ist bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz auf einer Umgebung $V \subseteq \tilde{V}$ von $\hat{y}$. Der Limes ist ein ‘Fixpunkt’ H. Für diesen Fixpunkt gilt $F(H(y)) - y = 0$.
Dies und die interessanten Eigenschaften von H behandeln wir im Abschnitt über stetige Differenzierbarkeit; ein Spezialfall sollte aber schon an dieser Stelle überschaubar sein.

Spezialfall (Lokales Invertieren einer polynomialen Abbildung)
Es sei $p(z)$ ein Polynom mit einer einfachen Nullstelle im Nullpunkt, $p(z) = a \cdot z + z^2 \cdot g(z)$. Das vereinfachte Newton-Verfahren angewandt auf $p(z) - w = 0$ liefert für w in einer Umgebung des Nullpunkts eine Folge von Polynomen

$$Z_0(w) = w, \qquad Z_{n+1}(w) = Z_n(w) - \frac{1}{a}\big(p(Z_n(w)) - w\big),$$

welche in einer Umgebung des Nullpunkts gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion ist, wie wir sehen werden, eine Funktion $f(z)$, welche in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann.

Der einfachste Fall eines vereinfachten Newton-Verfahrens bezieht sich auf ein eindeutig lösbares affines Gleichungssystem. Diesen Fall können wir nun tatsächlich hier schon vollständig behandeln. Die Thematik sollte aus der Linearen Algebra vertraut sein; dort geht man dann allerdings ganz andere Wege.

Iterationsverfahren zur Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

Gegeben ist eine nichtsinguläre Matrix $\tilde{A}$ und eine Spalte $\tilde{b}$. Gesucht ist $\hat{y}$ mit

$$\tilde{A} \cdot \hat{y} + \tilde{b} = 0 \,.$$

Es sei A eine Matrix 'in der Nähe' von $\tilde{A}$, deren Inverse A^{-1} wir kennen. Zu fordern ist $(I - A^{-1} \cdot \tilde{A})^n \to 0$. Man sagt in diesem Fall, dass $(I - A^{-1} \cdot \tilde{A})$ Spektralradius < 1 hat.

Die Lösung ist hier der eindeutig bestimmte Fixpunkt der Abbildung

$$\psi : \qquad y \mapsto y - A^{-1} \cdot f(y) = y - A^{-1}(\tilde{A}y + \tilde{b}) \ .$$

In der Tat: Die iterierten Abbildungen $\psi^n(\cdot)$ sind leicht hinzuschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} \psi(y) &= (I - A^{-1}\tilde{A})y - A^{-1}\tilde{b} = My - b \\ \psi^2(y) &= M(My - b) - b = M^2y - Mb - b \\ \psi^n(y) &= M^n y - (I + M + M^2 + \ldots + M^{n-1})b \ . \end{aligned}$$

Offenbar haben wir für jeden Anfangswert y Konvergenz gegen den Fixpunkt

$$\hat{y} = \lim \psi^n(y) = -(I - M)^{-1}b = \left(A^{-1}\tilde{A}\right)^{-1} \cdot A^{-1}\tilde{b} = \quad \tilde{A}^{-1}\tilde{b} \ .$$

Nochmals die Quadratwurzel

Wir wollen die Funktion $\sqrt{x}$ auf einer Umgebung von 1 durch eine Folge von Funktionen einfacherer Art approximieren. Die alten Ideen funktionieren, obwohl es hier nicht um die Approximation einer Zahl $\sqrt{A}$ geht, sondern um die Approximation in einem Funktionenraum. Das Newton-Raphson-Verfahren suggeriert eine Abbildung eines Funktionenraums in sich, das vereinfachte Newton-Verfahren suggeriert eine andere Abbildung. Wir beginnen jedenfalls mit der konstanten Funktion $y_0(x) \equiv 1$, die wohl in einer Umgebung von 1 eine ausreichend gute Approximation der Wurzelfunktion sein sollte. Das Newton-Raphsen Verfahren liefert eine Approximation durch gebrochenrationale Funktionen. Das vereinfachte Newtonverfahren liefert eine Folge von Polynomen, von der wir sehen, dass sie im Intervall $(0, 2)$ gegen die Wurzelfunktion $\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x - 1)}$ konvergiert.
Wir bemerken, dass es um ein Approximationsverfahren geht, welches man in Konkurrenz stellen kann zur bekannten Potenzreihenentwicklung

$$\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x - 1)} = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \ldots = \sum \binom{1/2}{k}(x - 1)^k \ .$$

Konstruktion 1 (Newton-Raphson)

$$\begin{aligned} y_0 \equiv 1 \quad &, \qquad y_1(x) = \tfrac{1}{2}\left(y_0(x) + \tfrac{x}{y_0(x)}\right) = \tfrac{1}{2}(1 + x) \\ y_2(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot \left[\tfrac{1}{2}(1 + x) + \tfrac{2x}{1+x}\right], \ldots \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(y_n(x) + \tfrac{x}{y_n(x)}\right) = y_n(x) - \tfrac{y_n^2(x) - x}{2y_n(x)} \ . \end{aligned}$$

Man braucht nur Schulmathematik, um zu sehen, dass für alle $x > 0$ gilt

$$y_1(x) \geq y_2(x) \geq \ldots \ \lim \searrow y_n(x) = \sqrt{x} \ .$$

Wir bemerken, dass die $y_n(\cdot)$ gebrochenrationale Funktionen sind.

Konstruktion 2 (Vereinfachtes Newton-Verfahren im Funktionenraum)
Das vereinfachte Newton-Verfahren für $f(y) = y^2 - x$ ('zum Zentralpunkt $\tilde{y}$') liefert wegen $f'(\tilde{y}) = 2\tilde{y}$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2\tilde{y}}(y_n^2 - x) \ .$$

Wählen wir $\tilde{y} = 1$ und starten wir die Iteration mit $y_0(x) \equiv 1$.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) - \tfrac{1}{2}\left(y_0^2(x) - x\right) = \tfrac{1}{2}(1+x) \\ y_2(x) &= \tfrac{1}{2}(1-x) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}(1+x)^2 - x\right) \\ y_{n+1}(x) &= y_n(x) - \tfrac{1}{2}\left(y_n^2(x) - x\right) \ . \end{aligned}$$

Bei $y_n(\cdot)$ handelt es sich um ein Polynom vom Grad 2^{n-1}. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Funktionenfolge $y_n(\cdot)$ in einer Umgebung von 1 gleichmäßig konvergiert. Für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{|y_n(x) - \sqrt{x}| : \quad \delta \le x \le 2 - \delta\right\} = 0.$$

Hinweis auf chaotisches Verhalten

Die Methode der Babylonier kann man auch im Komplexen studieren. Wir wenden sie der Einfachheit nur auf den Fall $A = 1$ an. Der Iterationsschritt lautet dann also

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) \ .$$

Man sieht leicht, dass die Folge für einen Anfangswert z_0 in der rechten Halbebene gegen $+1$ konvergiert, und für ein z_0 mit $\Re(z_0) < 0$ gegen -1.
Was aber passiert mit den Anfangswerten $z_0 = ir_0$ auf der imaginären Achse? Alle Bilder liegen auf der imaginären Achse. Wir studieren die Iterierten dieser Abbildung der imaginären Achse

$$r_n \mapsto r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n - \frac{1}{r_n}\right) \quad \text{für } r \in \Re \ .$$

Wir stellen hier Erstaunliches fest: Diese Abbildung hat periodische „Bahnen" zu jeder Periode. (Der unendlich ferne Punkt ist ein Fixpunkt.) Eine 2-periodische Bahn ergibt sich z.B. für $r_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; denn wir haben dann

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \text{bzw.} \ r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \text{d.h.} \ r_{n+1} = -r_n \ .$$

Für die meisten Anfangspunkte zeigen die iterierten Bilder ein chaotisches Verhalten. Ein überraschend leichten Überblick über alle Bahnen gewinnt man, wenn man die Achse durch die Cotangens-Funktion parametrisiert

$$r = -\cot(\pi\alpha) \ \text{mit} \ \alpha \in [0, 1] \ .$$

Es gilt für das Bild $\varphi(\alpha)$ des Punkts α

$$-\frac{1}{2}\left(-\cot(\pi\alpha)+\frac{1}{\cot(\pi\alpha)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}-\frac{\sin\pi\alpha}{\cos\pi\alpha}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sin\pi\alpha\cdot\cos\pi\alpha}(\cos^2\pi\alpha-\sin^2\pi\alpha)=\cot(\pi\cdot 2\alpha)\ .$$

$\varphi(\cdot)$ ist also die „Verdoppelung modulo 1"

$$\varphi\ :\alpha\mapsto 2\alpha(\mathrm{mod} 1)\quad \text{für } \alpha\in[0,1]\ .$$

Die Punkte $\alpha\in[0,1]$ kann man durch dyadische Brüche darstellen

$$\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\cdot 2^{-i}\leftrightarrow(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots)\qquad \text{mit } \omega_i\in\{0,1\}\ .$$

Die „Verdoppelung modulo 1" wird in der Darstellung mit $0-1$-Folgen der „Shift nach links" (wobei der vorderste Eintrag wegfällt).

Beispiele für Bahnen:

1. $\alpha_0=\frac{1}{3}=(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots)\qquad \cot\left(\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=\cot(60^\circ)=\sqrt{3}$
   $\alpha_1=\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=(1\ 01\ 0\ 1\ 0\ \ldots)=\frac{2}{3}$
   $\alpha_2=\varphi^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Wir haben hier also eine Bahn mit der Periode 2.

2. $\alpha=\frac{1}{7}=(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots)$.
   Die Bahn hat die Periode 3.

Hinweis

Das Newton-Verfahren liefert für die Bestimmung der Kubikwurzel im Komplexen die Abbildung

$$\psi(z)=z-\frac{1}{3z^2}(z^3-A)\quad .$$

Wenn wir genügend nahe an einer der drei Lösungen beginnen, dann konvergieren die iterierten Bilder sehr schnell gegen diese Lösung. Wenn man die Anziehungsgebiete global studiert, dann zeigt sich, dass diese nicht etwa die Form von Sektoren haben. Die Anziehungsgebiete sind eng ineinander mit merkwürdigen 'Rändern' verschlungen. Es zeigt sich, dass sich zwei Anziehungsbereiche nur in solchen Punkten treffen können, in deren Nähe auch Punkte liegen, welche zum dritten Anziehungsbereich gehören („Julia-Mengen"). Die Chaostheoretiker haben erfolgreich an dem Problem gearbeitet, schöne Bilder solcher Mengen zu produzieren.

6 Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis (3 A).

Nicht nur in metrischen Räumen gibt es den Begriff der konvergenten Folge und den Begriff der stetigen Funktion. Wir behandeln diese Begriffe im allgemeineren Rahmen der topologischen Räume. Dabei beschränken wir uns auf Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis. In diesem Rahmen erarbeiten wir insbesondere ein tieferes Verständnis für den Begriff der Kompaktheit: 'Kompaktheit = Folgenkompaktheit'.

6.1 Topologie, Konvergenz, Kompaktheit

Definition 6.1.

Eine Menge S wird zu einem **topologischen Raum**, indem man ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ als das System der offenen Mengen auszeichnet. Von $\mathfrak{U}$ ist zu fordern

(i) $\emptyset, S \in \mathfrak{U}$

(ii) $U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \;\Rightarrow\; U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$

(iii) $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ für alle $\alpha \in I$ (Indexmenge) $\;\Rightarrow\; \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathfrak{U}$

Man sagt kurz: Eine **Topologie** über S ist ein Mengensystem $\mathfrak{U}$, welches gegenüber finiter Durchschnittsbildung und der Bildung beliebiger Vereinigungen abgeschlossen ist. Ein solches Mengensystem macht, wie gesagt, die ' Punktmenge' S zu einem topologischen Raum $(S, \mathfrak{U})$. Die Elemente von $\mathfrak{U}$ heissen die **offenen** Mengen. Die Komplemente der offenen Mengen heissen die (bzgl. der gegebenen Topologie) **abgeschlossenen** Mengen.

Sprechweise (Spurtopologie)**.** Wenn S' eine Teilmenge des Grundraums S ist, dann definiert das Mengensystem $\mathfrak{U}' = \{S' \cap U : U \in \mathfrak{U}\}$ eine Topologie auf S'. Man nennt sie die auf S' induzierte Topologie, oder auch die Spurtopologie.

Man bemerke: Wenn $\mathfrak{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen im topologischen Raum $(S, \mathfrak{U})$ ist, dann ist das System aller 'Spuren' $F' = S' \cap F$ mit $F \in \mathfrak{F}$ das System $\mathfrak{F}'$ der abgeschlossenen Mengen für die auf S' induzierte Topologie.

$$\mathfrak{F}' = \left\{F' : \quad F' = F \cap S' \text{ mit } F \in \mathfrak{F}\right\}.$$

Sprechweise (Überdeckungen)**.**

Eine Familie von Mengen $\{A_i : i \in I\}$ heisst eine Überdeckung der Menge B, wenn $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq B$. Wenn die A_i offene Mengen sind, dann spricht man von einer offenen Überdeckung.

Satz 6.1.1. *Zu jeder Überdeckung $\mathfrak{S}$ der Menge S gibt es eine gröbste ('schwächste') Topologie, welche $\mathfrak{S}$ umfasst. Man nennt sie die von $\mathfrak{S}$ erzeugte Topologie.*

Beweis. *Man kann im vorliegenden Fall die Mengen, die in der erzeugten Topologie offen sind, konkret beschreiben. Es sind die Durchschnitte von endlich vielen Elementen von $\mathfrak{S}$ und alle Mengen, die man als Vereinigung dieser endlichen Durchschnitte gewinnen kann.*

$$\mathfrak{U} = \Big\{ U : \quad U = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} \big(S_{\alpha_1} \cap \dots \cap S_{\alpha_m}\big) \; mit \, S_{\alpha_j} \in \mathfrak{S} \Big\}.$$

In der Tat ist das System dieser Mengen gegenüber endlicher Durchnittsbildung und beliebiger Vereinigungbildung 'abgeschlossen'.

(Warnung: Die Abgeschlossenheit eines Teilsystems (der Potenzmenge $\mathfrak{P}(S)$) bezüglich einer Mengenoperation hat natürlich nichts zu tun mit der Abgeschlossenheit einer Menge $A \subset S$ bzgl. einer Topologie.)

Definition 6.2 (Abzählbare Basis)**.**
Ein topologischer Raum heisst ein Raum mit abzählbarer Basis, wenn ein abzählbares System offener Mengen $\mathfrak{B}$ existiert, sodass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{B}$ gewonnen werden kann.

Satz 6.1.2 (Abzählbare Überdeckung)**.** *In einem topologischen Raum mit abzählbarer Basis $(S, \mathfrak{U})$ existiert zu jeder offenen Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung.*

Beweis. *Es sei $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ irgendeine offene Überdeckung, und es seien $V_1, V_2, \dots$ (in irgendeiner Aufzählung) diejenigen Elemente der abzählbaren Basis, die ganz in einem der U_α enthalten sind. Zu jedem dieser V_j wählen wir ein $U_{\alpha_j} \supseteq V_j$. Die abzählbar vielen U_{α_j} sind eine Teilüberdeckung; denn da jeder Punkt P in einem der U_α liegt, und dieses U_α die Vereinigung der in ihr enthalten Basismengen ist, liegt P in einer der speziellen Mengen V_j und erst recht in einer der ausgewählten Mengen U_{α_j}.*

Ein besonders wichtiger Typ von topologischen Räumen sind die metrisierbaren Räume.

Definition 6.3 (Metrisierbarkeit)**.**
Ein topologischer Raum $(S, \mathfrak{U})$ heisst ein metrisierbarer Raum, wenn eine Metrik $d(\cdot,\cdot)$ existiert, sodass gilt

$$U \in \mathfrak{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall P \in U \, \exists \varepsilon > 0 : \; B_\varepsilon(P) \subseteq U.$$

In Worten: U ist genau dann offen, wenn zu jedem Punkt in U ein Ball mit Mittelpunkt P existiert, der ganz in U enthalten ist.

Wenn $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum ist, dann heisst das System der Mengen dieser Art die von $d(\cdot,\cdot)$ erzeugte Topologie. Zwei Metriken auf S heissen (topologisch) äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie erzeugen.

Was die Existenz einer abzählbaren Basis für einen metrischen Raum bedeutet, haben wir bereits früher diskutiert. Es gilt der

Satz 6.1.3. *Ein metrischer Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn er separabel ist, wenn also eine überall dichte Menge existiert.*

Beweis. *Ein separabler metrischer Raum* $\big(\mathsf{S}, \mathsf{d}(\cdot,\cdot)\big)$ *ist ein Raum mit abzählbarer Basis. Wenn nämlich* $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots$ *eine dichte Menge ist, dann ist das System der offenen Kugeln mit den Mittelpunkten* P_j *und rationalen Radien eine abzählbare Basis der Topologie.*

Umgekehrt: Wenn ein metrischer Raum eine abzählbare Basis besitzt, dann ist er separabel. Wählen wir nämlich in jeder der abzählbar vielen Basismengen V_j *je einen Punkt* P_j*, so ist* $\{\mathsf{P}_j : j \in J\}$ *dicht; denn für jeden Punkt* P *umfasst jede* $\varepsilon-$*Kugel* $\mathsf{B}_\varepsilon(\mathsf{P})$ *eine Basismenge, und sie enthält daher einen der Punkte* P_j.

Nachdem wir einiges über Mengensysteme über S gesagt haben, wollen wir nun auch noch einiges über die individuellen Mengen sagen.

Sprechweise (Offener Kern, Abgeschlossene Hülle, topologischer Rand.)**.**
Zu jeder Menge B in einem topologischen Raum gibt es eine größte offene Teilmenge; sie heisst der offene Kern und wir mit B^0 bezeichnet. Sie besitzt andererseits eine kleinste abgeschlossene Obermenge; sie heisst die abgeschlossene Hülle und wird mit $\bar{\mathsf{B}}$ bezeichnet. Die Menge $\partial\mathsf{B} = \bar{\mathsf{B}} \setminus \mathsf{B}^0$ heisst der topologische Rand von B.

Auf die Frage, was es denn heisst, dass eine Punktmenge in einem topologischen Raum offen ist, sollte man zunächst einmal antworten: U ist offen, genau dann wenn U Element des Mengensystems $\mathfrak{U}$ ist. Eine Menge F ist abgeschlossen, wenn sie das Komplement einer offenen Menge ist.

Mit Hilfe der eben eingeführten Sprechweisen können wir nun aber die Eigenschaft einer Menge, abgeschlossen zu sein, auch von den Punkten her beschreiben. Wir bemerken zuerst für eine beliebige Menge B: Das Komplement der abgeschlossenen Hülle von B ist der offene Kern des Komplements von B: $\complement\big(\bar{\mathsf{B}}\big) = \big(\complement\mathsf{B}\big)^0$. Für einen beliebigen Punkt P haben wir nun

$$\begin{aligned} \mathsf{P} \notin \bar{\mathsf{B}} &\Longleftrightarrow \mathsf{P} \text{ liegt im offenen Kern von } \complement\mathsf{B} \\ &\Longleftrightarrow \complement\mathsf{B} \quad \text{ist Umgebung von } \mathsf{P} \\ &\Longleftrightarrow \text{Es existiert eine offene Menge } \mathsf{U}\text{, die } \mathsf{P} \text{ enthält, aber keinen Punkt von } \mathsf{B}. \end{aligned}$$

Äquivalent zu dieser Aussage ist: Ein Punkt P liegt in der abgeschlossenen Hülle von B, wenn jede seiner Umgebungen Punkte von B enthält. Der folgende Satz sagt es nochmals mit etwas anderen Worten.

