MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I

Prof. Dr. H. Dinges WS 2001/02

Teil V. Konvergenz und Stetigkeit

Themenübersicht

25. Vorlesung : Cauchy-Folgen, Vollständigkeit
Konvergente Folgen in einem metrischen Raum, Cauchy-Folgen. Äquivalente Cauchy-Folgen. Vervollständigung eines metrischen Raums. Hinweise auf die Theorie der Irrationalzahlen bei Dedekind und Cantor. Beispiele vervollständigter Räume: $\ell^p(\mathbb{Z}), L^p\Big((0,2\pi),dt\Big)$. Die Isometrie $L^2\Big((0,2\pi),dt\Big) \leftrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$.
(Produkträume und Äquivalenzrelationen werden im Anhang diskutiert.)

26. Vorlesung : Konvergente Reihen
Unbedingt konvergente Reihen in einem Banachraum. Folgen von Partialsummen. Hinweise auf bedingt konvergente Reihen. Absolut konvergente Reihen. Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen. Zur Geschichte der Potenzreihen. Der Kalkül der formalen Potenzreihen.

27. Vorlesung : Offene und abgeschlossene Mengen
Abgeschlossene Hülle und offener Kern. Separabilität und abzählbare Basis. (Abzählbarkeit im Anhang.) Vollständige Teilmengen sind abgeschlossen.

28. Vorlesung : Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz
Stetige und gleichmäßig stetige Abbildung eines metrischen Raums in einen vollständigen metrischen Raum. Lipschitz-stetige Abbildungen. Lineare Abbildungen eines normierten Vektorraums in einen vollständigen Vektorraum. Operatornorm. Fortsetzung einer gleichmäßig stetigen Abbildung.
Die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Raum der stetigen Abbildungen. Vollständigkeit von $\Big(C(D,E),\|\cdot,\cdot\|_\infty\Big)$. Die gleichmäßige Konvergenz beschränkter linearer Operatoren. Die Banachalgebra $B(V,V)$ der beschränkten linearen Abbildungen eines Banachraums in sich.

29. Vorlesung : Kompaktheit, Funktionen auf kompakten Mengen
Folgenkompakte Teilmengen eines metrischen Raums sind vollständig und totalbeschränkt. Umkehrung: Der verallgemeinerte Satz von Bolzano-Weierstraß. Stetige Funktionen auf einem, kompakten Raum sind gleichmäßig stetig. Stetige Funktionen auf einem kompakten Raum nehmen ihr Maximum an. Der Satz von Dini. Der Satz von Heine-Borel und seine Umkehrung.

Historische Anmerkungen

Teil V. Konvergenz und Stetigkeit

25. Vorlesung : Cauchy-Folgen, Vollständigkeit

$\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ sei ein metrischer Raum.

Definition

$(x_n)_n$ sei eine Folge in S („S-Folge“)

a) Man sagt, $(x_n)_n$ **konvergiert** gegen den Punkt $\tilde{x} \in S$ und notiert $x_n \to \tilde{x}$ oder $\lim x_n = \tilde{x}$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \; \forall n \geq N \quad d\left(x_n, \tilde{x}\right) < \varepsilon \; .$$

b) Man sagt, $(x_n)_n$ sei eine **Cauchy-Folge** in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \; \forall m, n \geq N \quad d\left(x_m, x_n\right) < \varepsilon \; .$$

Offenbar ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. In manchen metrischen Räumen gibt es aber Cauchy-Folgen, die nicht gegen einen Punkt $\tilde{x} \in S$ konvergieren.

Definition

Man sagt von einem metrischen Raum, dass er **vollständig** ist $\big($bzgl. der Metrik $d(\cdot)\big)$, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen (mit dem üblichen Abstand) ist nicht vollständig. $\mathbb{R}$ dagegen ist vollständig. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist in der Tat die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ in dem Sinn, den wir unten erörtern.

Hinweise

1) Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist ein grundlegendes Resultat der Theorie der Irrationalzahlen, die von R. Dedekind (1831 - 1916) und G. Cantor (1845 - 1918) entwickelt wurde. Es waren neue, damals sehr umstrittenen mathematische Konstruktionsprinzipien nötig, um ausgehend von den rationalen Zahlen die reellen Zahlen zu konstruieren.
   Die von der Schule her bekannten Methoden der Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ funktionieren nicht bei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
   (Die Erweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist wieder einfach, wie wir gesehen haben.)