Satz 6.1.4. *Eine Menge* F *ist abgeschlossen, wenn sie mit ihrer abgeschlossenen Hülle übereinstimmt, wenn also jeder Punkt, welcher in einer beliebig gewählten Umgebung Punkte von* F *enthält, selbst zu* F *gehört.*

Sprechweise (Umgebungsfilter)**.** Das System aller Umgebungen eines Punktes P heisst der Umgebungsfilter von P. Das System aller offenen Umgebungen von P wird mit $\mathfrak{U}_\mathsf{P}$ bezeichnet.

Definition 6.4. Man sagt von einer Punktfolge $(\mathsf{P}_n)_n$ in einem topologischen Raum, dass sie gegen den Punkt P^* konvergiert, wenn gilt

$$\forall \mathsf{U} \in \mathfrak{U}_{\mathsf{P}^*}\ \exists \mathsf{N} :\ \forall n \geq \mathsf{N} :\ \mathsf{P}_n \in \mathsf{U}.$$

Sprechweise. Man sagt von einer Topologie, dass sie das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn es zu jedem Punkt P abzählbar viele offene Mengen gibt, sodass jede Umgebung von P eine von ihnen umfasst.

Bemerke: Jede Topologie mit abzählbarer Basis erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. In einem topologischen Raum mit abzählbarer Basis leistet jede abzählbare Basis das Verlangte simultan für jeden Punkt.

Satz 6.1.5 (Konvergente Folgen und Abgeschlossenheit).
Es sei B eine Punktmenge in einem topologischen Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Es gilt dann: Ein Punkt P gehört genau dann zur abgeschlossenen Hülle $\bar{\mathsf{B}}$, wenn es in B eine Folge gibt, die gegen P konvergiert.

Beweis. *Sei $\mathsf{P} = \lim \mathsf{P}_n$ mit $\mathsf{P}_n \in \mathsf{B}$ für alle n. In jeder Umgebung U von P liegen dann Punkte P_n; es liegen sogar schliesslich alle P_n in U.*

Umgekehrt: Es sei P ein Punkt, sodass jede Umgebung von P Punkte von B enthält. Es sei $\mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2, \ldots$ eine Aufzählung eines Systems offener Umgebungen, wie es durch das ersten Abzählbarkeitsaxiom garantiert ist. Alle Mengen $\mathsf{V}_n = \bigcap_{j=1}^{n} \mathsf{U}_j$ haben einen nichtleeren Durchschnitt mit B. Wählen wir P_n in diesem Durchschnitt, dann konvergiert die Folge $(\mathsf{P}_n)_n$ gegen P.

Der Satz erlaubt die folgende Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt: Eine Menge B ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente B-Folge der Grenzwert zu B gehört.

Konvergente Folgen und Kompaktheit

Die oben genannten Axiome für ein topologischen Raum (mit abzählbarer Basis) reichen nicht aus für die Bedürfnisse der Analysis. Für eine vernünftige Theorie der konvergenten Folgen benötigt man Trennungsaxiome. Im einfachsten Fall fordert man, dass die Punkte durch offene Mengen getrennt werden können im Sinne der

Definition 6.5 (Hausdorff-Raum).
Ein topologischer Raum $\big(\mathsf{S}, \mathfrak{U}\big)$ heisst ein Hausdorff-Raum, wenn gilt

$$\forall \mathsf{P}_1 \neq \mathsf{P}_2 \quad \exists \mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2 \in \mathfrak{U} : \quad \mathsf{U}_1 \cap \mathsf{U}_2 = \emptyset,\ \mathsf{U}_1 \ni \mathsf{P}_1,\ \mathsf{U}_2 \ni \mathsf{P}_2.$$

Wenn die Topologie auch noch eine abzählbare Basis besitzt, dann spricht man von einem Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, kurz von einem HRaB.

Eine herausragende Rolle in der Analysis spielen die kompakten Teilmengen eines HRaB. Die Kompaktheit einer Teilmenge ist eine innere Eigenschaft des Menge mit der induzierten Topologie. Es genügt daher zunächst einmal, zu definieren, war es heisst, dass ein HRaB kompakt ist.

Definition 6.6. Ein Hausdorff-Raum heisst ein kompakter Raum, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beispiel. Wenn $(\mathsf{P}_n)_n$ eine konvergente Folge in einem Hausdorff-Raum ist, dann ist die Menge B der Punkte einschliesslich dem Limespunkt eine kompakte Menge. Wenn nämlich $\{\mathsf{U}_\alpha : \alpha \in \mathrm{I}\}$ eine offene Überdeckung ist, dann enthält eine der Mengen den Limespunkt und damit schliesslich alle P_n. Man braucht nur noch endlich viele der U_α, um die restlichen Punkte zu überdecken.

Insbesondere sind natürlich die endlichen Mengen kompakt. Die endlichen Mengen in einem Hausdorff-Raum sind auch abgeschlossen. Es genügt, das für die einpunktigen Mengen $\{\mathsf{P}^*\}$ nachzuweisen. Zum Nachweis braucht das Hausdorff'sche Trennungsaxiom gar nicht in voller Schärfe. Es genügt feststellen, dass es zu jedem $\mathsf{P} \neq \mathsf{P}^*$ eine offene Umgebung von P gibt, die P^* nicht enthält. Die Vereinigung aller dieser offenen Mengen ist das Komplement von $\{\mathsf{P}^*\}$. Die einpunktige Menge ist also abgeschlossen.

Nach dem Satz am Anfang des Unterabschnitts ist ein HRaB genau dann kompakt, wenn jede abzählbare Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir formulieren den Kompaktheitsbegriff nun auch für Teilmengen eines HRaB, d. h. für die auf den Teilmengen induzierte Topologie, die Spurtopologie.

Definition 6.7. Eine Teilmenge B eines HRaB $(\mathsf{S}, \mathfrak{U})$ heisst bedingt kompakt (conditionally compact im Englischen), wenn jede (abzählbare) offene Überdeckung der abgeschlossenen Hülle von B eine endliche Teilüberdeckung besitzt, wenn also die abgeschlossene Hülle (mit der Spurtopologie) ein kompakter Raum ist.

Ein HRaB heisst lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die bedingt kompakt ist.

Satz 6.1.6 (Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen).
Jede kompakte Teilmenge eines HRaB $(\mathsf{S}, \mathfrak{U})$ ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.

Beweis. *Die zweite Aussage ist trivial. Sei nämlich $\{\mathsf{U}_\alpha : \alpha \in \mathrm{I}\}$ eine offene Überdeckung der abgeschlossenen Menge F und $\mathsf{U}_0 = \mathsf{S} \setminus \mathsf{F}$. Dann ist $\mathsf{U}_0 \cup \bigcup_\alpha \mathsf{U}_\alpha \supseteq \mathsf{S}$ eine offene Überdeckung des kompakten Gesamtraums S. Es existieren endlich viele U_α, die F überdecken.*

Den Beweis der ersten Aussage führen wir mit der folgenden Trennungsaussage, welche auch für sich interessant ist.

Satz 6.1.7 (Die Trennung kompakter Teilmengen).
Wenn K und L disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raums sind, dann existieren disjunkte offene Mengen U und V mit $\mathsf{U} \supseteq \mathsf{K}$ und $\mathsf{V} \supseteq \mathsf{L}$.

Beweis. *Zu jedem Punktepaar* P, Q *mit* $P \in K$ *und* $Q \in L$ *existieren disjunkte offene Mengen* $U_{P,Q}, V_{P,Q}$ *mit* $U_{P,Q} \ni P$ *und* $V_{P,Q} \ni Q$. *Wir wählen solche Paare offener Mengen. Wenn* Q *fixiert ist, dann ist* $\{U_{P,Q} : P \in K\}$ *eine offene Überdeckung der kompakten Menge* K. *Es existiert eine endliche Teilüberdeckung* $U_{P_1,Q}, \ldots, U_{P_M,Q}$. *Für* $\tilde{U}_Q = \bigcup U_{P_m,Q}$ *und* $\tilde{V}_Q = \bigcap V_{P_n,Q}$ *gilt* $\tilde{U}_Q \supseteq K$ *und* $\{\tilde{V}_Q : Q \in L\}$ *ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge* L. *Wählen wir daraus eine endliche Teilüberdeckung* $\tilde{V}_{Q_1}, \ldots, \tilde{V}_{Q_N}$ *und setzen wir* $V = \bigcup \tilde{V}_{Q_n}$, $U = \bigcap \tilde{U}_{Q_n}$, *so haben wir disjunkte offene Umgebungen von* K *und* L, *wie gewünscht.*

Wir können jetzt den Beweis nachtragen, dass jede kompakte Teilmenge K eines HRaB Menge abgeschlossen ist. Zu jedem Punkt $Q \notin K$ gibt es eine offene Umgebung U_Q , die zu K disjunkt ist. Die Vereinigung dieser U_Q ist offen, und sie ist das Komplement von K.

Satz 6.1.8 (Kompaktheit = Folgenkompaktheit).
Eine Teilmenge B *eines HRaB* $(S, \mathfrak{U})$ *ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist, wenn also jede Punktfolge in* B *eine in* B *konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. *Es genügt, den Satz für* $B = S$ *zu beweisen, denn sowohl die Kompaktheit als auch die Folgenkompaktheit sind innere Eigenschaften, d. h. Eigenschaften, die sich auf die induzierte Topologie beziehen.*

Es ist manchmal nützlich die Kompaktheitsbedingung umzuformen. Die folgenden Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Kompaktheit des HRaB $(S, \mathfrak{U})$

- *Jede Familie abgeschlossener Mengen* $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ *mit der 'endlichen Durchschnittseigenschaft'* $\bigcap_{\alpha \in I'} F_\alpha \neq \emptyset$ *für alle endlichen* I'
  hat insgesamt einen nichtleeren Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$.

- *Wenn eine Familie abgeschlossener Mengen* $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ *einen leeren Durchschnitt hat, dann gibt es eine endliche Teilfamilie, die einen leeren Durchschnitt hat.*

Wenn nämlich eine Familie offener Mengen den Raum überdeckt, dann bedeutet das für die Komplemente, dass sie einen leeren Durchschnitt haben.

Es sei $(P_n)_n$ *eine Punktfolge im kompakten Raum und* F_N *die abgeschlossene Hülle der 'Restfolge'* $\{P_n : n \geq N\}$. *Diese abgeschlossenen Mengen haben einen nichtleeren Durchschnitt, weil je endlich viele von ihnen einen nichtleeren Durchschnitt haben. Sei* P^* *ein Punkt in diesem Durchschnitt. Und sei* $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$ *eine Folge offener Umgebungen von* P^*, *sodass jede Umgebung von* P^* *ein solches* U_j *umfasst. (Wir benützen hier das erste Abzählbarkeitsaxiom.)* P^* *liegt in der abgeschlossenen Hülle der Restfolge* $\{P_n : n \geq j\}$; *es existiert* $n_j \geq j$, *sodass* $P_{n_j} \in U_j$. *Wir setzen* $m_j = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_j\}$. *Die Folge* $(P_{m_j})_j$ *konvergiert gegen* P^*.

Sei umgekehrt S *nicht kompakt und* $\{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ *eine Überdeckung, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt, wo also* $\bigcup_1^n U_j$ *ein nichtleeres Komplement hat für jedes* n. *Wählen wir* P_n *in diesem Komplement. Diese Folge besitzt keine konvergente Teilfolge. Nehmen wir nämlich an, es gäbe eine gegen* $\tilde{P}$ *konvergente Teilfolge; und es sei sei* $\tilde{U}$ *eine*

Menge in gegebenen Überdeckung, wenn den Limespunkt $\tilde{P}$ enthält. In dieser Umgebung des Limespunkts $\tilde{P}$ müssten dann schliesslich alle P_n liegen; und das steht im Gegensatz zur Konstruktion.

Nachdem wir uns schon immer wieder einmal mit der Einschränkung einer Topologie auf eine Teilmenge beschäftigt haben (Stichwort 'Induzierte Topologie'), besprechen wir jetzt auch noch (in aller Kürze) eine weitere wichtige Konstruktionsweise für Topologien.

Definition 6.8 (Produkttopologie)**.**
Es seien $\left(S^{(1)}, \mathfrak{U}^{(1)}\right)$ und $\left(S^{(2)}, \mathfrak{U}^{(2)}\right)$ topologische Räume vom Typ HRaB. Man macht das cartesische Produkt $S = S^{(1)} \times S^{(2)}$ zu einem topologischen Raum $\left(S, \mathfrak{U}\right)$, indem man festlegt: die $U \in \mathfrak{U}$ sind die Mengen, die sich als Vereinigung von 'Rechtecken' $U^{(1)} \times U^{(2)}$ $(U^{(i)} \in \mathfrak{U}^{(i)})$ gewinnen lassen: $U = \bigcup_{\alpha \in I} U^{(1)}_\alpha \times U^{(2)}_\alpha$.

Man notiert $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(1)} \otimes \mathfrak{U}^{(2)}$, und nennt $\left(S^{(1)} \times S^{(2)}, \mathfrak{U}^{(1)} \bigotimes \mathfrak{U}^{(2)}\right)$ das topologische Produkt der Räume $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$.

Bemerke: Das System dieser Vereinigungen ist durchschschnitsabgeschlossen; denn

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} U^{(1)}_\alpha \times U^{(2)}_\alpha\right) \quad \cap \quad \left(\bigcup_{\beta\in J} U^{(1)}_\beta \times U^{(2)}_\beta\right) \quad = \quad \bigcup_{\alpha,\beta}\left(U^{(1)}_\alpha \cap U^{(1)}_\beta\right) \times \left(U^{(2)}_\alpha \cap U^{(2)}_\beta\right).$$

Das Mengensystem $\mathfrak{U}$ definiert tatsächlich eine Hausdorff-Topologie mit abzählbarer Basis. Ist nämlich $\mathfrak{B}^{(1)}$ eine abzählbare Basis von $\mathfrak{U}^{(1)}$, und $\mathfrak{B}^{(2)}$ eine abzählbare Basis von $\mathfrak{U}^{(2)}$, dann ist das System der speziellen Rechtecke $B^{(1)} \times B^{(2)}$ $(B^{(i)} \in \mathfrak{B}^{(i)})$ eine abzählbare Basis der Produkttopologie.

Satz 6.1.9. *Sind $\left(S^{(1)}, \mathfrak{U}^{(1)}\right)$ und $\left(S^{(2)}, \mathfrak{U}^{(2)}\right)$ kompakte Räume (vom Typ HRaB), dann ist das Produkt $\left(S^{(1)} \times S^{(2)}, \mathfrak{U}^{(1)} \bigotimes \mathfrak{U}^{(2)}\right)$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. *Es ist eine hochberühmte Tatsache, dass Produkte kompakter Räume kompakt sind. Sie gilt in sehr allgemeinen Kontexten, und ist da bekannt als der Satz von Tychonow. Uns interessieren hier nur endliche (oder allenfalls abzählbare) Produkte von kompakten Räumen mit abzählbarer Basis; und wir beweisen den 'Satz von Tychonow' nur im oben formulierten Spezialfall: das Produkt zweier kompakter HRaB ist ein kompakter HRaB.*

Es sei also $(P^{(1)}_n, P^{(2)}_n)_n$ eine beliebige Folge im cartesischen Produkt $S^{(1)} \times S^{(2)}$. Es existiert eine Teilfolge, entlang welcher die Folge $(P^{(1)}_n)_n$ in $S^{(1)}$ konvergiert; und entlang einer geeigneten Teilfolge dieser Teilfolge konvergiert auch die Folge der $P^{(2)}_n$. Entlang dieser Teilfolge konvergieren die Paare $(P^{(1)}_n, P^{(2)})$ in der Produkttopologie.

Rückblick: In vielen elementaren Lehrbüchern findet man abgekürzte Darstellungen des Begriffs der kompakten Teilmenge der reellen Achse. Dabei erscheint dann häufig der Begriff der Abgeschlossenheit als nah verwandt mit der Idee der Vollständigkeit und der Begriff der Beschränktheit (im Sinne der Ordnung) als nah verwandt mit der Idee der Totalbeschränktheit. Die Kürze erzeugt somit das (ebenso unnötige wie bedauerliche) didaktische Problem, dass man in Folgevorlesungen die falsche Nähe (und die damit möglicherweise gewonnenen intuitiven Vorstellungen) aufzubrechen hat.

Wir gehen hier einen anderen Weg. Wir haben zentrale Aussagen über kompakte Teilmengen der reellen Achse (und des Raums $\mathbb{R}^n$) von vorneherein in einem Rahmen entwickelt, der weit trägt im Studiengang Mathematik. Die für die 'Arithmetisierung der Analysis' im 19. Jahrhundert grundlegenden Sätze, die in den Lehrbüchern die Namen 'Satz von Bolzano-Weierstraß' und 'Satz von Heine-Borel' tragen, erscheinen bei uns in einer Form, vor welcher viele Lehrtexte für Erstsemester zurückschrecken. Während der Satz von Bolzano-Weierstraß in vielen Lehrtexten lautet: *Die folgenkompakten Teilmengen der reellen Achse sind die beschränkten abgeschlossenen Mengen,* haben wir uns die folgende Einsicht erarbeitet:

Die folgenkompakten Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums sind gerade die totalbeschränkten vollständigen Mengen. Während der Satz von Heine-Borel in vielen Lehrtexten lautet: *Jede offene Überdeckung einer kompakten (d. h. beschränkten abgeschlossenen) Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung*, haben wir die Einsicht erarbeitet:

Die folgenkompakten Teilmengen eines HRaB sind dadurch ausgezeichnet, dass jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Im nächsten Unterabschnitt wollen wir uns zunächst der Aufgabe zuwenden, die intuitiven Vorstellungen von den stetigen Funktionen auf lokalkompakten metrischen Räumen wie dem $\mathbb{R}^n$ zu entwickeln. Auf Vollständigkeit und Kompaktheit in allgemeineren metrischen Räumen kommen wir später zurück, wenn wir Funktionenräume studieren.

Warnung. Das Abgeschlossensein einer Menge in einem metrischen Raum darf nicht mit Vollständigkeit der Menge verwechselt werden. Unsicherheiten in dieser Sache entstehen manchmal bei Anfängern, die gewöhnt sind, bei den abgeschlossenen Mengen immer nur an die abgeschlossenen Teilmengen der reellen Achse (oder des $\mathbb{R}^n$) zu denken. Die Vorstellungen sind aber nicht ohne weiteres auf andere metrische Räumen zu übertragen. Richtig und manchmal auch nützlich ist der

Satz 6.1.10. *Eine Teilmenge B eines vollständigen metrischen Raums mit abzählbarer Basis ist genau dann abgeschlossen, wenn sie bzgl. der induzierten Metrik vollständig ist.*

Beweis. *Ist $(\mathsf{P}_n)_n$ eine Cauchy-Folge, deren Elemente in der abgeschlossenen Teilmenge B liegen, dann konvergiert die Folge wegen der Vollständigkeit des Gesamtraums; und wegen der Abgeschlossenheit von B liegt der Limespunkt in B. Die auf B induzierte Metrik ist also vollständig.*

Umgekehrt: Zu jedem Punkt der abgeschlossenen Hülle $\bar{\mathsf{B}}$ existiert eine B-Folge, die dagegen konvergiert. Es handelt sich um eine Cauchy-Folge. Wenn die induzierte Metrik vollständig ist, dann gehört der Limespunkt zu B. Jeder Punkt von $\bar{\mathsf{B}}$ gehört also zu B; B ist abgeschlossen.

6.2 Stetigkeit in der Welt der HRaB's

Definition 6.9 (Stetigkeit)**.** Es seien $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ und $\big(T, \mathcal{V}\big)$ topologische Räume.

Die Abbildung $\varphi: S \longrightarrow T$ heisst stetig im Punkt P^*, wenn für jede Umgebung des Bildpunkts $Q^* = \varphi(P^*)$ das volle Urbild eine Umgebung von P^* ist.

Die Abbildung heisst stetig auf S, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Satz 6.2.1. *Die Abbildung $\varphi: \big(S, \mathfrak{U}\big) \longrightarrow \big(T, \mathcal{V}\big)$ ist genau dann stetig auf S, wenn das volle Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

Beweis. *Angenommen, das volle Urbild jeder offenen Menge $V \in \mathcal{V}$ ist offen. φ ist dann stetig in jedem $P^* \in S$; denn jede Umgebung B von $\varphi(P^*)$ enthält eine offene Menge V, welche $\varphi(P^*)$ enthält. Da $\varphi^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von P^* ist, die in $\varphi^{-1}(B)$ enthalten ist, ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Umgebung von P^*.*

Umgekehrt: Sei φ in jedem P stetig. Für ein offenes V und für jeden Punkt P mit $Q = \varphi(P) \in V$ ist $\varphi^{-1}(V)$ eine Umgebung von P. Und wenn die Menge $U = \varphi^{-1}(V)$ Umgebung jedes ihrer Punkte ist, dann bedeutet das bekanntlich, dass U offen ist.

Definition 6.10 (Folgenstetigkeit)**.** Es seien $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ und $\big(T, \mathfrak{V}\big)$ topologische Räume.

Man sagt von einer Abbildung $\varphi: S \longrightarrow T$, sie sei folgenstetig im Punkt P^*, wenn für jede nach P^* konvergierende Folge die Folge der Bildpunkte nach $\varphi(P^*)$ konvergiert.

Man sagt, sie sei folgenstetig, wenn sie in jedem Punkt folgenstetig ist.

Hinweis: Der Begriff der Folgenstetigkeit in P^* ist vor allem dann von Interesse, wenn $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ ein HRaB ist, aber u. U. auch dann, wenn S ein Hausdorff-Raum ist, von welchem nur angenommen wird, dass der Umgebungsfilter von P^* ein abzählbarer Basis besitzt, wo also Umgebungen $B_1, B_2, \ldots$ existieren, sodass jede Umgebung von P^* eine dieser 'Basisumgebungen' B_j umfasst. Dies ist insbesondere in jedem metrischen Raum der Fall.

Satz 6.2.2 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit)**.**
Wenn die Abbildung $\varphi: \big(S, \mathfrak{U}\big) \longrightarrow \big(T, \mathfrak{V}\big)$ im Punkt P^* stetig ist, dann ist φ im Punkt P^* auch folgenstetig.

Ist $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ ein HRaB, und ist $\varphi: \big(S, \mathfrak{U}\big) \longrightarrow \big(T, \mathfrak{V}\big)$ folgenstetig im Punkt P^*, dann ist φ im Punkt P^* auch stetig.

Beweis. *Sei φ im Punkt P^* stetig und sei $(P_n)_n$ eine Folge mit $\lim P_n = P^*$. Sei andererseits V eine Umgebung von $Q^* = \varphi(P^*)$ und U das volle Urbild. Wegen der Stetigkeit in P^* ist U eine Umgebung von P^*; schliesslich alle P_n liegen also in U; und das heisst,dass schliesslich alle $\varphi(P_n)$ in V liegen. Da dies für alle Umgebungen V von Q^* gilt, haben wir gezeigt, dass die Bildfolge nach Q^* konvergiert.*

Umgekehrt: Nehmen wir an, dass φ im Punkt P^* nicht stetig ist. Es existiert dann eine Umgebung V von $Q^* = \varphi(P^*)$, deren volles Urbild keine Umgebung von P^* ist. Wir wählen eine abzählbare Umgebungsbasis von P^*: $B_1, B_2, \ldots$. In B_1 wählen wir einen Punkt P_1 mit $\varphi(P_1) \notin V$; in $B_1 \cap B_2$ wählen wir einen Punkt P_2 mit $\varphi(P_2) \notin V, \ \ldots$. Die Folge $(P_n)_n$ konvergiert gegen P^*. Die Bildpunkte sind allesamt ausserhalb V. Die Bildfolge konvergiert also nicht gegen Q^*.

Satz 6.2.3. *Sind* $\varphi: \big(S_1, \mathfrak{U}_1\big) \longrightarrow \big(S_2, \mathfrak{U}_2\big)$ *und* $\psi: \big(S_2, \mathfrak{U}_2\big) \longrightarrow \big(S_3, \mathfrak{U}_3\big)$ *stetige Abbildungen, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung stetig*

$$\chi(\cdot) = \varphi(\psi(\cdot)): \big(S_1, \mathfrak{U}_1\big) \longrightarrow \big(S_3, \mathfrak{U}_3\big) \quad \textit{stetig.}$$

Beweis. $\chi^{-1}(U_3) = \varphi^{-1}\big(\psi^{-1}(U_3)\big)$. *Das volle Urbild* $\chi^{-1}(U_3)$ *ist das volle Urbild bzgl.* φ *der offenen Menge* $U_2 = \psi^{-1}(U_3)$.

Ebenso beweist man den

Satz. *Wenn* $\varphi: S_1 \longrightarrow S_2$ *im Punkt* P_1 *stetig ist und* $\psi: S_2 \longrightarrow S_3$ *im Punkt* $\varphi(P_1)$, *dann ist die zusammengesetzte Abbildung im Punkt* P_1 *stetig.*

Wenn man für eine Abbildung $\varphi: \big(S, \mathfrak{U}\big) \longrightarrow \big(T, \mathfrak{V}\big)$ prüfen will, ob sie überall auf S stetig ist, dann muss man nicht für jedes $V \in \mathfrak{V}$ überprüfen, ob $\varphi^{-1}(V)$ offen ist. Nehmen wir an, $\mathfrak{W}$ sei ein System offener Teilmengen des Zielraums T mit der Eigenschaft, dass das System aller endlichen Durchschnitte von $\mathfrak{W}$-Mengen eine Basis der Topologie $\mathfrak{V}$ sind. (Man nennt ein derartiges System manchmal eine Subbasis der Topologie). Wenn $\varphi^{-1}(W)$ offen ist für alle $W \in \mathfrak{W}$, dann ist φ stetig; denn das System aller derjeigen Mengen, deren volle Urbilder in $\mathfrak{U}$ liegen, ist gegen endliche Durchschnittsbildung und gegen Vereinigungsbildung abgeschlossen. Wir formulieren das als

Satz 6.2.4.
Es sei T *ein topologischer Raum und* $\mathfrak{W}$ *eine Subbasis seiner Topologie. Die Abbildung* $\varphi: S \longrightarrow T$ *ist genau dann stetig, wenn die Topologie auf* S *feiner ist als die von den vollen Urbildern* $\varphi^{-1}(W)$ *erzeugte Topologie.*

Die von den vollen Urbildern $\varphi^{-1}(W)$ *erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie auf* S, *bzgl. der die Abbildung* φ *stetig ist.*

Beispiel.

1. Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ stetige Abbildungen des HRaB $\big(S, \mathfrak{U}\big)$, φ_i mit dem Zielraum $\big(T_i, \mathfrak{V}_i\big)$. Die Abbildung
$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m): \quad S \ni P \longmapsto \big(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P)\big) \in T_1 \times \cdots \times T_m.$$
ist dann stetig für die Produkttopologie $\mathfrak{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{V}_m$. Für jedes 'Rechteck' $V = V_1 \times \cdots \times V_m$ ist das volle Urbild $\varphi^{-1}(V) = \varphi_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \varphi_m^{-1}(V_m)$ eine offene Menge. Und die Rechtecke sind eine Basis der Produkttopologie.

2. Eine reellwertige Funktion $f(\cdot)$ auf dem HRaB $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ ist genau dann stetig, wenn für jedes offene Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $\{P : f(P) \in (a, b)\} = \{P : a < f(P) < b\}$ offen ist. Die Gesamtheit aller offenen Intervalle ist nämlich eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$. Übrigens ist auch die Gesamtheit aller offenen Intervalle (r, s) mit rationalen Endpunkten r, s eine Basis, und zwar eine abzählbare Basis. In der Tat genügt es sogar, zu prüfen dass für alle offenen 'Abschnitte' $(-\infty, s)$ und alle offenen 'Abschnitte $(r, +\infty)$ das volle Urbild offen ist.
$$f \text{ stetig auf } S \quad \Longleftrightarrow \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \{P : f(P) < r\} \text{ und } \{P : f(P) > r\} \text{ offen.}$$

Halbstetige Funktionen
Die obige Charakterisierung der Stetigkeit einer reellwertigen Funktion nehmen wir zum Anlass, einen Begriff einzuführen, der die Ordnungsstruktur der reellen Achse ins Spiel bringt und uns insbesondere bei den Überlegungen zur Konvexität von Nutzen sein wird.

Definition 6.11. Man sagt von einer Funktion f auf einem HRaB mit Werten in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, sie sei unterhalbstetig, wenn $\{P : f(P) > a\}$ offen ist für alle (rationalen) a.

Man sagt von einer Funktion f auf einem HRaB mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, sie sei oberhalbstetig, wenn $\{P : f(P) < b\}$ offen ist für alle (rationalen) b.

Satz 6.2.5. *Eine reellwertige Funktion $f(\cdot)$ auf dem HRaB $(S, \mathfrak{U})$ ist genau dann stetig, wenn sie sowohl unterhalbstetig als auch oberhalbstetig ist, wenn sie also sowohl f als auch $-f$ unterhalbstetig ist.*

Den folgenden Satz kann man als einen Spezialfall des Satzes von den zusammengesetzten Abbildungen verstehen. Uns liegt hier aber daran, an den Begriff der Pullback-Abbildung erinnern.

Satz 6.2.6. *Es sei $\varphi : (S, \mathfrak{U}) \longrightarrow (T, \mathcal{V})$ eine stetige Abbildung. Für jede stetige reellwertige Funktion g auf T ist dann die zurückgenommene Funktion $f = \varphi^\sharp(g)$ eine stetige Funktion.*

Beweis. *Es genügt, zu zeigen, dass $\{P : a < f(P) < b\} = \{P : a < g(\varphi(P)) < b\}$ offen ist für alle offenen Intervalle (a, b). Wegen der Stetigkeit von g ist die Menge $V = \{Q : g(Q) \in (a, b)$ offen. Wegen der Stetigkeit von φ ist das volle Urbild offen:*

$$U = \varphi^{-1}(V) = \{P : \varphi(P) \in V\} = \{P : g(\varphi(P)) \in (a, b)\} = \{P : f(P)) \in (a, b)\}.$$

Die definierende Eigenschaften eines HRaB garantieren nicht, dass es neben den Konstanten noch weitere stetige Funktionen gibt. Es gibt aber natürlich viele unterhalbstetige Funktion; die Indikatorfunktionen der offenen Mengen sind unterhalb stetig. Aus dieser Bemerkung ergibt sich der

Satz 6.2.7. *Eine Abbildung topologischer Räume $\varphi : (S, \mathfrak{U}) \longrightarrow (T, \mathcal{V})$ ist genau dann stetig, wenn für jede unterhalbstetige Funktion auf T die zurückgenommene Funktion unterhalbstetig ist.*

Eine Verschärfung des Hausdorff'schen Trennungsaxioms
Wir haben oben gesehen, dass in einem Hausdorffraum zu disjunkten kompakten Mengen K_0, K_1 disjunkte offene Mengen $U_0 \supseteq K_0, U_1 \supseteq K_1$ existieren. Die Topologen haben eine ganze Reihe von Verschärfungen des Hausdorff'schen Trennungsaxioms untersucht. Wir wollen hier nur ein besonders scharfes erwähnen, welches aber immerhin von jedem metrischen Raum erfüllt wird.

Sprechweise. Man sagt von einem HRaB $(S, \mathfrak{U})$, dass er das Trennungsaxiom von Urysohn (auch das Trennungsaxiom T_4 genannt) erfüllt, wenn jedes Paar disjunkter abgeschlossener Mengen trennen kann in dem Sinn:

$$\forall\, F_0, F_1 \text{ abg.}, F_0 \cap F_1 = \emptyset \quad \exists\, U_0, U_1 \text{ offen}, U_0 \cap U_1 = \emptyset, \quad U_0 \supseteq F_0,\ U_1 \supseteq F_1.$$

Satz 6.2.8. *Es seien* F_0, F_1 *disjunkte abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum* $(S, d(\cdot,\cdot))$. *Es existiert dann eine stetige Funktion* f *mit Werten zwischen* 0 *und* 1, *welche auf* F_0 *verschwindet und auf* F_1 *den Wert* 1 *hat.*

Beweis. *Wir definieren den Abstand von einer abgeschlossenen Menge* F *wie üblich* $d(\cdot, F) = \inf\{d(\cdot, Q) : Q \in F\}$. *Die folgende Funktion* f *leistet das im Satz Verlangte:*

$$f(P) = \frac{d(P, F_0)}{d(P, F_0) + d(P, F_1)}.$$

Wir bemerken, dass die offenen Menge $U_0 = \{P : f(P) < \frac{1}{2}\}$ *und* $U_1 = \{P : f(P) > \frac{1}{2}\}$ *das im Urysohn'schen Trennungsaxiom Verlangte leisten.*

Man kann zeigen, dass ein HRaB genau dann metrisierbar ist, wenn die Topologie das Trennungsaxiom von Urysohn erfüllt. Dies impliziert offenbar, dass man jeden kompakten HRaB metrisieren kann.

Stetige Funktionen auf Kompakten

Einen kompakten metrischen Raum nennt man manchmal kurz ein Kompaktum. Es gibt eine Reihe von Sätzen über stetige Funktionen auf Kompakten, die in jeder Anfängervorlesung über Analysis behandelt werden müssen. Allerdings werden diese Sätze oft nur für sehr spezielle Kompakta formuliert, nämlich für die beschränkten abgeschlossenen Teilräume des $\mathbb{R}^n$.

Satz 6.2.9 (Satz vom Maximum einer stetigen Funktion)**.**
Jede stetige Funktion f *auf einem Kompaktum* S *ist beschränkt und nimmt ihr Maximum an; es existiert ein Punkt* $\tilde{P}$, *sodass* $f(\tilde{P}) = \sup\{f(P) : P \in S\}$.

Beweis. *Es sei* $(a_n)_n = (f(P_n))_n$ *eine Folge von Funktionwerten, welche gegen* $\tilde{a} = \sup\{f(P) : P \in S\}$ *konvergiert. (Zunächst müssen wir mit der Möglichkeit* $\tilde{a} = +\infty$ *rechnen). Da wir uns in einem Kompaktum befinden, können wir aus* $(P_n)_n$ *eine konvergente Folge auswählen. Wir können auch annehmen, dass die Folge schon selber konvergiert:* $P_n \to \tilde{P}$. *Wegen der Stetigkeit von* f *haben wir* $f(\tilde{P}) = \lim f(P_n) = \tilde{a}$.

Satz 6.2.10 (Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit)**.**
Jede stetige Funktion f *auf einem Kompaktum* $(S, d(\cdot,\cdot))$ *ist gleichmäßig stetig. Es gilt also*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ \forall P, Q \quad d(P, Q) < \delta \Rightarrow \left|f(P) - f(Q)\right| < \varepsilon.$$

Beweis. *Nehmen wir an, die Funktion* f *sei nicht gleichmäßig stetig. Wir zeigen, dass es dann einen Punkt gibt, in welchem sie nicht stetig ist. Da* f *als nicht gleichmäßig stetig angenommen ist, gibt es ein* $\varepsilon^* > 0$ *und eine Folge von Paaren* $(P_n, Q_n)_n$ *mit* $d(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}$, $\quad \bigl|f(P_n) - f(Qn)\bigr| \geq \varepsilon^*$. *Wegen der Kompaktheit gibt es eine Teilfolge* $(P_{n_m})_m$ *mit einen Limes* $\tilde{P}$. *In beliebig klein zu wählender Umgebung von* $\tilde{P}$ *gibt es Punktepaare* (P_n, Q_n) *mit* $\bigl|f(P_n) - f(Qn)\bigr| \geq \varepsilon^*$. *Also ist* f *im Punkt* $\tilde{P}$ *unstetig.*

Satz 6.2.11 (Satz von Dini)**.**
Wenn eine Folge stetiger Funktionen auf einem Kompaktum monoton gegen die Nullfunktion konvergiert, dann handelt es sich um gleichmäßige Konvergenz.

$$f_1(\cdot) \geq f_2(\cdot) \geq \cdots, \qquad \lim \downarrow f_n(\cdot) = 0 \Longrightarrow \lim \downarrow \sup\bigl\{f_n(P) : P \in S\bigr\} = 0.$$

Beweis. *Die gleichmäßige Konvergenz von nichtnegativen Funktionen gegen die Nullfunktion bedeutet*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geq N \quad \sup\bigl\{f_n(P) : P \in S\bigr\} < \varepsilon.$$

Wenn die punktweise monoton gegen Null absteigende Folge $(f_n)_n$ *diese Eigeschaft nicht besitzt, dann gilt*

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N\, \exists n \geq N \quad \bigl\{P : f_n(P) \geq \varepsilon\bigr\} \neq \emptyset.$$

Wählen wir ε^* *so klein und betrachten wir die abgeschlossenen Mengen* $F_n = \bigl\{P : f_n(P) \geq \varepsilon^*\bigr\}$. *Da sie allesamt nicht leer sind und der Definitionsbereich* S *kompakt ist, gilt auch* $\bigcap^\infty F_n \neq \emptyset$. *Wenn* $\tilde{P}$ *in diesem Durchschnitt liegt, dann gilt* $f_n(\tilde{P}) \geq \varepsilon^*$ *für alle* n. *Die Folge konvergiert nicht punktweise gegen* 0.

Ergänzung: Mehr über unterhalbstetige Funktionen auf einem HRaB

Definition 6.12. Es sei f eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem HRaB $\bigl(S, \mathfrak{U}\bigr)$. Man sagt, die Funktion sei unterhalbstetig im Punkt P^*, wenn für alle $a < f(P^*)$ die Menge $\{P : f(P) > a\}$ eine Umgebung von P^* ist.

Die Funktion f ist offenbar genau dann unterhalbstetig, wenn sie in jedem Punkt unterhalbstetig ist.

Satz 6.2.12 ('Folgen-Halbstetigkeit' = Halbstetigkeit)**.**
Eine Funktion auf einem HRaB mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *ist genau dann unterhalbstetig im Punkt* P^*, *wenn für jede gegen* P^* *konvergierende Folge die Folge der Funktionswerte einen Limesinferior* $\geq f(P^*)$ *hat.*

$$f(P^*) \leq \liminf_n f(P_n) \qquad \textit{für alle Folgen} \quad P_n \to P^*.$$

Beweis. *Es sei* f *unterhalbstetig in* P^* *und* $a < f(P^*)$. *Wenn* $P_n \to P^*$, *dann liegen schliesslich alle* P_n *in der Umgebung* $\{P : a < f(P)\}$ *des Punkts* P^*. *Das bedeutet* $f(P_n) > a$

für schliesslich alle n *und daher* $\liminf f(P_n) \geq a$. *Da dies für alle* $a < f(P^*)$ *gilt, haben wir* $\liminf f(P_n) \geq f(P^*)$.