2) Dedekinds Konstruktion gründet sich auf die vollständige Anordnung von $\mathbb{Q}$ (und $\mathbb{R}$) („Dedekind’sche Schnitte“). Über die Anordnung der reellen Zahlen („monotone Konvergenz“, „Supremumsbildung“ u. dgl.) werden wir später ausführlich reden. Hier wollen wir die Idee der Vervollständigung lieber im Rahmen der allgemeineren Theorie der metrischen Räume skizzieren.

3) Man kann sagen, dass die Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen am Anfang von Cantors revolutionärer Idee stand, völlig neutrale, eigenschaftslose Elemente und Ansammlungen von solchen zum Gegenstand einer mathematischen Theorie zu machen. Bei den heutigen Studierenden geht man davon aus, dass sie mit dieser (gewissermaßen philosophischen) Idee keine Schwierigkeiten haben. Dementsprechend wollen wir die auf Cantor zurückgehende naive Mengenlehre im Anhang als eine bequeme Sprech- und Bezeichnungsweise präsentieren. Für den gegenwärtigen Abschnitt sind die (unendlichen) Produkträume und der Begriff der Äquivalenzrelation relevant.

Definition (Äquivalenz von Cauchy-Folgen)
Zwei Cauchy-Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ heißen äquivalent, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n, m \geq N \quad d(x_m, y_n) > \varepsilon \ .$$

Die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen betrachtet man als Menge im Sinne von Cantor. Sie ist die Vervollständigung des metrischen Raums $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$
Ohne Beweis formulieren wir das

Theorem (Vervollständigung)
Jeder metrische Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ lässt sich in eindeutiger Weise vervollständigen.

Genauer :
Es existiert ein vollständiger metrischer Raum $\big(\bar{S}, \bar{d}(\cdot,\cdot)\big)$ mit $S \subseteq \bar{S}$, sodass gilt

(i) Für S-Cauchy-Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ und ihre Grenzwerte in $\bar{S}$ gilt

$$x_n \to \bar{x}\,, \quad y_n \to \bar{y} \Longrightarrow d(x_n, y_n) \to \bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$$

(„$\bar{d}(\cdot,\cdot)$ setzt $d(\cdot,\cdot)$ auf $\bar{S} \times \bar{S}$ fort“).

(ii) Jedes $\bar{x} \in \bar{S}$ kann als Limes einer S-Folge gewonnen werden.
(„S liegt dicht in $\bar{S}$“).

(iii) Jede $\bar{S}$-Folge, die Cauchy-Folge ist, konvergiert gegen ein Element aus $\bar{S}$ $\Big($„$\big(\bar{S}, \bar{d}(\cdot,\cdot)\big)$ ist vollständig “$\Big)$.

Der metrische Raum $\big(\bar{S}, \bar{d}(\cdot,\cdot)\big)$ ist durch diese Eigenschaften eindeutig definiert.

Bemerkung
Das Vervollständigungstheorem lässt offen, wie man im Einzelfall die Elemente $\bar{x}$ der Vervollständigung präsentieren will. Die Irrationalzahlen (das sind die Elemente von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) kann man z.B. durch unendliche (nicht schließlich periodische) Dezimalbrüche (oder Dualbrüche) darstellen. Man kann sie aber auch als Dedekind'sche Schnitte präsentieren oder durch ihre Kettenbruchentwicklungen. Es gibt viele Möglichkeiten.

Auf die Frage *„Was ist eine reelle Zahl?“* antwortet der mathematisch Gebildete unserer Tage entweder mit einem $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ charakterisierenden Axiomensystem oder aber so :

Definition :

Eine reelle Zahl ist ein Punkt in der Vervollständigung im $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Wer auf der Grundlage dieser Definition Rechnungen und Abschätzungen durchführen will, der muss nun aber erklären, inwiefern der vervollständigte Raum ein vollständiger total geordneter Körper ist. (Zu den Begriffen partielle Ordnung und totale Ordnung siehe Anhang.)