Der Beweis, dass die Bedingung $f(P^*) \leq \liminf_n f(P_n)$ *an alle gegen* P^* *konvergierenden Folgen hinreichend ist für die Unterhalbstetigkeit in* P^*, *ergibt sich nach demselben Muster wie der oben geführte Beweis, dass die Folgenstetigkeit im Punkt* P^* *die Stetigkeit im Punkt* P^* *impliziert. Hier wird die Existenz einer abzählbaren Basis des Umgebungsfilters* $\mathfrak{U}_{P^*}$ *benötigt.*

Bemerke: Die Halbstetigkeit von f in P^* bedeutet für einen Punkt mit $f(P^*) = +\infty$, dass für beliebig großes M eine Umgebung von P^* existiert, in welcher f größer ist als M. Und das bedeutet, dass für jede gegen P^* konvergierende Folge die Folge der Funktionswerte gegen $+\infty$ strebt.

Definition 6.13 (Epigraph einer Funktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).
Es sei f eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf dem HRaB $\big(S, \mathfrak{U}\big)$. Wir definieren dazu den Epigraphen von f über S als die Menge

$$E_f \;=\; \{(y, P) : P \in S, y \geq f(P)\} \quad \subseteq \quad \mathbb{R} \times S.$$

Bemerke: Wenn f eine reellwertige Funktion ist, dann sind die Epigraphen von f und $-f$ definiert. Der Durchschnitt $\{(y, P) : P \in S, y \geq f(P)\}$ ist der sog. Funktionsgraph von f. Funktionsgraphen werden schon im Schulunterricht diskutiert.

Satz 6.2.13. *Der Epigraph von* f *ist genau dann abgeschlossen, wenn die Funktion* f *unterhalbstetig ist.*

Beweis. *Es sei* f *unterhalbstetig, und es sei* (y_n, P_n) *eine konvergente Folge in* E_f. *Dann liegt der Grenzwert* (a, P^*) *im Epigraphen; es ist dann nämlich* $y_n \geq f(P_n)$ *für alle* n *und* $a = \lim y_n \geq \liminf f(P_n) \geq f(P^*)$.

Sei umgekehrt der Epigraph E_f *abgeschlossen. Wir wollen zeigen, dass für jede gegen den (beliebig gewählten) Punkt* P^* *konvergente Folge* $P_n \to P^*$ *gilt* $\liminf f(P_n) \geq f(P^*)$. *Wir unterscheiden die Fälle* $f(P^*) = \infty$ *und* $f(P^*) < \infty$. *Im ersten Fall müssen wir zeigen, dass für jede gegen* P^* *konvergierende Folge die Folge der Funktionswerte gegen* $+\infty$ *konvergiert. In der Tat: Wenn wir eine Folge (oder Teilfolge einer Folge) hätten, für die* $f(P_n)$ *die gegen einen endlichen Wert* $\tilde{y}$ *konvergiert, dann wäre* $(\tilde{y}, P^*)$ *ein Punkt der abgeschlossenen Menge* E_f; *das widerspricht aber der Annahme* $f(P^*)) = +\infty$. *Im zweiten Fall gilt für jede in* $\mathbb{R} \times S$ *konvergierende Teilfolge* $(f(P_{n_m}), P_{n_m})$, *dass der Limespunkt zum Epigraphen gehört. Das bedeutet gerade* $\liminf f(P_n) \geq f(P^*)$. f *ist also 'folgenhalbstetig' im Punkt* P^*.

Beispiel. Sei $F \subseteq S$ abgeschlossen, und sei O_F die Funktion, die auf F verschwindet und sonst den Wert $+\infty$ hat. Es handelt sich offenbar um eine unterhalb stetige Funktion. Der Epigraph E ist dann $\mathbb{R}^+ \times F$. Es handelt sich um eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums $\mathbb{R} \times S$. Wenn nämlich eine E-Folge (y_n, P_n) im Produktraum konvergiert, dann gehört der Grenzwert zum Epigraphen.

Satz 6.2.14. *Es sei* $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$ *eine Familie von Funktionen mit Werten in* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *auf dem HRaB* $\big(S, \mathfrak{U}\big)$. *Und es sei* $f(\cdot) = \sup_\alpha f_\alpha(\cdot)$ *das punktweise Supremum. Für die Epigraphen gilt dann* $E_f = \bigcap_\alpha E_{f_\alpha}$.

Beweis. *Ein Punkt* (y^*, P^*) *gehört genau dann zum Epigraphen* E_f, *wenn* $y^* \geq f(P^*) = \sup f_\alpha(P^*)$, *wenn also* $y* \geq f_\alpha(P^*)$ *für alle* α; *und das heisst, dass* (y^*, P^*) *zum Durchschnitt der Epigraphen gehört.*

Wir wollen zum Abschluss noch zwei der oben bewiesenen Sätze über stetige Funktionen verallgemeinern zu Sätzen über halbstetige Funktionen auf Kompakten.

Satz 6.2.15 (Satz vom Minimum einer unterhalbstetigen Funktion).
Jede unterhalbstetige Funktion auf einem kompakten HRaB nimmt ihr Minimum an.

Beweis. *Man kann den Beweis ebenso führen wie oben den Beweis für stetige Funktionen. Wir wollen aber zur Übung (und Abwechslung) nicht die Folgenstetigkeit heranziehen sondern die Kompaktheit in der Formulierung mit Familien abgeschlossener Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft gemäß der Charakterisierung* **??** *auf Seite* **??** *besitzen.*

Ist $\inf\big\{f(P) : P \in S\big\} = \tilde{a}$, *dann ist für jedes* n *die abgeschlossene(!) Menge* $F_n = \{P : f(P) \leq \tilde{a} + \frac{1}{n}\}$ *nicht leer. Wegen der Kompaktheit des Raums* S *ist auch der unendliche Durchschnitt nicht leer. Für jeden Punkt* $\tilde{P} \in \bigcap^\infty F_n$ *gilt* $f(\tilde{P}) \leq \tilde{a} + \frac{1}{n}$ *für alle* n, *also* $f(\tilde{P}) \leq \tilde{a}$. *Ohnehin gilt* $f(\tilde{P}) \geq \tilde{a}$. *Das Infimum wird also in* $\tilde{P}$ *angenommen.*

Satz 6.2.16 (Satz von Dini für oberhalbstetige Funktionen).
Es sei $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ *eine Folge oberhalbstetiger Funktionen auf einem kompakten HRaB, welche punktweise gegen die Nullfunktion absteigt. Die Konvergenz ist dann gleichmäßig.*

Beweis. *Die Zahlenfolge* $a_n = \sup\big\{f_n(P) : P \in S\big\}$ *ist absteigend: Wenn sie nicht nach* 0 *absteigt, dann existiert ein* a' *sodass die abgeschlossenen Mengen* $F_n = \{P : f_n(P) \geq a'\}$ *nichtleer sind für alle* n. *Wegen der Kompaktheit des Raums* S *ist auch der Durchschnitt nicht leer. Für ein* $\tilde{P} \in \bigcap^\infty F_n$ *gilt* $f_n(\tilde{P}) \geq a'$ *für alle* n. *Die Funktionenfolge* $(f_n)_n$ *konvergiert also nicht punktweise nach* 0.

6.3 Lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen

Definition 6.14. Es sei S eine Menge und $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum.

Von einer Folge von Abbildungen $(\varphi_n)_n$ von S nach T sagt man sie konvergiere gleichmäßig auf D gegen die Abbildung φ, wenn gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N: \ \forall n \geq N\, \forall P \in D \quad e\big(\varphi_n(P), \varphi(P)\big) < \varepsilon.$$

Man notiert in diesem Fall $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ (glm auf D). Wenn S ein HRaB ist, und zu jedem $P \in S$ eine Umgebung U_P existiert, sodass die Folge $(\varphi_n)_n$ auf U_P gleichmäßig konvergiert, dann sagt man, dass die Folge lokal gleichmäßig konvergiert. Man notiert in diesem Fall $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ (lokalglm).

Hinweis: Man vergleiche den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz (auf D) mit dem Begriff der punktweisen Konvergenz (auf D)

$$\forall P \in D\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists N: \ \forall n \geq N \quad e\big(\varphi_n(P), \varphi(P)\big) < \varepsilon.$$

Bemerke: Es ist klar, was es heisst, dass eine Folge $(\varphi_n)_n$ gleichmäßig auf D eine Cauchy-Folge ist. Wenn $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ vollständig ist, dann ist jede Folge, die gleichmäßig auf D Cauchy-Folge ist, auf D gleichmäßig konvergent.

Satz 6.3.1 (Gleichmäßige Konvergenz auf Kompakten)**.**
Es sei $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ ein HRaB und $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ ein metrischer Raum.

Wenn eine Folge von Abbildungen lokal gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert sie gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge.

Wenn $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ ein lokalkompakter Raum ist, dann lokalgleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend mit gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakten.

(In älteren Büchern sagt man in dieser Situation auch, dass die φ_n im Sinne der 'kompakten Konvergenz' gegen die Grenzfunktion konvergieren.)

Beweis. *Die Folge $(\varphi_n)_n$ sei lokalgleichmäßig konvergent, und $K \subseteq S$ sei kompakt. Zu jedem $P \in K$ wählen wir eine offene Umgebung U_P, auf welcher die Folge gleichmäßig konvergiert und zu $\varepsilon > 0$ ein N_P, sodass für $n \geq N_P$, $Q \in U_P$ gilt* $e\big(\varphi_n(Q), \varphi(Q)\big) < \varepsilon$*. Wegen der Kompaktheit existieren endlich viele U_{P_j}, welche K überdecken. Für $n \geq$* $\max_j N_{P_j}$ *unterscheiden sich die φ_n auf ganz K um höchstens ε von der Grenzfunktion.*

Wenn S lokalkompakt ist, dann besitzt jeder Punkt eine kompakte Umgebung. Wenn die Folge $(\varphi_n)_n$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, dann gibt es also zu jedem Punkt eine Umgebung, auf welcher sie gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Es seien φ, ψ Abbildung von S nach $\big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ und $D \subseteq S$. Wir definieren $e_D(\varphi, \psi) = \sup\big\{e\big(\varphi(P), \psi(P)\big) \wedge 1: \quad P \in D\big\}$ und erhalten eine Semimetrik, sodass für Folgen $(\varphi_n)_n$ gilt $\quad e_D(\varphi_n, \varphi) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ (glm auf D).

Satz 6.3.2 (Lokalgleichmäßige Limiten stetiger Abbildungen sind stetig).
Es seien $\varphi_n : \big(S, \mathfrak{U}\big) \longrightarrow \big(T, e(\cdot,\cdot)\big)$ *stetige Abbildungen, die lokal gleichmäßig gegen die Abbildung* φ *konvergieren. Dann ist* φ *stetig.*

Beweis. *Wir müssen für* $P \in S$ *und* $\varepsilon > 0$ *eine Umgebung* U_P *konstruieren, sodass gilt* $\forall\ Q \in U_P \qquad e\big(\varphi(P), \varphi(Q)\big) < \varepsilon.$

Sei zunächst U'_P *irgendeine Umgebung, auf welcher die Folge gleichmäßig konvergiert.*

N *sei so groß, dass für alle* $n \geq N$ *gilt* $\sup\big\{e\big(\varphi_n(Q), \varphi(Q)\big) : \quad P \in U'_P\big\} < \varepsilon/3$. *Da* φ_N *in* P *stetig ist, existiert eine Umgebung* U''_P, *sodass* $e\big(\varphi_N(Q), \varphi_N(P)\big) < \varepsilon/3$ *für alle* $Q \in U''_P$. *Für* $Q \in U'_P \cap U''_P$ *gilt dann nach der Dreiecksungleichung*

$$e\big(\varphi(P), \varphi(Q)\big) \leq e\big(\varphi(P), \varphi_N(P)\big) + e\big(\varphi_N(P), \varphi_N(Q)\big) + e\big(\varphi_N(Q), \varphi(Q)\big) < 3 \cdot \varepsilon/3.$$

Definition 6.15 (Lokalgleichmäßig summierbare Familien von Abbildungen in einen Banachraum).
Es sei $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ eine abzählbare Familie von Abbildungen eines HRaB $\big(S, \mathfrak{U}\big)$ in einen Banachraum $\big(V, \|\cdot\|\big)$. Man sagt, die Familie sei auf $D \subseteq S$ gleichmäßig summabel, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I' \text{endlich} : \forall I'' : \quad I'' \cap I' = \emptyset \implies \forall\ P \in D \quad \|\sum_{\alpha \in I''} \varphi_n(P)\| < \varepsilon.$$

Man sagt, die Familie sei lokal gleichmäßig summabel, wenn zu jedem $P \in S$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}_p$ existiert, auf welcher sie lokal gleichmäßig (unbedingt) summabel ist.

Hinweis: Man vergleiche den Begriff der gleichmäßigen (unbedingten) Summabilität auf D mit dem Begriff der punktweisen (unbedingten) Summabilitätauf D

$$\forall P \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists I' \text{endlich} : \forall I'' : \quad I'' \cap I' = \emptyset \implies \|\sum_{\alpha \in I''} \varphi_n(P)\| < \varepsilon.$$

Satz 6.3.3. *Wenn die Familie von Abbildungen* $\{\varphi_\alpha : .\alpha \in I\}$ *auf* $D \subseteq S$ *gleichmäßig summabel ist, dann gilt für jede Aufzählung der Familie, dass die Folge der Partialsummen auf* D *gleichmäßig gegen eine dort wohldefinierte Abbildung* $\psi = \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha : D \longrightarrow V$.

$$\sup_{P \in D} \Big\|(\psi - \sum_{j=1}^{N} \varphi_{\alpha_j})(P)\Big\| \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Der Beweis ist identisch mit dem Beweis für unbedingt summable Familien von Elementen in einem Banachraum. Man kann ihn auch darauf zurückführen, in dem man den Raum der beschränkten Abbildungen von D in $\big(V, \|\cdot\|\big)$ mit der Supremumsnorm ausstattet: $\sup_{P \in D} \big\|(\varphi(P) - \psi(P)\big\|$.

Bemerke: Eine hinreichende (aber keineswegs notwendige) Bedingung für die auf D gleichmäßige Summabilität der Familie $\{\varphi_\alpha(\cdot) : \alpha \in I\}$ ist die Summabilität der Zahlenfolge $a_\alpha = \sup_{P \in D} \big\|\varphi_\alpha(P)\big\|$.

Beispiel: Die Gamma-Funktion im Komplexen nach Gauß
Wir betrachten auf der Grundmenge Raum $S = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ die Funktionen

$$G_n(z) = \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n! \cdot n^z} \quad \text{wobei } n^z = \exp(z \cdot \ln\ n)$$

Wir denken an den Hauptwert des Logarithmus im Einheitskreis, und definieren für $|z| < R,\ n \geq N_0 \geq 2R$

$$\varphi_n(z) = \ln \frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} = \ln(1 + \frac{z}{n}) + z \cdot \ln(1 - \frac{1}{n}).$$

Diese Funktionenfolge ist auf der Kreisscheibe $D = \{|z| < R\}$ gleichmäßig normsummabel; denn

$$\left|\ln(1 + \frac{z}{n}) - \frac{z}{n}\right| \ \leq\ \sum_{k=2} \frac{1}{k} \cdot \left|\frac{z}{n}\right|^k \ \leq\ \left|\frac{z}{n}\right|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{z}{n}\right|^k \ \leq \left|\frac{z}{n}\right|^2.$$

$$\left|\frac{z}{n} + z \cdot \ln(1 - \frac{1}{n})\right| \ \leq\ |z| \cdot \left|\frac{1}{n}\right|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\frac{1}{n}\right|^k \ \leq\ |z| \cdot n^{-2}.$$

Die Funktionenfolge $(G_n(z))_n$ konvergiert lokal gleichmäßig auf S; denn für alle $N > N_0$, $z \in D$ gilt

$$G_N(z) \ =\ G_{N_0-1}(z) \cdot \prod_{n=N_0}^{N} \frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} \ =\ G_{N_0-1}(z) \cdot \exp \sum_{n=N_0}^{N} (\varphi_n(z)).$$

In D hat $G_N(z)$ dieselbe Nullstellenmenge wie G_{N_0-1}, also $\{0, -1, -2, \ldots\} \cap D$.

Satz 6.3.4 (Produktdarstellung der Gamma-Funktion)**.**
Es existiert im Sinn der lokalgleichmäßigen Konvergenz auf $S = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *eine Grenzfunktion*

$$G(z) = \lim G_n(z) \ =\ \lim_n \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n! \cdot n^z}.$$

und für diese gilt

(i) $G(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{0, -1, -2, \ldots\}$,

(ii) $G(z+1) = \frac{1}{z} \cdot G(z)$ *für alle* $z \neq 0$,

(iii) $G(k) = \frac{1}{(k-1)!}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$,

(iv) die Funktion $\psi(\alpha) = -\ln G(\alpha)$ *ist konvex auf* $\mathbb{R}_+$.

Beweis. $G_n(z+1) = \frac{z+n+1}{z \cdot n} G_n(z);$ $\quad G_n(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (1+n)}{n! \cdot n} \to 1 = G(1);$

$$\begin{aligned}\ln\ G(\alpha) &= \ln\ G_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_3(\alpha) + \cdots \\ &= \ln \alpha + \ln(1+\alpha) + \ln(1 + \tfrac{1}{2}\alpha) + \alpha \cdot \ln(1 - \tfrac{1}{2}) + \ln(1 + \tfrac{1}{3}\alpha) + \alpha \cdot \ln(1 - \tfrac{1}{3}) + \cdots\end{aligned}$$

Alle Summanden sind konkav auf $\mathbb{R}_+$. *Es gilt somit* $\frac{1}{G(\alpha)} = \Gamma(\alpha)$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Beispiel: Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden
Zur Erinnerung: Polynome $a_0 + a_1 z + \cdots a_N z^N$ kann man einerseits als formale Rechengrößen behandeln, andererseits aber auch, wenn die a_n komplexe Zahlen sind, als komplexwertige Funktionen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$. Bei der letzteren Betrachtungsweise spricht man auch von polynomialen Funktionen $\mathbb{C} \ni z \longmapsto w = p(z)$.

Die Koeffizienten eines Polynoms vom Grad $\leq N$ sind eindeutig bestimmt, wenn man die Funktionswerte in $N+1$ paarweise verschiedenen Punkten $z_0, z_1, \ldots, z_n$ kennt. Zu jedem $(N+1)$-Tupel komplexer Zahlen $w_0, w_1, \ldots, w_N$ gibt es andererseits genau eine polynomiale Funktion vom Grad $\leq N$ mit $p(z_m) = w_m$ für $m = 0, 1, \ldots, N$.