Die Struktur von $\mathbb{R}$

Der Vervollständigungsprozess benötigt, wie wir gesehen haben, allein die metrische Struktur. $\mathbb{Q}$ ist nun aber auch ein total geordneter Körper. Diese Strukturen lassen sich auf die Vervollständigung $\mathbb{R}$ fortsetzen. Wenn man rationale Cauchy-Folgen addiert oder multipliziert, erhält man Cauchy-Folgen. Wenn man zu äquivalenten Cauchy-Folgen übergeht, erhält man eine äquivalente Cauchy-Folge. Addition und Multiplikation ist somit in $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Ebenso leicht sieht man, dass es zu jeder Cauchy-Folge, die nicht Nullfolge ist, eine multiplikative Inverse gibt. Schießlich ist leicht zu beweisen, dass für zwei Cauchy-Folgen (a_n) und (b_n), die nicht äquivalent sind, entweder schließlich $a_n < b_n$ oder schließlich $a_n > b_n$ gilt. Damit ist gezeigt, dass sich die vollständige Anordnung von $\mathbb{Q}$ zu einer vollständigen Anordnung von $\mathbb{R}$ fortsetzt.

Ähnliche einfache Schlüsse liefern den

Satz :

Wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, dann ist die Vervollständigung $(\bar{V}, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum.

Es kann nicht zu Mißverständnissen führen, wenn man Norm und Addition in $\bar{V}$ mit denselben Symbolen bezeichnet wie Norm und Addition in V. Es gilt

$$v_n \to \bar{v} \text{ in } \bar{V} \Leftrightarrow \|v_n - \bar{v}\| \to 0$$
$$v_n \to \bar{v},\ w_n \to \bar{w} \text{ in } \bar{V}, \quad \alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta \Rightarrow \alpha_n v_n + \beta_n w_n \to \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}\ .$$

Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum, welcher vollständig ist. Aus jedem normierten Vektorraum erhält man also durch die Vervollständigung einen Banachraum.

Wenn die Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt, dann liefert die Vervollständigung einen Hilbertraum, d.h. einen vollständigen normierten Vektorraum, dessen Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt.

Beispiele für vervollständigte Räume

1) Sei X der Vektorraum aller finiten Folgen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. (Die Elemente $c \in X$ könnte man auch als komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{Z}$ bezeichnen, welche an nur endlich vielen Stellen $\neq 0$ sind.)
   Für jedes $p \geq 1$ haben wir eine Norm auf X
   $$\|c\|_p := \left(\sum |c_k|^p\right)^{1/p}\ .$$
   Wenn man X bzgl. der p-Norm vervollständigt, dann erhält man einen Banachraum, den man üblicherweise mit $\ell^p(\mathbb{Z})$ bezeichnet.

Das Schöne an diesen Räumen ist, dass man sie als Folgenräume verstehen kann. Die Elemente entsprechen in eineindeutiger Weise den p-summablen Folgen; das sind diejenigen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ für welche $\sum |c_k|^p$ endlich ist. Die Konvergenz lässt sich in dieser Darstellung sehr einfach beschreiben. Es gilt

Satz

$$c^{(n)} \longrightarrow \bar{c} \text{ in } \ell^p(\mathbb{Z}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_k |c_k^n - \bar{c}_k|^p \longrightarrow 0.$$

Die Bedingung $\forall k \ : c_k^{(n)} \longrightarrow \bar{c}_k$ ist wohl notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz in $\ell^p(\mathbb{Z})$. Die punktweise Konvergenz (gegen eine p-summable Folge) ist nicht hinreichend für die Konvergenz in der p-Norm.

2) Sei X der Vektorraum der trigonometrischen Polynome. Für jedes $p \geq 1$ können wir eine Norm auf X definieren.

$$\|f\|_p \ := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(t)\big|^p dt\Big)^{1/p} \ .$$

Die Minkowski-Ungleichung in integraler Form garantiert

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{für alle } f, g \in X \ .$$

Wenn man X bzgl. dieser Norm vervollständigt, dann erhält man einen Banachraum, den man üblicherweise mit $L^p\Big((0,2\pi), dt\Big)$ bezeichnet. Seine Elemente kann man als Äquivalenzklassen von 2π-periodischen borelmeßbaren Funktionen verstehen, deren p-te Potenz (über die Periode) integrabel ist. Die Äquivalenz ist die Gleichheit bis auf eine Lebesgue-Nullmenge. Über Nullmengen, fastsichere Gleichheit und Integrale werden wir später mehr zu sagen haben.

3) Besonders wichtig und interessant ist der Fall $p = 2$. Die 2-Norm der Elemente von X

$$f(t) = \sum c_k \cdot e^{ikt}$$

kann man nämlich bekanntlich sowohl als Summe als auch als Integral gewinnen:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2}\int \big|f(t)\big|^2 dt = \sum |c_k|^2 \ .$$

Die Elemente der Vervollständigung kann man einerseits durch die quadratsummablen Folgen beschreiben, andererseits durch Äquivalenzklassen 2π-periodischer borelmeßbarer Funktionen, deren Absolutquadrat integrabel ist.
Wenn $c(t)$ eine solche Funktion ist und $(c_k)_k$ die entsprechende quadratsummable Folge, dann notiert man

$$c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ikt} \ \ (\text{im } L^2\text{-Sinn}) \ .$$

Für die Euler'sche Sägezahnfunktion haben wir z.B.

$$E(t) = 2 \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \;\; \text{sinkt} \;\; = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik} e^{ikt} \;\; (\text{im } L^2\text{-Sinn}) \; .$$

Ergänzung :

Der Weg von $c(\cdot)$ zu den c_k ist einfach. Es gilt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} c(t) e^{-ikt} dt \;\; \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \; .$$

Es handelt sich um gewöhnliches Lebesgue'sches Integral. (Das ist insofern bemerkenswert, als in der analogen Theorie der Fourier-Integrale für eine quadratintegrable Funktion $g(t)$ über $(-\infty, +\infty)$ das entsprechende Integral

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

nicht notwendigerweise im gewöhnlichen Sinne existiert.)
Der Weg von einer quadratsummablen Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ zur entsprechenden Funktion $c(t) \in L^2\Big((0, 2\pi) dt\Big)$ ist subtiler. Der Beweis, dass zu jeder quadratsummierbaren Folge ein Element $c(\cdot) \in L^2\Big((0, 2\pi), dt\Big)$ existiert mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int c(t) e^{-ikt} dt \;\; \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \; ,$$

wurde 1907 von F. Riesz und E. Fischer geführt. Der Beweis benützte sehr wesentlich die Integrationstheorie, die H. Lebesgue in seiner Dissertation 1902 entwickelt hatte. Es blieb dann über Jahrzehnte eine offene Frage, ob die Folge der approximierenden Fourier-Polynome

$$s_N(t) = \sum_{-N}^{+N} c_k e^{ikt}$$

für Lebesgue- fast alle $t \in \mathbb{R}/2\pi$ konverviert. Der Beweis wurde schließlich 1966 von L. Carleson geführt (und mit der Fields-Medaille honoriert).

26. Vorlesung : Konvergente Reihen

In(vollständigen) normierten Vektorräumen hat man einen besonders wichtigen Typ von Cauchy-Folgen. Dies sind die Partialsummen von (unbedingt) summablen Reihen. Man nennt die unbedingt summablen Reihen auch Summen mit unendlich vielen Summanden.

Sprechweise (Reihen oder unendliche Summen)
Eine Reihe ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum_{j\in J} v_j$ wo $\{v_j \ : j \in J\}$ eine abzählbare Familie von Elementen eines normierten Vektorraums ist. Die v_j nennt man die Summanden der Reihe. Unter gewissen Umständen kann man der Reihe einen Wert zuordnen. Wenn das möglich ist, dann ist der Wert ein $\bar{v}$ in der Vervollständigung und man notiert $\sum_{j\in J} v_j = \bar{v}$.

Beispiel :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \ \text{ in } (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Definition

a) Man sagt von einer Reihe $\sum_{j\in J} v_j$, sie sei unbedingt summabel, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists J_\varepsilon \ \text{ endlich } \ \forall J' \subseteq J \backslash J_\varepsilon \quad \| \sum_{j\in J'} v_j \| < \varepsilon \ .$$

b) Man sagt, die unbedingt summable Reihe hat den Wert $\bar{v}$ und notiert $\sum_{j\in J} v_j = \bar{v}$. wenn außerdem gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists J_\varepsilon \ \text{ endlich } \ \forall J'' \supseteq J_\varepsilon \quad \| \bar{v} - \sum_{j\in J''} v_j \| < \varepsilon$$

(J' und J'' wie J_ε sind endliche Mengen).

Satz (Folgen von Partialsummen)
Wenn $\sum v_j$ unbedingt summabel ist, dann konvergiert die Folge der Partialsummen für jede Aufzählung $J \longleftrightarrow \mathbb{N}$.