Eine formale Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten ist bekanntlich ein formaler Ausdruck der Form $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_0^\infty a_n z^n$ mit komplexen a_n. Zum Kalkül der formalen Potenzreihen haben wir bereits früher einiges gesagt; jetzt soll es um Funktionen gehen, die durch Potenzreihen dargestellt werden. Traditionellerweise sagt man, dass die Reihe im Punkt z_0 den Wert w_0 liefert, wenn gilt $\lim_N \sum_0^N a_n z_0^n = w_0$. Man verlangt traditionellerweise nicht, dass die Zahlenfolge $(a_n z_0^n)_n$ unbedingt summabel ist. So sagt man z. B. , dass die Potenzreihe $\sum_1^\infty \frac{1}{n} z^n$ im Punkt $z_0 = -1$ den Wert $w_0 = -\ln 2$ liefert.

Wir wollen uns hier in diesem Abschnitt über lokalgleichmäßige Konvergenz nicht mit Werten in einzelnen Punkten z_0 befassen, sondern mit Potenzreihen, die im Sinne der lokalgleichmäßigen Summierbarkeit der 'Monome' $a_n z^n$ komplexwertige Funktionen definieren.

Satz 6.3.5 (Konvergenzradius).
Wenn für eine Koeffizientenfolge $(a_n)_n$ *gilt* $\limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$, *dann ist die Folge der Monome* $\{a_n z^n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *gleichmäßig summierbar auf jeder kompakten Teilmenge der offenen Kreisscheibe* $\{z : |z| < R\}$.
Die Folge $\sum_0^N a_n z_0^n$ *konvergiert nicht, wenn* $|z_0| > R$.

Beweis. *Wenn* $|z_0| > R$, *dann ist die Zahlenfolge* $|a_n z_0^n| = \left(|a_n|^{1/n}|z_0|\right)^n$ *keine Nullfolge. Für* $|z_0| = R$ *ist diese Zahlenfolge nicht notwendigerweise eine Nullfolge; und wenn sie Nullfolge ist, ist sie nicht notwendigerweise summabel.*

Im Falle $|z_0| = (1-\delta)R$ *mit* $\delta > 0$, *dann kann die Folge der Summanden durch eine geometrisch abfallende Folge abgeschätzt werden. Für genügend große* n *gilt nämlich*

$$|a_n|^{1/n} \leq (1+\delta)\frac{1}{R}, \qquad |a_n z_0^n| \leq (1+\delta)^n \frac{1}{R^n} \cdot (1-\delta)^n R^n = (1-\delta^2)^n.$$

Die Folge der Summanden ist auf $\{z : |z| < R\}$ *normsummabel.*

Sprechweise. Wenn $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n} < \infty$, dann sagt man, dass die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ den Konvergenzradius R hat und auf jeder Kreisscheibe $\{z : |z| < r\}$ mit $r \leq R$ die Funktion $f(z) = \sum a_n z^n$ 'darstellt'.

Satz 6.3.6. *Wenn* $f(\cdot)$ *und* $g(\cdot)$ *auf* $\{z : |z| < r\}$ *durch eine Potenzreihe dargestellt werden, dann auch die punktweise Summe* $(f+g)(\cdot)$ *und das punktweise Produkt* $(f \cdot g)(\cdot)$.

$$f(z) = \sum a_n z^n,\ g(z) = \sum b_n z^n \Longrightarrow \begin{cases} (f+g)(z) = \sum (a_n + b_n) z^n, \\ (f \cdot g)(z) = \sum c_n z^n \quad \textit{mit } c_n = \sum_0^n a_k \cdot b_{n-k}. \end{cases}$$

Satz 6.3.7 (Identitätssatz für Potenzreihen).
Seien $f(z) = \sum a_n z^n, \quad g(z) = \sum b_n z^n$ *mit positivem Konvergenzradius.*
Wenn $f(z_k) = g(z_k)$ *für alle* z_k *in einer Nullfolge mit paarweise verschiedenen* z_k *dann gilt* $a_n = b_n$ *für alle* n.

Beweis. *Wir zeigen: Ist* $h(z) = \sum a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* R, *deren Koeffizienten nicht alle verschwinden, dann gibt es einen Kreis um Null, der höchstens endlich viele Nullstellen von* h *enthält. Wir wählen* $r < R$ *und betrachten für irgendein* $N \in \mathbb{N}$ *den Rest* $R_N(\cdot)$ *in der Darstellung* $h(z) = \sum_0^N a_n z^n + R_N(z)$ *als Funktion auf dem abgeschlossenen Kreis* $|z| \leq r$. *Es gibt eine Zahl* C, *sodass* $|R_N(z)| \leq C|z|^N$ *für* $|z| \leq r$. *In der Tat leistet* $C = \sum_0^\infty |a_{N+k}| r^k$ *das Verlangte. Wenn nicht alle* a_n *verschwinden, dann interessieren wir uns für* $N = \min\{n : a_n \neq 0\}$. *Wir haben dann* $|h(z) - a_N z^N| \leq C|z|^{N+1}$ *für alle* $|z| \leq r$. *Gäbe es nun in beliebiger Nähe des Nullpunkts Nullstellen* $\tilde{z} \neq 0$, *so hätten wir für sie alle* $|c_N| \cdot |\tilde{z}|^N \leq C \cdot |\tilde{z}|^{N+1}$. *Das widerspricht der Annahme* $a_N \neq 0$.

Den Beweis des folgenden wichtigen Satzes (der auf Weierstraß zurückgeht) verschieben wir auf ein späteres Kapitel, wo wir uns mit der 'komplexen Differentiation' befassen.

Satz 6.3.8. *Es bezeichne* $\mathcal{H}^{(R)}$ *die Menge derjenigen Funktionen* $f(\cdot)$, *die im offenen Kreis* $\{z : |z| < R\}$ *durch eine Potenzreihe dargestellt werden. (Die Koeffizienten sind nach dem obigen Satz eindeutig bestimmt).*

Es sei $(f^{(n)})_n$ *eine Folge in* $\mathcal{H}^{(R)}$, *welche auf jedem Kompaktum* $\subset \{z : |z| < R\}$ *gleichmäßig konvergiert. Dann gehört auch die Grenzfunktion zu* $\mathcal{H}^{(R)}$ *und die Koeffizienten sind die Limiten der entsprechenden Koeffizienten.*

$$f^{(n)} \longrightarrow \tilde{f} \quad \textit{lokalglm auf } \{z : |z| < R\} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}(z) = \sum \tilde{a}_k z^k \quad \textit{mit } \tilde{a}_k = \lim_n a_k^{(n)}.$$

Bemerke: Die Aussage des Satzes kann man auch so ausdrücken: Wenn man den Vektorraum $\mathcal{H}^{(R)}$ mit einer translationsinvarianten Metrik ausstattet, welche die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakten beschreibt, dann ist $\mathcal{H}^{(R)}$ bzgl. dieser Metrik vollständig. Eine mögliche Metrik wäre etwa die folgende:
Es sei $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ eine Folge von Kompakten mit $\bigcup_j K_j = \{z : |z| < R\}$, und

$$d_j(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_j\}, \qquad d(f,g) = \sum_j (\tfrac{1}{2})^j \cdot d_j(f,g) \wedge 1.$$

Der oben formulierte Satz impliziert: Die Menge der Polynome (aufgefasst als polynomiale Funktionen auf $\{z : |z| < R\}$) liegt bezüglich der Metrik $d(\cdot,\cdot)$ dicht im Raum $\mathcal{H}^{(R)}$.

Newton's Binomialreihen als Beispiele
Die Binomialreihen haben wir früher als formale Potenzreihen betrachtet

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ sind das Polynome, andernfalls handelt es sich um Reihen mit dem Konvergenzradius $= 1$. Dies wird ersichtlich, wenn wir die oben mit der Stirling'schen Formel studierten gegen $(\Gamma(\alpha))^{-1}$ konvergierenden Folgen $(G_n(\alpha))_n$ ins Spiel bringen. Es gilt

$$\binom{-\alpha}{n}(-1)^n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} = n^{\alpha-1} \cdot G_{n-1}(\alpha).$$

Die Binomialreihe hat damit die Form

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-1} \cdot G_{n-1}(\alpha) \cdot z^n.$$

(wobei der anderweitig nicht definierte Koeffizient bei z^0 gleich 1 zu setzen ist.)

Der Konvergenzradius 1 ergibt sich aus $(n^{\alpha-1})^{1/n} = \exp\left(1/n \cdot (\alpha-1)\ln n\right) \to 1$. Die Reihe liefert also im Inneren des Einheitskreises eine Funktion $f_{\alpha}(z)$. Wir wollen hier nicht beweisen, dass es sich dabei um die auf anderem Weg bereits definierte Potenzfunktion handelt: $\quad f_{\alpha}(z) = (1-z)^{-\alpha} = \exp\left(-\alpha \cdot \ln(1-z)\right) \quad$ für $|z| < 1$.

Bemerke: Für $\alpha < 0$ gilt $\sum_0^{\infty} |n^{\alpha-1}| < \infty$. Für diese Parameter α ist unsere Reihe sogar normsummabel bzgl. der Supremumsnorm auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $\bar{K}_1$. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} n^{\alpha-1} \cdot G_{n-1}(\alpha) \cdot z^n \quad \longrightarrow \quad f_{\alpha}(z) = (1-z)^{-\alpha} \quad \text{glm für } |z| \le 1.$$

Die Aussage für den speziellen Parameter $\alpha = -\frac{1}{2}$ können wir dazu benützen, um eine konkrete Folge von Polynomen anzugeben, welche die Betragsfunktion $|x|$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ gleichmäßig approximiert.

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)} = \quad \lim_N \sum_{n=0}^{N} n^{-3/2} \cdot G_{n-1}(-\tfrac{1}{2}) \cdot (1-x^2)^n \quad \text{glm für } |x^2-1| \le 1.$$

Zur Erinnerung: Eine gleichmäßige polynomiale Approximation der Wurzelfunktion im Intervall $[0, 2]$ und damit der Betragsfunktion in $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ gewinnt man auch mit Hilfe des vereinfachten Newton-Verfahrens.

7 Schlussbemerkungen rund um den Begriff der stetigen Funktion

Der Umgang mit dem Kontinuum wurde schon in der griechischen Philosophie als eine rätselhafte Herausforderung thematisiert. Man denke an die Paradoxien des Zeno von Elea, die von Aristoteles überliefert wurden. Mit dem Begriff eines *Kontinuums* verbindet sich die Vorstellung von einer lückenlosen Menge von Möglichkeiten oder Zuständen, wo man ohne Sprünge ('kontinuierlich') von einem Zustand zum anderen übergehen kann. Die Vorstellungen des kontinuierlichen Übergangs sind das ursprüngliche Motiv für den Begriff der Stetigkeit ('continuity' im Englischen).

Impulse brachte das zur Renaissance-Zeit erwachte Interesse an 'rechenhafter' Mathematik sowie das Aufkommen eines ausgesprochen mechanistischen Weltbilds. Man war bereit, unstrenge 'atomare' Methoden wegen ihres heuristischen Werts gelten zu lassen. J. Kepler (1571- 1630) sagte, dass die Beweise von Archimedes absolut streng seien, „absolutae et omnibus numeris perfectae“, aber er überlasse sie den Leuten, die durchaus exakten Beweisen frönen wollten. Die schrittweise Entwicklung einer Infinitesimalrechnung wurde durch die Descartessche Geometrie (1637) wesentlich angetrieben, weil sie die gesamte klassische Geometrie mit den Methoden der Algebra verband. Einen ersten Höhepunkt erreichte die Entwicklung in der Differential- und Integralrechnung, die Newton und Leibniz weitgehend unabhängig von einander (und entsprechend verschieden in den Notationen) entwickelten. Im Anschluss daran erlebte die Analysis im 18. Jahrhundert eine eindrucksvolle Blüte. Als Pioniere sind vor allen zu nennen die Miglieder der Familie Bernoulli, sowie L.Euler(1707- 1783), J. L Lagrange (1736 - 1813) und P. S. Laplace(1749-1827). Die Erfolge der Konstruktionen wurden aber gegen Ende des 18.-ten Jahrhunderts (nicht zuletzt von den großen Entdeckern selbst) nachhaltig in Frage gestellt; man hatte das Gefühl, in eine Sackgasse geraten zu sein.

Der zentrale Ansatzpunkt für einen Neuaufbau der Theorie war (schon bei Lagrange, dann aber sehr entschieden bei A. Cauchy (1789-1857)) der Begriff der stetigen Funktion. Die damals begonnene Entwicklung der modernen Analysis gilt den heutigen Mathematikern als ein großer Erfolg; die Analytiker arbeiten heute auf einem gefestigten Grund mit stark erweiterten und verallgemeinerten Techniken; und die Mathematik bezieht sich nicht mehr (auch nicht implizit) auf ein mechanistisches Weltbild. Die Anfänge der Neufundierung waren durchaus umstritten. Die neuartigen Versuche, Stetigkeit zu definieren, waren nicht mehr auf die Idee einer 'kontinuierlichen' Bewegung bezogen; (— man sprach deswegen dann auch später von statischen Stetigkeitsdefinitionen.) Man kann sagen, dass die heute akzeptierte Definition der Stetigkeit ihren direkten Vorläufer in der folgenden logisch motivierten Stetigkeitsdefinition von B. Bolzano aus dem Jahr 1817 hat.

> *Nach einer richtigen Erklärung nämlich versteht man unter der Redensart, daß eine Funktion* $f(x)$ *für alle Werte von* x*, die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändere, nur soviel, daß, wenn* x *irgend ein solcher Wert ist, der Unterschied* $f(x+\omega)-f(x)$ *kleiner als*

jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω *so klein, als man nur will, annehmen kann.*

Die Weiterentwicklung dieser Definition und ihre Verallgemeinerung auf Funktionen über allgemeineren Räumen haben wir oben kennengelernt. Die Mathematiker sind, wie gesagt, sehr zufrieden mit der Fundierung und mit der Geschmeidigkeit der Theorie.

Den Lehrern und Dozenten der Mathematik wird aber immer wieder gesagt, dass sich die älteren 'intuitiven', angeblich leichter erlernbaren Herangehensweisen in den Anwendungen weiterhin bewähren und deshalb vor einer Einführung in die (allzu) abstrakte Welt der heutigen Mathematik gelehrt werden sollten. Dementsprechend werden Lehrbücher manchmal mit dem Hinweis angepriesen, dass sie 'allzu große Abstraktionen' vermeiden und stattdessen Beispiele in den Vordergrund stellen. — Der Anfänger darf rätseln, welche Anliegen oder Inhalte durch die 'Beispiele' illustriert werden sollen.

Dies ist definitiv nicht unsere Herangehensweise. Unsere Behandlung der elementaren Analysis und insbesondere des Stetigkeitsbegriffs soll im Gegenteil eine Einladung an die Studierenden sein, sich mit den aktuellen Vorstellungen von mathematischem Wissen und mathematischer Tätigkeit anzufreunden (Man spricht vom 'strukturellen' Denken).

Dies bedeutet nicht, dass wir die Objekte der klassischen Analysis gänzlich zu den Akten legen. Echte Anwendungen kommen leider nicht Betracht, da man als Dozent bei den Studierenden der Mathematik kaum gemeinsames Grundwissen voraussetzen kann. (Was lernt der heutige Schüler über Bewegungsgleichungen, Schwingungen, Wellenbewegungen, ganz zu schweigen von neueren Anwendungsbereichen?)

Es gibt dennoch viel zu sagen über die Exponentialfunktion, den Logarithmus, die trigonometrischen Funktionen sowie über die Polynome, die trigonometrischen Polynome und die Potenzreihen. Und es wird interessant, wenn sich auf diesen Linien Herausforderungen moderner mathematischer Überlegungen ergeben. Es kommt darauf an, das Konkrete in eine fruchtbare Beziehung zum eigentlichen Anliegen, dem strukturellen Verständnis moderner Mathematik zu setzen.

Im SS 2010 haben wir in jeder Woche eine Doppelstunde klassischen Themen (Abschnitte 1, 2, 3) gewidmet und eine Doppelstunde der mengentheoretischen Herangehensweise (Abschnitte 1A, 2A, 3A). Es soll aber zugegeben werden, dass wir das Pensum nicht ganz geschafft haben. Konvexität und Kompaktheit waren auch noch Themen zu Beginn des WS 2010/11, bevor wir dann mit der komplexen Differenzierbarkeit weitermachten.

Das folgende Schluss-Kapitel zur Analysis I stellt Gedanken zusammen, die zu verschiedenen Gelegenheiten während des Semesters angemerkt wurden. Im ersten Unterabschnitt wird das, was wir über die stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum gelernt haben, in konkreter Weise zugespitzt auf den klassischen Fall der stetigen Funktionen auf einem Intervall. Im zweiten Unterabschnitt wird durch Zitate aufgezeigt, gegen welche Vorstellungsweisen und Ansätze sich die moderne axiomatische Betrachtungsweise des Kontinuums durchsetzen musste.

Wir wünschen den Lesern unserer Vorlesungsausarbeitung, dass sie Zutrauen gewinnen zu den (u. E. durchaus intuitiven) Vorgehensweisen der moderneren Analysis.

7.1 Explizite Konstruktionen zum Satz von Stone-Weierstraß

Wir kehren zu unseren Beispielen zum Satz von Stone-Weierstraß zurück. Auf den Intervallen bieten sich konkrete polynomiale Approximationen der 'guten' Funktionen an, die auch in anderen Zusammenhängen Bedeutung haben; man nennt sie Methoden der Glättung.

Integralkerne: Es sei $P(s,t) \geq 0$ stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\int P(s,t)\,dt = 1$ für alle s. Für jede beschränkte stetige Funktion $f(\cdot)$ definieren wir die 'P-transformierte' Funktion $\tilde{f} = P^*f$ als das Integral $\tilde{f}(s) = \int P(s,t)f(t)\,dt$. (Man sollte sich hier vielleicht an die lineare Algebra erinnern. Der Funktion f entspricht dort eine Spalte, und dem 'Kern' $P(\cdot,\cdot)$ entspricht eine stochastische Matrix, d. h. eine Matrix mit nichtnegativen Einträgen, bei welcher jede Zeilensumme den Wert 1 hat.) Die lineare Abbildung P^* bildet offenbar die konstanten Funktionen in sich ab. Ausserdem gilt $\|P^*f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Besonderes Interesse verdient der Fall $P(s,t) = p(s-t)$, wo $p(\cdot)$ eine nichtnegative Funktion mit dem Integralwert $= 1$ ist. In diesem Fall erinnert die Konstruktion nämlich an ein Faltungsintegral; es gilt $\tilde{f}(s) = \int p(s-t)f(t)\,dt = \int f(s-u)p(u)\,du$. Die Formel fasst man gern in die folgenden Worte: Die Funktion $\tilde{f}$ ergibt sich, indem man die Verschobenen der Funktion f mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(u)\,du$ mittelt. Wenn $p(\cdot)$ eine 'glatte' Funktion ist, die ausserhalb einer 'kleinen' Umgebung des Nullpunkts 'klein' ist, dann kann man die Transformation $f \longmapsto \tilde{f} = P^*f$ als eine Regularisierung verstehen: $\tilde{f}(s)$ ist der gewichtete Mittelwert der Funktionswerte von f in einer 'kleinen' Umgebung von s. Die Operation 'glättet' oder 'regularisiert' die Funktion.