Beweis :

1) Unter einer Aufzählung der Elemente einer abzählbaren Menge J verstehen wir eine bijektive Abbildung

$$\varphi(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow J \ .$$

Wenn eine Aufzählung gegeben ist, dann notiert man

$$J = \{j_1, j_2, \ldots\} \ , \ \ J_n = \{j_1, \ldots, j_n\} = \big\{ j \ : \varphi(j) \leq n \big\} \ .$$

2) Die Folge der Partialsummen ist die Folge der Vektoren $s_n = \sum\limits_{\varphi(j)\leq n} v_j$.

3) Wenn die Begriffe solchermaßen klargestellt sind, dann ist die Gültigkeit des Satzes offensichtlich. Bei einer unbedingt summablen Reihe kommt es für jede Genauigkeitstoleranz $\varepsilon > 0$ nur auf endlich viele Summanden an. Aus dem Vorrat der restlichen Summanden kann man nur Summen mit Norm $< \varepsilon$ gewinnen.

Beispiel : L^2-summable trigonometrische Reihen

Wir haben gesehen: Wenn man den Vektorraum X der trigonometrischen Polynome bzgl. der 2-Norm vervollständigt, dann kommt man zu einem Hilbertraum $\bar{X}$, dessen Elemente man in natürlicher Weise einerseits durch quadratsummable Folgen beschreiben kann und andererseits durch quadratisch integrierbare 2π-periodische Funktionen. Wenn die Funktion $c(\cdot)$ und die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dasselbe Element unseres Hilbertraums darstellen, schreibt man

$$c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{im Sinne der 2-Norm} .$$

Satz :

Wenn (c_k) eine quadratsummable Folge ist, dann ist $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ eine unbedingt summable Reihe in $(\bar{X}, \|\cdot\|_2)$.

Beweis :

Für jede endliche Teilmenge J' von $\mathbb{Z}\backslash\{-N, \ldots, +N\}$ gilt

$$\|\sum_{k\in J'} c_k e^{ikt}\|^2 \leq \sum_{|k|\geq N} |c_k|^2$$

und die rechte Seite ist kleiner als ε, wenn N genügend groß ist.

Hinweis

Meister wie L. Euler (1707 - 1783) haben virtuos mit unendlichen Summen gerechnet; die Intuition half ihnen über Fragen der Konvergenz hinweg. Mit der Grundlegung durch Cauchy (1789 - 1857) setzte sich die Meinung durch, dass man nichtsummablen Reihen keinen Wert zubilligen sollte. Man entwickelte allerdings allerlei „Summierungsverfahren“, um aus schlechten Reihen solche zu machen, denen man einen Wert zuordnen kann. In den Lehrbüchern setzte sich die Meinung durch, dass die Summanden in einer vorgegebenen Reihenfolge zu berücksichtigen seien und dass die Reihe einen Wert hat, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert; man sprach von bedingt konvergenten Reihen, wenn die Umordnung Probleme bereitete, und von unbedingt konvergenten Reihen, wenn jede Wahl der Aufzählung zum Erfolg führt (Stichwort „Umordnungssatz“). Wir wollen uns dieser Ausdehnung des Begriffs der konvergenten Reihe nicht anschließen. Es paßt z.B. nicht in unser System, wenn geschrieben wird

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \ln 2 .$$

Die Reihe mit den Summanden $\frac{(-1)^n}{n}$ ist nämlich nicht unbedingt summabel. Das ergibt sich aus der Divergenz der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n \ .$$

Für die alternierende harmonische Reihe konvergiert die Folge der Partialsummen, weil die Summanden (deren Betrag monoton fällt) ständig das Vorzeichen wechseln („Leibniz-Kriterium“).

Bemerke : Das folgende Kriterium für die unbedingte Konvergenz einer Reihe nennt man manchmal die „absolute Konvergenz“:

$$\sum_{j \in J} v_j \quad \text{heißt absolut konvergent, wenn} \quad \sum \|v_j\| < \infty \ .$$

Man kann zeigen, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum die unbedingte Konvergenz die absolute Konvergenz nach sich zieht. In unendlichdimensionalen Vektorräumen ist jedoch die absolute Konvergenz i.Allg. ein allzu grobes Kriterium für die unbedingte Konvergenz.

Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen

Die Theorie der trigonometrischen Reihen war ursprünglich keine Theorie unbedingt summabler Reihen in einem Hilbertraum. Der Begriff der Norm stammt erst aus dem 20. Jahrhundert. (Heuser führt in seine *„Funktionalanalysis“* aus, dass der Begriff des normierten Raums zwar seit 1918 in der Luft lag, aber erst 1920 von Banach explizit gemacht wurde.)
Schon 150 Jahre früher interessierten sich die Mathematiker und die Physiker für die trigonometrische Reihen (z.B. im Zusammenhang mit dem Problem der schwingenden Saite.) Euler hatte zu dieser Zeit auch schon festgestellt, dass man auch manche unstetige Funktionen durch trigonometrische Reihen gewinnen kann. Beispielsweise liefert die unendliche Summe

$$2 \cdot \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \ldots \right)$$

für jedes feste t den Wert $E(t)$ der Sägezahnfunktion. Dirichlet (1805 - 1859), der Nachfolge von Gauß in Göttingen, hat dann Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fourier-Reihe untersucht. Eine dieser Bedingungen forderte, dass die Funktion „integrabel“ sein muss. B. Riemann (1826 - 1866), der Nachfolger von Dirichlet in Göttingen, analysierte in einer seiner beiden Habilitationsschriften, was das genauer bedeuten sollte. Cauchy und Dirichlet hatten zur Frage der Integrierbarkeit schon gewisse Antworten gegeben; Riemann ersetzte sie duch eine umfassendere Antwort. Er gab jene Definition, die wir heute als „Riemann'sches Integral“ kennen und das erst im zwanzigsten Jahrhundert durch das Lebesgue'sche Integral abgelöst wurde. Durch die Arbeiten von Riemann wurde jedenfalls klar, dass der Begriff der integrablen Funktion neu gefasst werden musste.

Die Konvergenz von Fourier-Reihen

Sei $f(\cdot)$ eine 2π-periodische Funktion, für welche die bestimmten Integrale

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-ikt} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

wohl definiert sind. Man definiert dann die „formale Fourier-Reihe“

$$\sum c_k e^{ikt}$$

und man kann fragen, in welchem Sinne die Folge der Partialsummen

$$s_N(t) \;:= \sum_{-N}^{+N} c_k e^{ikt} \quad \text{konvergiert.}$$

Zur Erinnerung : Wir haben früher gesagt, dass man $s_N(t)$ für gewisse $f(t)$ durch Faltung mit dem Dirichletkern erhält. Entsprechend erhält man die Cesaro-Mittel der approximierenden Fourier-Polynome.

$$c_N(t) = \frac{1}{N} \cdot \big(s_0(t) + \ldots + s_{N-1}(t)\big)$$

durch die Faltung mit dem N-ten Fejér-Kern. Wir haben gesehen, dass die Faltung mit dem Fejér-Kern eine Regularisierung ist und so wundern wir uns nicht, dass aus schönen Funktionen wie z.B. die stückweise stetigen Funktionen punktweise konvergente Funktionenfolgen entstehen.

A.N. Kolmogorov gab 1926 ein Beispiel einer integrablen 2π-periodischen Funktion an, deren formale Fourier-Reihe an jeder Stelle divergiert.

Es war über viele Jahrzehnte eine offene Frage, ob ein derartig pathologisches Verhalten auch bei quadratisch integrablen Funktionen auftreten kann.

L. Carleson bewies, wie schon erwähnt, dass das nicht passieren kann.

Satz (Carleson, 1966)

Für jede p-integrabe Funktion $f(\cdot)$ (mit $p > 1$) konvergiert die Folge der Partialsummen der formalen Fourier-Reihe fast überall (im Sinne des Lebesgue-Maßes).

Ebenso interessant wie die Geschichte der Fourier-Reihen ist die

Geschichte der Potenzreihen

Potenzreihen kommen wohl zum ersten Mal bei Brook Taylor in dessen Werk *„Methodus incrementorum“* (1715) vor. Taylor wendete sie zur Integration einiger Differentialgleichungen an. (Taylor begann übrigens auch das Studium der schwingenden Saite.) Die Herleitung von Taylor schloß keine Konvergenzbetrachtungen ein, aber MacLaurin, ein Schüler Newtons, machte den Anfang mit solchen Betrachtungen. Euler nahm sie in seiner Differentialrechnung (1755) auf. Lagrange (1736 - 1813) verwendete die Taylor'schen Reihen dann als grundlegendes Hilfsmittel in seiner Funktionentheorie. Obwohl sich die „algebraische“

Methode, mit welcher Lagrange die Infinitesimalrechung begründete, als unbefriedigend herausstellte und obwohl Lagrange die Konvergenz der Reihe nur ungenügend beachtete, bedeutete die abstrakte Behandlung einer Funktion in der Gestalt ihrer Taylor-Reihe einen beträchtlichen Schritt vorwärts.