In der Stochastik präsentiert man die Werte regularisierter Funktionen als Erwartungswerte

$$\tilde{f}(s) = \mathfrak{E}\, f(s-U) \quad \text{wo } U \text{ die Dichte} \quad p(u)du \quad \text{hat.}$$

Beliebt ist z. B. die Regularisierung mit einer zentrierten Normalverteilung

$$\tilde{f}(s) = \mathfrak{E}\, f(s-\sigma Z) = \int f(s-u)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u^2}du.$$

Sprechweise 7.1.1. Eine Dirac-Folge auf $\mathbb{R}$ ist Folge stetiger Funktionen $(p_n(\cdot))_n$ mit den Eigenschaften

- $p_n(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_n(s)\ ds = 1,$ für alle n
- $\forall\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N : \quad \int_{-\delta}^{\delta} p(s)\ ds \geq 1-\varepsilon.$

Satz 7.1.1. *Es sei* $f(\cdot)$ *eine beschränkte gleichmäßig stetige Funktion auf* $\mathbb{R}$. *Und es sei* $(p_n(\cdot))_n$ *eine Dirac-Folge auf* $\mathbb{R}$. *Die Funktionenfolge*

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot p_n(t-s)\ ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\cdot p_n(s)\ ds$$

konvergiert dann gleichmäßig gegen die Funktion f.

Beweis. *Die Funktion* f *ist beschränkt und gleichmäßig stetig. Es sei* $|f| \leq M$ *und* $\delta > 0$ *zu* $\varepsilon > 0$ *so gewählt, dass* $|f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$ *für* $|s| < \delta$. N *sei so groß, dass für alle* $n \geq N$ *gilt* $\int_{-\infty}^{-\delta} p_n + \int_{\delta}^{-\infty} p_n \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. *Es gilt dann für alle* t

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(t-s) - f(t)) \cdot p_n(s)\ ds \right| \\ &\leq \int_{|s|>\delta} |f(t-s) - f(t)| \cdot p_n(s)\ ds\ + \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon \cdot p(s)\ ds \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \varepsilon\ = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Beispiel. (Die Landau-Kerne zur Glättung über $[0,1]$)
Es sei $c_n = \int_{-1}^{1} (1-s^2)^n\ ds$ und $p_n(s) = \frac{1}{c_n}(1-s^2)^n$ für $|s| \leq 1$ und $= 0$ für $|s| \geq 1$. Die Folge $p_n(\cdot)$ ist offenbar eine Dirac-Folge.

Es sei $f\cdot)$ eine stetige Funktion, die ausserhalb des Einheitsintervalls $[0,\ 1]$ verschwindet. Die Funktionen $f_n(t) = \int_0^1 f(s)\ p_n(t-s)\ ds$ sind polynomiale Funktionen im Intervall $[0,\ 1]$, denn für $t \in [0,\ 1]$ gilt im Integrationsbereich

$$\begin{aligned} p_n(t-s) &= \tfrac{1}{c_n}\left(1-(t-s)^2\right)^n = g_0(s) + g_1(s)t + \cdots + g_{2n}(s)t^{2n}, \\ f_n(t) &= \quad a_0 + a_1 t + \cdots + a_{2n} t^{2n} \quad \text{für } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel einer polynomialen Approximation der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0,\ 1]$ stellt eine Verbindung her zwischen den früher betrachteten Beta-Dichten und gewissen Begriffen der elementaren Stochastik, wie Erwartungswert, Varianz und Tschebyschev's Ungleichung.

Satz 7.1.2 (Die Bernsteinpolynome)**.**
Sei $f(\cdot)$ *eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall und*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \textit{für} \quad x \in [0,\ 1].$$

Die Folge $\left(f^{(n)}(\cdot)\right)_n$ *konvergiert dann gleichmäßig gegen* $f(\cdot)$.

Beweis. *Vorbemerkungen:*

- *Die Funktion* $f^{(n)}(\cdot)$ *heisst das* n*-te Bernstein-Polynom zu* $f(\cdot)$.
- *Die Polynome* $p(x) = p^{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ *für* $k = 0, \cdots, n$ *heissen die elementaren Bernsteinpolynome der Ordnung* n. *Mittels partieller Integration weist man leicht nach, dass jedes von ihnen den Integralwert* $\frac{1}{n+1}$ *hat.*
- *Die Linearkombination der elementaren Bernsteinpolynome mit den Koeffizienten* $f(\frac{k}{n})$, *den* f*-Werten in den 'Stützstellen', ergibt das Bernstein-Polynom* $f^{(n)}(\cdot)$.

- *Die Abbildung, die jedem stetigen* $f(\cdot)$ *ihr Bernstein-Polynom der Ordnung* n *zuordnet, ist eine lineare Abbildung in den* $(n+1)$*-dimensionalen Vektorraum aller Polynome vom Grad* $\leq n$.

In der elementaren Stochastik lernt man: Wenn $Z_1, Z_2, \ldots$ *unabhängige Zufallsgrößen sind mit* $Ws_x(Z=1) = x = 1 - Ws_x(Z=0)$, *dann gilt für die Summe* $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$

$$Ws(S_n = k) = Ws\big(\tfrac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) = \tfrac{k}{n}\big) = \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \textit{für} \quad k = 0, \cdots, n.$$

Wenn man ein Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit x n*-mal unabhängig wiederholt, dann ist die Häufigkeit der Erfolge eine binomialverteilte Zufallsgröße* S_n.
Der Wert des Bernsteinpolynoms im Punkt x *kann als ein Erwartungswert ('unter der Hypothese* x*') interpretiert werden:* $f^{(n)}(x) = \mathfrak{E}_x\, f\big(\tfrac{1}{n}S_n\big)$. *In der elementaren Stochastik zeigt man*

$$\mathfrak{E}_x\big(\tfrac{1}{n}S_n\big) = x; \qquad var_x\big(\tfrac{1}{n}S_n\big) = \tfrac{1}{n}x(1-x) \leq \tfrac{1}{4n}; \qquad Ws_x\big(\big|\tfrac{1}{n}S_n - x\big| \geq \delta\big) < \tfrac{1}{\delta^2}\tfrac{1}{4n}.$$

Für 'großes' n *ist die Binomalverteilung auf eine 'kleine' Umgebung des Erwartungswerts konzentriert. Der entscheidende Beitrag zu* $\mathfrak{E}_x\, f\big(\frac{S_n}{n}\big)$ *kommt von den Werten der relativen Häufigkeit in der 'kleinen' Umgebung* $U_x^\delta = \{\, y : |y - x| < \delta\,\}$. *Wir haben eine Situation, die sehr ähnlich ist zu der Faltung mit Dirac-Kernen.*
Die Funktion $f(\cdot)$ *ist beschränkt und gleichmäßig stetig. Wenn* $|f(x)| \leq M$ *für alle* x *und* $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ *für alle* x, y *mit* $|y - x| < \delta$, *dann gilt*

$$\begin{aligned}
\big|\, f^{(n)}(x) - f(x)\,\big| &\leq \mathfrak{E}_x\Big(\ \big|f(\tfrac{1}{n}S_n) - f(x)\big|; \quad \{\tfrac{1}{n}S_n \in U_x^\delta\}\Big) + \\
&+ \mathfrak{E}_x\Big(\ \big|f(\tfrac{1}{n}S_n) - f(x)\big|; \quad \{\tfrac{1}{n}S_n \notin U_x^\delta\}\Big) \\
&\leq \varepsilon \cdot Ws_x\big(\{\tfrac{1}{n}S_n \in U_x^\delta\}\big) + 2M \cdot Ws_x\big(\{\tfrac{1}{n}S_n \notin U_x^\delta\}\big) \\
&\leq \varepsilon + 2M \cdot \tfrac{1}{\delta^2}\tfrac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Zu vorgegebenem ε *gibt es eine (von* x *unabhängige !) Zahl* N, *sodass für* $n \geq N$ *gilt* $\big|\, f^{(n)}(x) - f(x)\,\big| < 2\varepsilon$.

Approximierende trigonometrische Polynome -
Ganz ähnlich kann man argumentieren bei der Approximation stetiger 2π-periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome.

Satz 7.1.3. *Es sei* $f(\cdot)$ *eine reellwertige stetige* 2π*-periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten* $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt$. *Und es sei*

$$f^{(N)}(t) = \sum_{-N}^{N} (1 - \tfrac{|n|}{N})^+ \cdot c_n e^{int}.$$

Die Folge $\big(f^{(N)}(\cdot)\big)_N$ *konvergiert dann gleichmäßig gegen* $f(\cdot)$.

Vorbemerkung: Wenn die Folge der Fourier-Koeffizienten summabel ist, dann gilt im Sinne der unbedingten Summierbarkeit bzgl. der Supremumsnorm

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\big).$$

$$f^{(N)}(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + (1-\tfrac{1}{N})\big(a_1\cos t + b_1\sin t\big) + (1-\tfrac{2}{N})\big(a_2\cos 2t + b_2\sin 2t\big) + \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{1}{N}\big(a_{N-1}\cos(N-1)t + b_{N-1}\sin(N-1)t\big).$$

In diesem Fall ist die gleichmäßige Konvergenz offensichtlich.

Nun ist die Folge der Fourier-Koeffizienten einer stetigen 2π-periodischen Funktion nicht notwendigerweise summabel. Für den Beweis des Satzes holen wir weiter aus.

Es sei $P(s,t) \geq 0$ für alle $s,t \in \mathbb{R}/2\pi$ mit $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s,t)dt = 1$ für alle s.
Für jede 2π-periodische Funktion $f(\cdot)$ ist dann die Funktion $\tilde{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{T-\pi}^{T+\pi} P(s,t)f(t)dt$ eine 2π-periodische Funktion, wobei der Wert von T keine Rolle spielt.
Besonderes Interesse verdient der Fall $P(s,t) = p(s-t)$, wo $p(\cdot)$ eine nichtnegative 2π-periodische Funktion ist mit dem $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)dt = 1$. In diesem Fall gilt

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int p(s-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int f(s-u)p(u)du,$$

wobei das Integral über eine volle Periode zu erstrecken ist.

Faltung über $\mathbb{R}/2\pi$

Während wir früher in der algebraischen Theorie der trigonometrischen Polynome summable Koeffizientenfolgen gefaltet haben (Stichwort 'Cauchy-Produkt'), wollen wir hier sog. Gewichtungen mit integrablen komplexen Dichten auf dem kompakten Raum $\mathbb{R}/2\pi$ falten.

Seien $f(\cdot)$ und $g(\cdot)$ 2π-periodische Funktionen mit

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(s)|ds < \infty\,, \quad \|g\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |g(s)|ds < \infty \quad .$$

Man nennt solche $f(\cdot)$ und $g(\cdot)$ Dichten von Gewichtungen über $\mathbb{R}/2\pi$. Für Dichten von Gewichtungen definiert man das „Faltungsprodukt über $\mathbb{R}/2\pi$ “

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int f(s)\cdot g(t-s)ds \quad \text{für } \mathbb{R}/2\pi,$$

wo die Integration über irgendein Intervall der Länge 2π zu erstrecken ist. Man beweist leicht, dass die Norm des Faltungsprodukts $\|h\|_1$ nicht größer ist als das Produkt der Normen.

Sehr spezielle komplexe Gewichtungen ergeben sich aus den 2π-periodischen Funktionen $e_n(s) = e^{ins}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die paarweisen Faltungsprodukte sind leicht auszurechnen

$$e_n * e_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ e_n & \text{falls } n = m \end{cases}$$

Weitere interessante komplexe Gewichtungen auf $\mathbb{R}/2\pi$ ergeben sich aus den trigonometrischen Polynomen $h(\cdot) = \sum_{-N}^{+N} a_n \cdot e_n(\cdot)$. Wenn man eine solche Gewichtung mit $e_m(\cdot)$ faltet, dann ergibt sich ein Vielfaches von $e_m(\cdot)$. Es gilt nämlich offenbar

$$(h * e_m)(\cdot) = a_m \cdot e_m(\cdot), \qquad \text{mit} \qquad a_m = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(s) \cdot e^{-ims} ds$$

Aus der Bilinearität der Faltungsoperation ergibt sich nun der

Satz 7.1.4. *Das Falten trigonometrischer Polynome spiegelt sich in der punktweise Multiplikation der Koeffizientenfolgen.* $(\sum a_n e_n) * (\sum b_m e_m) = \sum (a_n \cdot b_n)\, e_n$.

Man sollte sich hier an den bekannten analogen Satz erinnern:

Satz 7.1.5. *Die punktweise Multiplikation trigonometrischer Polynome spiegelt sich in der Faltung der Koeffizientenfolgen (Cauchy-Produkt).*

Hinweis:

Die Idee der Faltung von Gewichtungen auf $\mathbb{R}/2\pi$ eröffnet eine neue Sicht auf Fourier-Koeffizienten und Fourier-Polynome: In der Wahrscheinlichkeitstheorie definiert man für jede Gewichtung $d\mu(\cdot)$ die Folge der sog. charakteristischen Koeffizienten $\phi_n = \int e^{ins} d\mu(s)$; und man assoziiert dazu trigonometrische Polynome

$$g_N = \sum_{-N}^{N} \phi_n e^{-ins}, \qquad G_N = \sum \left(1 - \tfrac{|n|}{N}\right)^+ \phi_n e^{-ins}.$$

(Trotz der formalen Ähnlichkeit spricht man in diesem Zusammenhang nicht von Fourier-Koeffizienten und approximierenden Fourier-Polynomen für die Gewichtung $d\mu(\cdot)$; man beachte auch, dass e^{ins} durch e^{-ins} ersetzt erscheint). Die Begriffsbildungen und Notationen aus der Stochastik sollen hier aber nicht weiter verfolgt werden. Man findet sie lehrbuchmäßig ausgearbeitet unter dem Stichwort ‘Satz von Herglotz’.

Im Geiste dieses Ansatzes assoziieren wir mit der stetigen 2π-periodischen Funktion

$h(\cdot)$ für jedes N die trigonometrischen Polynome

$$h_N(s) = \sum_{-N}^{+N} a_n e^{ins} \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h(s)\cdot e^{-ins} ds$$

$$H_N(s) = \frac{1}{N}\big(h_0(\cdot) + h_1(\cdot) + \ldots + h_{N-1}(\cdot)\big) = \sum_0^N \big(1 - \tfrac{|n|}{N}\big)^+ a_n e^{ins}.$$

Für diese aus der integrablen 2π-periodischen Funktion $h(\cdot)$ abgeleiteten trigonometrischen Polynome gilt nun

Satz 7.1.6.
Das approximierende Fourierpolynom $h_N(\cdot)$ entsteht aus $f(\cdot)$ durch Faltung mit dem Dirichlet-Kern; das Césaro-Mittel $H_N(\cdot)$ entsteht durch Faltung mit dem Fejér-Kern.

Beweis.
Wir erinnern an die Definition des Dirichlet-Kerns D_N und des Fejér-Kerns F_N. Ausserdem bemerken wir $\frac{1}{2\pi}\int D_N(t)dt = 1 = \frac{1}{2\pi}\int F_N(t)dt$. *Da der Fejér-Kern nichtnegativ ist, kann man das Falten mit ihm als eine Regularisierung verstehen.*

$$\begin{aligned}
D_N(t) \quad &= \sum_{-N}^{+N} e^{int} = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\Big((N+\tfrac{1}{2})t\Big)\\
&= \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2i}\Big(e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{i(N+\frac{1}{2})t}\Big),\\
F_N(t) \quad &= \frac{1}{N}\big(D_0(t) + \ldots + D_{N-1}(t)\big) \quad = \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\sin^2\Big(\frac{N}{2}t\Big)\\
(h * D_N)(t) &= \sum_{-N}^{N}(h * e_n)(t) = \sum_{-N}^{N} a_n\cdot e_n(t),\\
(h * F_N)(t) &= \sum\big(1 - \tfrac{|n|}{N}\big)^+ a_n\cdot e_n = \frac{1}{2\pi}\int h(s)\cdot F_N(t-s)ds.
\end{aligned}$$

Hinweis: (Die Regularisierung stückweise stetiger Funktionen) Die Regularisierung durch die Faltung mit den Fejér-Kernen F_N kann man auf beliebige integrable 2π-periodische Funktionen anwenden. Was dabei 'im Limes' herauskommt' sieht man leicht bei den stückweise stetigen Funktionen. Betrachten wir nochmals das

Beispiel (Eulers Sägezahnfunktion).
$E(\cdot)$ sei die unstetige 2π-periodische Funktion mit

$$E(s) = \begin{cases} -\pi - s & \text{für } s \in (-\pi, 0)\\ \pi - s & \text{für } s \in (\pi, 0)\end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten sind $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{2\pi}\int E(s)e^{-ins}ds = -\frac{i}{n}$ für $n \neq 0$.

Das approximierende Fourierpolynom der Ordnung N ist $E_N(s) = \sum_{-N}^{+N} a_n e^{ins} = \sum_{1}^{N} \frac{2}{n}\sin(ns)$.

(Man bemerke, dass die Ableitung bist auf eine Konstante der N-te Fejér-Kern ist)

Die Folge der Fourier-Koeffizienten der unstetigen Funktion $E(\cdot)$ ist nicht summabel. Es ist interessant, auf dem Computer zu sehen, in welchem Sinne die Fourierpolynome E_N bzw. ihre Césaro-Mittel doch gegen die Sägezahnfunktion konvergieren.

Ein ähnlich eindrucksvolles Beispiel liefert die (2π-periodische fortgesetzte) Signumfunktion

$$\frac{4}{\pi}\cdot\big(E(s)+E(\pi-s)\big) = \frac{4}{\pi}\left(\sin s + \frac{1}{3}\sin 3s + \frac{1}{5}\sin 5s + \dots\right) \quad = \begin{cases} 1 & \text{für } s \in (0,\pi) \\ -1 & \text{für } s \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Glättung mit den Fejèr-Kernen

Das trigonometrische Polynom $h^{(N)}(t) = \sum_0^N (1-\frac{|n|}{N})^+ \cdot c_n e^{int}$ ist die mittels des Fejér- Kerns geglättete Funktion: $h^{(N)} = h * F_N$. Die Wahrscheinlichkeitsgewichtung mit der Dichte F_N ist symmetrisch um den Nullpunkt und legt den größten Teils des Gewichts in die Nähe des Nullpunkts.

- Wenn, wie es im Satz vorausgesetzt war, h gleichmäßig stetig ist, dann liefert das gleiche Argument wie bei den Bernstein-Polynomen die gleichmäßige Konvergenz $h^{(N)} \longrightarrow h$.
- Wenn $h(t)$ in einem Punkt $\tilde{t}$ stetig ist (und insgesamt beschränkt), dann haben wir $(h * F_N)(\tilde{t}) \longrightarrow h(\tilde{t})$.
- Wenn $f(\cdot)$ stückweise stetig ist mit Sprungstellen, dann konvergiert die Zahlenfolge $(h * F_N)(\tilde{t})$ in jeder Sprungstelle $\tilde{t}$ gegen den Mittelwert zwischen dem rechtsseitigen und dem linksseitigen Grenzwert.

Faltung mit den Dirichlet-Kernen

Die Faltung mit den 'Dirichlet-Kernen' ist keine Glättung, weil die Dirichlet-Kerne nicht überall positiv sind. Die Faltung liefert die approximierenden Fourier-Polynome, und diese konvergieren nach einem berühmten Satz von Carleson (1966) für alle p-integrablen $h(\cdot)$, $(p > 1)$, fast überall im Lebesgue'schen Sinne gegen h.

Der Beweis ist sehr delikat.

7.2 Von Euler's Analysis zum allgemeinen Funktionsbegriff

Die Analysis der Funktionen auf einem Intervall hat eine lange, mehrfach gebrochene Tradition. Es ist eine offene didaktische Frage, wieviel unsere Anfänger von den alten (möglicherweise als 'natürlich' oder 'naheliegend' eingeschätzten) Denkmustern erfahren oder wissen sollten, um ein adäquates Verständnis für die aktuelle Analysis zu entwickeln. Man wird hier wohl entsprechend den Studienzielen zu differenzieren haben. Man sollte bedenken, dass die Geschichte nicht nur mit ungenauer Argumentation belastet ist sondern auch mit irrigen 'intuitiven' Vorstellungen.

Geometrisch gegebene und elementar dargestellte Funktionen

Der Calculus von Newton und Leibniz war ein Kalkül der geometrischen Variablen gewesen, von Größen, die explizit mit *geometrischen Kurven* assoziiert waren; ihr Studium orientierte sich an intuitiven geometrischen Begriffen. Als man sich im 18. Jahrhundert von den geometrisch verstandenen Kurven abwenden wollte, begann man die Analysis als die Untersuchung *funktionaler Beziehungen* zwischen Zahlen zu betreiben, wobei der Funktionsbegriff im Wesentlichen durch Galilei's Darstellung der Naturgesetze inspiriert war. Man unternahm Versuche, Prinzipien der Arithmetik an die Stelle der geometrischen Intuition zu setzen.

Eindrucksvolle Anstrengungen unternahm insbesondere Lagrange. In seinem großen Werk *Mécanique analytique (1788),* war es ihm gelungen, die Resultate von Euler, d'Alembert und anderen Forschern zu verarbeiten und von einem einheitlichen Standpunkt, der von ihm weiterentwickelten Variationsrechnung, darzustellen. In seinen Büchern über Funktionen (1797 und 1801) beschritt Lagrange dann einen ganz anderen Weg. Er versuchte der Infinitesimalrechnung dadurch eine sichere Grundlage zu geben, dass er sie auf die Algebra reduzierte. Die Abwendung von der geometrischen Intuition in seiner Funktionenlehre war Lagrange so wichtig, dass er im Vorwort betonte, dass man in seinem Werk keine Figuren, sondern nur algebraische Operationen findet. Lagrange lehnte die Theorie der Grenzwerte, so wie sie von Newton angedeutet und von d'Alembert formuliert worden war, ab und baute seine Theorie vollständig auf die Idee der Taylorreihe.

Das entscheidende Defizit von Lagrange's Funktionentheorie bestand darin, dass die Konvergenz der Reihen ungenügend beachtet wurde, (ein Defizit, welches nachhaltig erst 1826 durch N. H. Abel behoben wurde).

Der Wunsch nach einer abstrakten Behandlung der stetigen Funktionen (und einer mathematisch wohlfundierten Theorie des Kontinuums) war natürlich mit dem Scheitern des Ansatzes von Lagrange nicht erledigt.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts, vor Bolzano (1817) und Cauchy (1821), war die Stetigkeit (einer Kurve oder einer Funktion) immer irgendwie an ihre *Darstellung* geknüpft. In der frühen Zeit war die Stetigkeit kein Postulat, also keine Annahme, auf welche man eine Theorie gründen wollte; die Stetigkeit (wie auch die Differenzierbarkeit) erscheint als eine bemerkenswerte Eigenschaft von vorgefundenen oder irgendwie konkret konstruierten Funktionen.

Zur Erläuterung der alten Auffassung zitieren wir einige 'Definitionen' aus seinerzeit maßgebenden Lehrbüchern:

- Euler (1748): Eine Function einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist.
- Klügel (1803): Function einer veränderlichen Größe ist der analytische Ausdruck der Zusammensetzung einer Größe aus dieser veränderlichen Größe und einer oder mehrerer unveränderlicher. (Satz: Wenn y eine Function von x ist, so ist x auch eine Function von y.)

Man sollte wissen: 'Analytische Ausdrücke' sind bei Euler Gebilde, die durch Anwendung der gängigen mathematischen Operationen (einschließlich der unendlichen Summen!) entstehen. Dieser Euler'sche Funktionsbegriff (sowie seine Bezeichnung $f(x)$ für den Wert der Funktion f an der Stelle x) war für die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts maßgebend.

Es ist allerdings zu bemerken, dass Euler selbst immer wieder von der offiziellen Definition abwich. In seinen 'Unterweisungen in der Differentialrechnung' von 1755 sagt er z. B.:

- Sind nun Größen auf die Art voneinander abhängig, dass keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in den anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, dass sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift.

Ebenfalls bemerkenswert ist Eulers 'Definition' einer stetigen Funktion im Lehrbuch 'Institutiones Calculi integralis III' (1768- 1770) als 'Kurve, die man mit der freien Hand zeichnen kann' (*'curva quaecunque libero manu descripta'*).

Stetigkeit erschien überdies lange Zeit an die *Einheitlichkeit der Darstellung* geknüpft. Cauchy hatte gegen Widerstände anzukämpfen, als er darauf bestand, dass es bei einer Funktion nicht darauf ankommen sollte, wie sie gegeben ist. Es fiel seinen Zeitgenossen schwer zu akzeptieren, dass Zuordnungen wie

$$\mathbb{R} \ni \alpha \longmapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R} \ni \alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad \alpha = 0 \\ -1 & \text{wenn} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

ein und dieselbe Funktion sind. $\big($ Man bezeichnet diese Funktion heute übrigens als die Signum-Funktion $\operatorname{sign}(\alpha)\big)$.

Die durch Formeln gegebenen Funktionen spielen natürlich bis heute eine wichtige Rolle in den Anwendungen der Mathematik, und sie erfahren zurecht Aufmerksamkeit in der ersten mathematischen Grundvorlesung. Für Studierende, die sich hauptsächlich für Anwendungen in der Physik und in den Ingenieurswissenschaften interessieren, werden die explizit gegebenen Funktionen weiterhin im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen. Das Feld ist allerdings insofern heute wesentlich reicher als zu Eulers Zeiten, weil heute nicht nur Formeln (und die freie Hand) für die Darstellung zur Verfügung stehen, sondern auch Computerprogramme. Die 'explizite' Bestimmung einer Zahl oder einer Funktion, die ein Problem 'löst', bedeutet nicht mehr, dass man eine Lösungsformel anschreiben kann.

Für die Studierenden der Mathematik stellt sich die Frage noch einem kompetenten Umgang mit Funktionen etwas anders dar. Ihnen muss klar werden, dass die explizit analytisch dargestellten und die geometrisch gegebenen Funktionen heute nicht mehr im Zentrum der Analysis stehen. Sie müssen lernen, sich in Funktionenräumen zurechtzufinden; sie müssen lernen, dass verschiedene Zielsetzungen verschiedene Präzisierungen oder Ausgestaltungen des Funktionsbegriffs erfordern. Vervollständigung ist dafür sehr wichtig, z. B. bzgl. der gleichmäßige Konvergenz für die stetigen Funktionen, bzgl. der 'kompakten' Konvergenz für die durch Potenzreihen dargestellten Funktionen, oder bzgl. der Normkonvergenz für die trigonometrischen Reihen.

Die sog. statische Definition der Stetigkeit

Die Differential- und Integralrechnung (einschließlich der Variationsrechnung) war im 18. Jahrhundert zu einer eindrucksvollen Blüte gebracht worden. Bei den konkreten Untersuchungen, die sich fast ausschliesslich auf Fragen aus Astronomie und Mechanik bezogen, hatten sich die Mathematiker nicht allzusehr um die Grundlagen ihrer Arbeit gekümmert. „Geht vorwärts, der Glaube wird sich schon einstellen" soll d'Alembert gesagt haben. Die positive Entwicklung erschien sich aber gegen Ende des Jahrhunderts zu erschöpfen. Lagrange meinte, die 'Mine der Mathematik', sei schon sehr tief und man müsse sie wohl früher oder später aufgeben, falls keine neuen Adern entdeckt würden. In einem Brief an d'Alembert (1772) meinte er : *'Scheint Ihnen nicht, dass die erhabene Geometrie ein wenig dazu neigt, dekadent zu werden?' 'Sie hat keine andere Stütze als Sie und Herrn Euler.'* Im ähnlichem Sinne erklärte 1811 der junge Cauchy: *'Die Arithmetik, die Geometrie, die Algebra und die transzendente Mathematik sind Wissenschaften, die man als abgeschlossen betrachten kann; es bleibt nur noch übrig, von ihnen nützliche Anwendungen zu machen.'*

Eine befriedigende Grundlegung des Calculus war im 18. Jahrhundert nicht gefunden worden. Es gab verschiedene Meinungen zu diesem Zustand der mathematischen Wissenschaft. Auf der einen Seite erklärte 1810 S. F. Lacroix (1765 - 1843), der Verfasser des maßgeblichen Lehrbuchs „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral "(2 Bände, 1797): *Solche Spitzfindigkeiten, mit denen sich die Griechen abquälten, brauchen wir heute nicht mehr.*

Auf der anderen Seite wurde das Fehlen der Grundlagen aber doch von vielen nicht nur als Schönheitsfehler, sondern auch als ein Hemmnis des Fortschritts empfunden. Man suchte weiter eine Antwort auf die Frage, welche die Berliner Akademie bereits im Jahr 1784 als Aufgabe formuliert hatte:

- Die höhere Geometrie benutzt häufig unendlich große und unendlich kleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, dass die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, dass man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und dass man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang machen.

Zudem hatte zu Beginn des 19. Jahrhunderts ein didaktischer Gesichtspunkt Gewicht bekommen. Es war nicht mehr so, dass die Mathematiker ausschliesslich in Salons oder gelehrten Akademien Gedankenaustausch pflegten; sie wirkten auch als Lehrer an den Universitäten und technischen Lehranstalten; und für die Vorlesungen sorgten sich viele Lehrende um einen systematischen Aufbau der Lehrstoffs. Als Professor an der École Polytechnique versuchte Cauchy ab 1820 mathematische Strenge zusammenzubringen (wie er sagte) mit der Einfachheit, die sich aus der direkten Betrachtung infinitesimal kleiner Größen ergibt. **Cauchy** verwendete den *Grenzwertbegriff* von d'Alembert und nutzte andererseits die Bezeichnungen von Lagrange, allerdings ohne Rekurs auf dessen 'algebraischen' Begründungsversuch. Cauchy erklärt, was man sich unter einer stetigen Funktion vorzustellen hat, folgendermaßen:

Eine Funktion $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ *verhält sich stetig für* x *zwischen zwei Werten, wenn zwischen diesen Werten ein infinitesimal kleiner Zuwachs der Variablen einen infinitesimal kleinen Zuwachs der Funktion hervorruft.* Unter einer infinitesimalen Größe versteht Cauchy *eine Variable mit dem Grenzwert 0.*
(Einen genaueren Einblick in die Ausdrucksweise findet man z. B. in der Monographie *C. H. Edwards, Jr.: The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag S 309*)

Auch wenn Cauchy's Bemühen um Strenge nicht wirklich gelungen ist (Cauchy erkannte beispielsweise weder die Bedeutung der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion noch die Relevanz der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge), so ist doch festzustellen, dass seine auf Strenge bedachten Lehrwerke *Course d' analyse (1821),* und *Resumé des leçons données à l'école royale polytechnique, (1823)*) einen nachhaltigen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Analysis hatten. Man kann sogar mit einem gewissen Recht sagen, dass Cauchy's auf den Konvergenzbegriff gegründeter Aufbau der Infinitesimalrechnung bis heute die Lehrtexte für die Anfänger prägt. Sie wird noch weithin bevorzugt gegenüber der in technischer Hinsicht weit überlegenen Ausdrucksweise von Weierstraß, die man mit dem unfreundlich gemeinten Namen Epsilontik belegt hat.

Viele Lehrbücher erklären, Cauchy hätte in seinem *Cours d' analyse* den Stetigkeitsbegriff im Wesentlichen genauso eingeführt wie Bolzano (wobei übrigens von den Mathematikhistorikern nicht geklärt werden konnte, ob Cauchy Bolzanos Arbeit kannte). Eine solche Gleichsetzung ist aber auch in Frage gestellt worden; man muss wohl eher Weierstraß rechtgeben, der Cauchy's Vorstellungwelt der konvergierenden Folgen misstraute und in ihr einen verdächtigen Rückgriff auf antiquierte Bewegungsvorstellungen, und damit auf unpassende Raum- und Zeitanschauungen sah.

Bolzano (1781 - 1848) verbindet seine (oben zitierte) Definition der Stetigkeit mit einem philosophischen Anspruch. Bolzano kritisiert inadaequate Vorstellungen vom Unendlichen. Er spricht bei keiner Gelegenheit von infinitesimalen Zuwächsen, und er lehnt für die Analysis konsequent jede geometrische Anspielung ab. Bei Bolzano, den man als den ersten Pionier der Arithmetisierung der Analysis bezeichnen kann, gewinnt die Stetigkeit einer Funktion den Charakter eines Postulats, dessen Konsequenzen zu studieren sind. Ein erstes Beispiel ist die Abhandlung : *'Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege'*. Es geht Bolzano darum, die 'wahren Gründe' (wie er sagt) für den Sachverhalt aufzudecken. Bolzanos Betrachtungen ist auch deswegen höchst bemerkenswert, weil er bei seiner strengen Argumentation eine ganze Reihe von Prämissen benennt, die anderswo erst viel später explizit formuliert worden sind. Bolzano hält z. B. fest, es liege in der Bestimmung des Begriffs der reellen Zahl, dass eine nach oben beschränkte Menge eine kleinste obere Schranke besitzt. Bolzano hatte auch ein Vorstellung von gleichmäßiger Konvergenz. Weiter erkannte Bolzano die Bedeutung konvergenter Teilfolgen (der sog. Satz von Bolzano–Weierstrass erinnert daran). Bei all dem vermeidet Bolzano nicht nur alle geometrischen sondern auch alle 'dynamischen' Anspielungen; er vermeidet es insbesondere (im Unterschied zu Cauchy), davon zu sprechen, dass eine Größe irgendwohin strebt. Eine Frucht dieser Abstinenz war anscheinend die, das Bolzano das Phänomen der gleichmäßigen Stetigkeit benennen (wenn auch leider nicht technisch kompetent behandeln) konnte. Bolzano hat im Übrigen explizit gemacht, dass die von ihm gegebene Definition der Stetigkeit nicht unbedingt die Vorstellungen stützt, die man sich seit Euler üblicherweise von einer stetigen Funktion machte. Er konstruierte (im Jahr 1834) eine Funktion, die auf einem Intervall stetig aber nirgends differenzierbar ist. Ein Grund, dafür, dass die Ansätze von Bolzano lange unbeachtet blieben, ist einmal der, dass Bolzano kaum Kontakt zu den Zentren des mathematischen Betriebs hatte. (Seine philosophischen Überlegungen zum Unendlichen in der Analysis wurden wohl erst von G. Cantor adaequat wahrgenommen.) Während Cauchys Folgerungen aus der abstrakten Definition der Stetigkeit nach und nach akzeptiert wurden, wurden 'pathologische' mathematische Objekte, wie die stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktionen, nicht beachtet. (Die Bestürzung über solche Objekte setzte erst ein, als sie (um 1861) von Weierstraß in seinen Vorlesungen vorgestellt und untersucht wurden.) Zu Bolzanos Zeit fehlten offenkundig die technischen Mittel, einen Bogen zu spannen vom Ringen um ein gründliches Verständnis des Unendlichen zu einer leistungsfähigen Theorie der stetigen Funktionen. (Ich stütze mich bei meinen Hinweisen auf Bolzanos Ansätze auf einen Aufsatz von V. Jarník in einer Festschrift, die das Mathematische Institut der tschechischen Akademie zu Bolzanos 200. Geburtstag herausgegeben hat.)

Die 'statische' Definition der Stetigkeit einer Funktion wurde erst um 1870 von Weierstrass zur Reife gebracht. **Weierstrass** (1815–1897) vermied wie Bolzano alle Betrachtungen, die auf eine kontinuierliche Bewegung anspielten. Er ersetzte die (in einem gewissen Sinn dynamische) Ausdrucksweise $\lim_{x\to a} f(x) = L$ durch die 'statische' Formulierung: zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$, sodass $|f(x) - L| < \varepsilon$ gilt, falls $0 < |x - a| < \delta$. Weierstraß gelang es mit seiner (später so genannten) Epsilontik eine Reihe weiterer Begriffe so herausauszuarbeiten, die sich zu einer in jeder Hinsicht überzeugenden Theorie fügten. In seinen Berliner Vorlesungen konnte er die grundlegenden Begriffe der Infinitesimalrechnung (wie Minimum, Ableitung, gleichmäßige Konvergenz usw.) endgültig klären. D. Hilbert schrieb 1926 in seinem Aufsatz 'Über das Unendliche' in den Mathematischen Annalen 95, S. 162- 190.

> *Wenn heute in Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Irrationalzahl und überhaupt des Limes beruhen, in der Analysis volle Übereinstimmung und Sicherheit herrscht und in den verwickeltsten Fragen, die die Theorie der Differential- und Integralgleichungen betreffen, trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung von Über-, Neben- und Durcheinander-Häufung der Limites doch Einhelligkeit aller Ergebnisse statthat, so ist das wesentlich ein Verdienst der wissenschaftlichen Tätigkeit von Weierstraß.*

Eine präzise Bestimmung des Systems der reellen Zahlen war eine unabdingbare Voraussetzung für die Weierstraß'sche Theorie der reellen Funktionen. Weierstraß entwickelte etwas derartiges, sein Zugang ist aber nicht populär geworden. Bekannt wurden stattdessen als Alternativen R. Dedekinds Theorie der Irrationalzahlen und G. Cantor's Konstruktion von $\mathbb{R}$ durch Vervollständigung.

Die Konstruktion von **Dedekind** (1831 - 1916) nahm ihren Ausgang von der 'geometrischen Evidenz', dass *'jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß'*. Dedekind nannte das die *Stetigkeit* der Geraden. Um das in der Analysis immer wieder stillschweigend benutzte Argument stichhaltig zu machen, machte er sich daran, den Bereich der rationalen Zahlen durch Schöpfung neuer Zahlen so zu verfeinern, *'dass das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt, wie die gerade Linie'*. Dedekind sagt:

> *Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusammenhang in kleinsten Teilen ist natürlich nichts erreicht; es kommt darauf an, ein präzises Merkmal der Stetigkeit anzugeben, welches als Basis für wirkliche Deduktionen gebraucht werden kann. . . . . . . Ich finde das Wesen der Stetigkeit in dem folgenden Prinzip: „Zerfallen alle Punkte der Geraden im zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welche diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt".*

Dedekind will sich nicht auf die Sprechweise einlassen, die Irrationalzahl sei nichts anderes als der Schnitt selbst. Er besteht darauf, *'... etwas Neues (vom Schnitt Verschiedenes) zu erschaffen, was dem Schnitt entspricht, und von dem ich sage, daß es den Schnitt hervorbringe, erzeuge. Wir haben das Recht, uns eine solche Schöpfungskraft zuzusprechen.'*

Die Konstruktionen von R. Dedekind und G. Cantor (1845 - 1918), die keine Scheu vor dem sog. Aktualunendlichen zeigen, wurden zwar zunächst einmal von wichtigen Meinungsführern (allen voran L. Kronecker) abgelehnt, fanden aber schliesslich mit dem Siegeszug von Cantors abstrakter Mengenlehre (und Lebesgue's Integrationstheorie) im 20. Jahrhundert allgemeine Anerkennung. Sie (und nicht die Bemühungen von Cauchy) müssen heute als die verlässliche Grundlage der reellen Analysis gelten.

Ergänzend ist zu sagen, dass die 'Weierstraß'sche Strenge' nicht nur zu einer mathematisch strengen Theorie der stetigen Funktionen auf einem Intervall führte. Sie lieferte auch die Grundlage für wegweisende Betrachtungen in Funktionenräumen (man denke an den Begriff der kompakten Konvergenz) sowie für tiefgreifende Schlussweisen in der Variationsrechnung (man denke an das sog. Dirichlet'sche Prinzip in der Potentialtheorie). Schon bei Weierstraß zeigt sich die Kraft von Begriffen wie Vollständigkeit und Kompaktheit, von Begriffen also, die in der Analysis des 20. Jahrhunderts entscheidende Bedeutung gewinnen sollten.

Variable, andere Definitionsbereiche, holomorphe Funktionen

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts war die Idee der stetigen Funktion eng verbunden mit der durchaus dynamischen Vorstellung, dass das 'Argument' (oder die 'unabhängige Variable') den Definitionsbereich, und der war ein Intervall, 'durchläuft'. Diese Vorstellung klingt z. B. in den folgenden Definitionen an:

- Dirichlet (1837): Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe, und unter x eine veränderliche Größe, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heißt y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervall nach demselben Gesetz von x abhängig sei, ...

- Duhamel (um 1840). Man nennt Variable jede Größe, welche in der Aufgabe, worin man sie betrachtet, successive verschiedene Werthe annehmen kann. Unabhängige Variablen heißen diejenigen, deren Werthe vollkommen willkürlich sind; abhängige Variablen oder Funktionen diejenigen, deren Werthe von anderen Variablen bestimmt werden, mag diese Abhängigkeit beschaffen sein, wie sie will, ...

Die statische Stetigkeitsdefinition ist eine Absage an diese Vorstellungsweise; denn da ist nicht die Rede von einer Variablen, die 'läuft' oder (continuierlich) sich 'verändert'. Das Argument einer Funktion ist vielmehr in völlig statischer Weise durch einen Buchstaben gekennzeichnet, einen Buchstaben, welcher jedes Element in der vorgegebenen Menge bedeuten kann. Diese Sichtweise auf Funktionen (oder Abbildungen), die man in heutigen Lehrbüchern (nach einem Vorschlag von Hankel) als den Dirichlet'schen Funktionsbegriff bezeichnet, konnte natürlich erst mit dem Aufkommen der abstrakten Mengenlehre Anerkennung finden.

- Hankel (1870) : Eine Funktion heisst y von x, wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert y entspricht; gleichwohl, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht, ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.

- Dedekind (1887) : Unter einer Abbildung f eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $f(s)$ bezeichnet wird.

- Hausdorff (1914) : ... Zuvor betrachten wir eine Menge P solcher Paare, und zwar von der Beschaffenheit, dass jedes Element a von A in einem und nur einem Paare p von P als erstes Element auftritt. Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b, nämlich dasjenige, mit dem es zu einem Paar $p = (a, b)$ verbunden auftritt; dieses durch a bestimmte, von a abhängige, dem a zugeordnete Element bezeichnen wir mit $b = f(a)$ und sagen, dass hiermit in A (d. h. für alle Elemente von A) eine eindeutige Funktion von a definiert ist. Zwei solche Funktionen $f(a), f'(a)$ sehen wir dann und nur dann als gleich an, wenn die zugehörigen Paarmengen P, P' gleich sind, wenn also für jedes a, $f(a) = f'(a)$ ist.

Man bemerke, dass Hausdorff alle irgendwie dynamisch klingenden Ausdrucksweisen (wie 'Zuordnung' oder 'Entsprechung') mit größter Vorsicht geraucht. Bei ihm sind nun auch ganz allgemeine Mengen als Definitionsbereiche zugelassen. Es gibt keine Anspielungen auf ein 'Durchlaufen' des Definitionsbereichs und es gibt auch keinen Platz mehr für den Begriff einer stetigen Funktion mehrerer Variabler, für einen Begriff also, auf den man seit Bolzano und Cauchy einige Mühe verwendet hatte.

Der Preis für die Ausdünnung der Annahmen war natürlich der, dass sich im allgemeinen Funktionsbegriff sehr wenig findet, was als Grundlage für irgendwelche Deduktionen dienen könnte. Eine Konsequenz war die, dass zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Beschreibung der Definitionsbereiche interessanter Typen von Funktionen von Grund auf neu konzipieren war. Für die Theorie der stetigen Funktionen (und stetigen Abbildungen) entwickelte man die topologischen Räume, und für die integrablen Funktionen entwickelte man (etwas später) den Begriff des messbaren Raums. – Die sich hier anschliessenden Entwicklungen nennt man heute die Reelle Analysis. (Die Funktionalanalysis und die Maß- und Integrationstheorie kann man als Teilgebiete bezeichnen.)

Es sei hier angemerkt, dass die von Newton initiierte Analysis, die bei Lagrange zu einem ersten Höhepunkt gekommen war, im 20. Jahrhundert höchst vitale Fortsetzungen geometrischen Charakters gefunden hat, die wenig Gebrauch machen von den oben skizzierten Bemühungen um einen fundierten Funktionsbegriff. Prominente Gebiete sind die Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten und die Theorie der dynamischen Systeme.

Kehren wir zurück zum Funktionsbegriff um 1800. Man begann sich damals auch für Definitionsbereiche für analytisch gegebene Funktionen einer Variablen zu interessieren, die keine Intervalle sind. Im Jahr 1811 schrieb Gauß in einem Brief an seinen Freund Bessel, man beachte zu wenig den Unterschied zwischen Funktionen mit reellem Argument und solchen mit komplexem Argument.

> *... zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Funktion in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloß auf reelle Größen (reelle Werte des Arguments der Funktion) angewandt wissen will, und die imaginären Werte des Arguments gleichsam nur als Überbein ansieht — oder ob er meinem Grundsatz beitrete, daß man in dem Reiche der Größen die imaginären* $a+b\cdot\sqrt{-1} = a+bi$ *als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingierten Größen außerordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblicke für Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genötigt sein würde ....*

Nachdem Gauß durch verschiedene Arbeiten, insbesondere durch seine 'disquisitiones arithmeticae' (1831) das Geheimnis, welches die komplexen Zahlen immer noch umgeben hatte, durch die Darstellung als Punkte einer Ebene ein für allemal beseitigt hatte, konnte man den Bereich der komplexen Zahlen als ein Kontinuum begreifen. Es konnten nun arithmetische Probleme auch durch die Betrachtung von Kurven gelöst werden, z. B. von Kurven, bei welchen es geometrisch evident war, dass sie sich schneiden. Gauß hat sich bekanntlich zuerst in seiner Dissertation (1799) und dann immer wieder mit dem sog. Fundamentalsatz der Algebra befasst. („Jedes nichtkonstante Polynom, als Funktion auf der Zahlenebene betrachtet, besitzt mindestens eine Nullstelle.") Alle Beweise von Gauß enthielten weitreichende mathematische Ideen; und das war wohl der wesentliche Grund dafür, dass sie (im Gegensatz zu früheren Beweisansätzen, wie z. B. dem von d'Alembert) allgemeine Anerkennung fanden, obwohl klar war, dass sie aus rein arithmetischer Sicht defizitär waren. Beim dritten Beweis erklärt Gauß explizit, dass er sich auf die Prinzipien der Geometrie der Lage (geometria situs) stützt, deren Beweiskraft nicht geringer seien als die der Größengeometrie. In einer Variante desselben Beweises aus dem Jahr 1849 („Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen") äußert sich Gauß etwas ausführlicher:

> *Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren von Räumlichen unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Größenlehre an, dessen Gegenstände die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größencombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig*

> *ausgebauet ist, und in welchem man sich nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.*

Genaueres findet man in einem Artikel von A. I. Markuschewitsch "Die Arbeiten von C. F. Gauß über Funktionentheorie" in einem Gedenkband anläßlich des 100. Todestages (Herausgeber H. Reichardt) Teubner-Verlag 1957.

Die hier von Gauß angesprochene Ideenwelt der Topologie wurde von Riemann in seiner berühmten Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Komplexen Größe“ erheblich ausgebaut. Grundideen der höchst erfolgreichen 'geometrischen' Theorie der analytischen Funktionen waren u. a. die Idee der konformen Abbildung, die komplexe Differenzierbarkeit, die sog. Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und die harmonischen Funktionen.

Weierstraß setzte dieser geometrischen Theorie seine ebenfalls sehr erfolgreiche 'algebraische' Funktionentheorie entgegen, die ganz auf die lokale Darstellung der holomorphen Funktionen durch Potenzreihen gegründet war. Zur großen Erleichterung der Mathematiker konnte E. Goursat im Jahre 1899 zeigen, dass sich die beiden Theorien auf dieselben Funktionen beziehen. („Holomorphie im Sinne von Weierstraß ist dasselbe wie Holomorphie im Sinne von Riemann“)

Messen und Integrieren

Nachdem das 'griechische' Beharren auf absoluter arithmetischer Strenge die irrationalen Größen für Jahrhunderte aus der Theorie der Zahlen ausgeschlossen hatte, waren die Mathematiker des 17. Jahrhunderts endlich doch bereit gewesen, die Irrationalzahlen, die nur geometrisch interpretiert werden konnten, in arithmetischen Kontexten zuzulassen. Die 'symbolische Algebra' von Vieta (1540 - 1603) und die 'analytische Geometrie' von Descartes (1596 - 1650) förderten die Entwicklung von formalen Techniken, die mehr auf die Methoden der Berechnung als auf die logische Strenge bedacht waren. Kurven wurden algebraisch dargestellt, geometrische und infinitesimale Techniken wurden benutzt, um Probleme der Flächen- und Volumenmessung zu behandeln. Untersuchungen von Kepler (1571 - 1630), Cavalieri (1598 - 1647) u. a. kann man Vorläufer einer Integralrechnung verstehen.

Im 18. Jahrhundert, nach Erfindung des Calculus, verstand man die Integration dann aber in erster Linie als die Umkehrung der Ableitung; eine Funktion $f(x)$ wurde integriert, indem man eine Stammfunktion fand, d. h. eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$. Das Integral über ein Intervall $[a, b]$ gewann man, (nach einem zunächst nur heuristisch verstandenem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) als den Zuwachs der Stammfunktion $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Die Integration als Grenzfall der Summation ebenso wie das Integral als die Fläche unter einer Kurve traten in den Hintergrund; solche Bestimmungen galten eher als eine Näherungsmethode für den Fall, dass es unbequem oder unmöglich erschien, die Stammfunktion zu finden. Es wirkte sich aus, dass weder Limiten von Summen noch Flächen unter Kurven ausreichend verstanden waren, um eine solide Basis für eine logische Behandlung zu bieten.

Gauß schätzte die Integration als eine Methode, interessante spezielle Funktionen zu konstruieren. 1801 schreibt er in einem Brief an Schumacher:

> *Mir ist bei der Integralrechnung immer das weit weniger interessant gewesen, wo es nur auf Substituiren, Transformiren etc. kurz auf einen geschickt zu handhabenden Mechanismus ankommt, um Integrale auf algebraische oder Logarithmische oder Kreisfunktionen zu reduciren, als die genauere tiefere Betrachtung solcher Transcendenten Funktionen, die sich auf solche nicht zurückführen lassen. Mit Kreisfunktionen und Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Funktionen enthält, ist noch fast Terra Incognita. ...*

Es ist übrigens bemerkenswert, dass Gauß in seinem dritten Beweis des Fundamentalsatzes (1816) bereits Kurvenintegrale in der komplexen Ebene benützte; die Geometrie der Kurven gewann immer größere Bedeutung.

Die Auffassung der Integration als Stammfunktionsbildung konnte als adäquat gelten, solange nur die Funktionen zu integrieren waren, die (im Sinne von Euler) durch einen expliziten analytischen Ausdruck gegeben waren.

Cauchy war der erste, der es für notwendig hielt, die Existenz von Integralen und Stammfunktionen zu zeigen, bevor man sich mit deren diversen Eigenschaften befasste. Er leistete die Konstruktion (durch die Einschliessung mit 'Ober- und Untersummen') für die gleichmäßig stetigen Funktionen auf einem endlichen Intervall. (Er war übrigens der Meinung, dass alle beschränkten stetigen Funktionen zugelassen sind, stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind, kamen ihm nicht in den Sinn.)

Etwas später fanden auch (mäßig) unstetige Funktionen allgemeine Beachtung, insbesondere durch die Arbeit von Riemann (1826 - 1866) über die Konvergenz von Fourierreihen. P. G. L. Dirichlet (1805 -1859), sein Vorgänger auf dem Lehrstuhl von Gauß in Göttingen hatte 1829 gezeigt, dass die Fourierreihe zu einer 'integrablen' stückweise stetigen 2π-periodischen Funktion $f(t)$, welche nur endlich viele Maxima und Minima besitzt, in jedem Punkt t_0, in welchem der rechtseitige und der linksseitige Limes existieren, gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}\big(f(t_0+0)+f(t_0-0)\big)$ konvergiert. Hier setzte Riemann 1854 an. Er verallgemeinerte die Konstruktion des Integrals von Cauchy auf die Klasse von Funktionen, die wir heute die Riemann-integrablen Funktionen nennen, was er damit begründete, dass

> *... die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt [ist]; sie ist jetzt auch in einem Gebiete der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Funktionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe Dirichlet nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.*

Die Frage der Darstellbarkeit einer periodischen Funktion durch eine trigonometrische Reihe hat längere Tradition. Im Jahre 1747 publizierte d'Alembert seine Theorie der schwingenden Saite. (Man sagt, dass ihn diese Arbeit zusammen mit Euler und Daniel Bernoulli zum Begründer der Theorie der partiellen Differentialgleichungen werden ließ.) Während d'Alembert und Euler die Gleichung $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, d. h. die Gleichung für die Auslenkung $u(t,x)$ zur Zeit t in der Position x, mit dem Ansatz $u(t, x) = f(x - ct) + g(x - ct)$ lösten, verwendete D. Bernoulli (für die in 0 und π eingespannte Saite) trigonometrische Reihen $u(t, x) = \sum_1^\infty a_n \cdot \sin nx \cdot \cos nct$. Es erhoben sich Zweifel an der Zulässigkeit einer solchen Lösung; d'Alembert meinte, dass die anfängliche Gestalt der Saite $u(0, x) = f(x) + g(x)$ nur durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck gegeben sein dürfte, während Euler der Meinung war, dass man ein 'beliebige' stetige Kurve zulassen könnte. Euler, d'Alembert und später auch Lagrange verwarfen die Meinung von Bernoulli, dass seine Lösung allgemeingültig sei. Bernoulli liess sich nicht beirren durch die Vermutung, dass die durch die Reihe dargestellte Funktion möglicherweise zu starke analytische Eigenschaften besitze; er meinte, dass unendlich viele Koeffizienten sehr wohl ausreichten, um ein 'willkürliche Funktion' darzustellen. Eine gründliche Behandlung der hier aufgeworfenen Fragen leistete J. Fourier (1768 - 1830) in seiner Theorie der Wärmeleitung „Analytische Theorie der Wärme“ (1822) auf der Grundlage der Gleichung $\Delta u = k \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$. Fourier stellte schon 1807 klar, dass eine 'willkürliche 2π-periodische Funktion' $f(x)$, d. h. bei ihm eine Funktion, die sich im Intervall $(-\pi, \pi)$ durch Aneinanderreihung von stetigen Kurvenstücken ergibt, darstellen lässt durch eine trigonometrische Reihe der Form $\frac{a_0}{2} + \sum \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$. – Er stiess damit übrigens auf scharfen Widerstand von Lagrange.

Riemann setzte nun 1854 an der Formel für die Fourierkoeffizienten zur 2π-perodischen Funktion $f(x)$ an:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx.$$

Er erklärte, dass man diese Koeffizienten für 'jede' integrable Funktion ausrechnen und dann die daraus gebildete trigonometrische Reihe untersuchen kann. Viele große Mathematiker haben Beiträge zur Konvergenz dieser 'formalen Fourierreihen' geleistet; und es war nicht zuletzt das Studium der 'Ausnahmemengen', in welchen die 'formale Fourierreihe' nicht konvergiert, die G. Cantor zu seiner abstrakten Mengenlehre anregte. Dabei hat sich der Integralbegriff von Riemann als ungeeignet erwiesen.

Arbeiten von F. Riesz und E. Fischer aus dem Jahr 1906 haben gezeigt, dass die Maß- und Integrationstheorie von Lebesgue aus dem Jahr 1901 in Verbindung mit dem Begriff der Konvergenz im quadratischen Mittel wirklich befriedigende Antworten erlaubt. Dabei hat sich herausgestellt, dass die zu einer Theorie der trigonometrischen Reihen passenden 'willkürlichen Funktionen' gar keine Funktionen sind, sondern korrekterweise als Äquivalenzklassen von Funktionen verstanden werden müssen. Diese Äquivenzklassen repräsentieren die Elemente der Vervollständigung des (oben immer wieder studierten) normierten Vektorraums $\big(V, \|\cdot\|_2\big)$ der trigonometrischen Polynome.

Noch ein didaktischer Rückblick

Kehren wir nochmals zurück zu der vor 200 Jahren heiss diskutierten Frage nach dem Wesen einer stetigen Funktion einer Veränderlicher. Aufgrund des oben Bewiesenen könnte man die Frage folgendermaßen beantworten:

Eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall ist ein Element der Vervollständigung des Raums der Polynome bzgl. der Supremumsnorm.

Man darf annehmen, dass Bolzano und Cauchy tatsächlich die hiermit erfassten mathematischen Objekte vor Augen hatten, als sie die Neubegründung der Theorie der Funktionen in Angriff nahmen. Die obige Antwort stand ihnen aber nicht zur Verfügung. Sie hatten nicht den Begriff der Vervollständigung, nicht für $\mathbb{R}$, und schon gar nicht für eine Funktionenmenge (bzgl. einer Metrik oder einer Norm).

Unsere Antwort hätte im frühen 19. Jahrhundert auch aus anderen Gründen nicht befriedigt. Es ging den Autoren damals nämlich nicht wirklich um eine interne Charakterisierung des *Funktionenraums aller stetigen Funktionen.* Man wollte etwas anderes; man erhoffte von der Definition der Stetigkeit eine umfassende Auskunft, welche Operationen man mit den durch die Stetigkeit ausgezeichneten Funktionen durchführen kann. Und da kommt man, wie man im 20. Jahrhundert herausfand, nicht weit mit dem Stetigkeitbegriff allein. Für die Operationen der alten Analysis braucht man Annahmen über die Funktionen, die weit über die Stetigkeit hinausgehen: komplexe Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit, Absolutstetigkeit usw.

Nach unserer Auffassung kann man weitergehende Eigenschaften dieser Art erst dann in der gewünschten Allgemeinheit rigoros behandeln, wenn man sich auf ein solides Verständnis der topologischen Grundbegriffe stützen kann. Man sollte nicht nur vertraut sein mit der Thematik der (lokalen) Kompaktheit; man sollte auch vorbereitet sein auf Begriffe wie den eines vollständigen Funktionenraums und den eines Raums von Äquivalenzklassen von Funktionen. Wir werden das in den Veranstaltungen Analysis II und III explizieren.

Index