Wenn wir heute mit Potenzreihen operieren ohne uns um Konvergenz zu kümmern, sprechen wir vom

Kalkül der formalen Potenzreihen

Eine formale Potenzreihe ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\sum_0^\infty a_n \cdot z^n \ .$$

Der Kalkül der formalen Potenzreihen beschäftigt sich mit gewissen Manipulationen im Raum der Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

a) Die Menge aller formalen Potenzreihen ist ein Vektorraum, man kann formale Potenzreihen aber auch multiplizieren. Man hat somit eine Algebra, in welcher die Algebra der Polynome (in der unbestimmten z) als Teilalgebra enthalten ist.

b) In der Algebra der formalen Potenzreihen gibt es (anders als in der Algebra der Polynome) zu vielen Elementen eine multiplikative Inverse („Reziproke Potenzreihe“). Es gilt der

Satz :

Wenn in $\sum a_n z^n$ der Koeffizient a_0 nicht verschwindet, dann gibt es $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, sodass

$$\sum a_n z^n \cdot \sum b_n \cdot z^n = 1 + 0\cdot z + 0\cdot z^2 + \ldots$$

c) Eine andere interessante Operation ist das „Einsetzen“. Beim Einsetzen einer formalen Potenzreihe a in eine andere Potenzreihe b hat man (anders als bei Polynomen) zu beachten, dass die eingesetzte Potenzreihe im Nullpunkt verschwindet ($a_0 = 0$). In diesem Fall ergeben sich die Koeffizienten von

$$b\big(a(z)\big) = b_0 + b_1 \cdot a(z) + b_2 \cdot a^2(z) + \ldots = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

durch finite Operationen. Es sind keinerlei Limiten im Spiel.
Den Kalkül der formalen Potenzreihen wollen wir hier nicht weiter verfolgen. Er spielt seit der Zeit von Cauchy eine eher marginale Rolle in der Analysis. Sein Nutzen für intuitive Überlegungen sollte aber nicht unterschätzt werden.

Konvergente Potenzreihen

Viel größere Bedeutung hat die Theorie der (in einem Kreis) konvergenten Potenzreihen. K. Weierstraß (1815 - 1897) hat die in einem Kreis konvergenten Potenzreihen zur Grundlage der Theorie der holomorphen Funktionen gemacht, und diese Theorie wird heute überall fleißig studiert (allerdings nicht im ersten Semester).

Um den Anschluss an unsere abstrakte Betrachtung über konvergente Reihen herzustellen, begnügen wir uns hier mit einigen Hinweisen :

Hinweise

1) Die konvergenten Potenzreihen $\sum\limits_{0}^{\infty} b_n \cdot (z - z_0)^n$ werden zur lokalen Darstellung von holomorphen Funktionen benützt.

2) Jede in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion läßt sich lokal bei jedem $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwickeln. (Wenn es um die Einschränkung einer holomorphen Funktion auf ein Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ geht, spricht man von der Taylor-Reihe.)

3) Den Vektorraum der in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen wird (nach Weierstraß) mit einer Metrik versehen, welche diesen Raum vollständig macht. Die Metrik (welche keine Norm ist) beschreibt die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakten.

4) Diese Vollständigkeit markiert einen wesentlichen Unterschied zur Theorie der (unendlich oft differenzierbaren) Funktionen auf einem Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

27. Vorlesung : Offene und abgeschlossene Mengen

$\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$ sei ein metrischer Raum.

Bezeichnung
Für $\tilde{x} \in S$ und $r > 0$ nennt man die Menge

$$B(\tilde{x}, r) := \big\{x : d(x, \tilde{x}) < r\big\}$$

die **offene Kugel** mit dem Radius r um den Mittelpunkt $\tilde{x}$.

Vereinigungen offener Kugeln nennt man **offene Mengen**. Man definiert:

Definition

$$\begin{aligned} U \text{ offen} &\iff \forall \tilde{x} \in U\ \exists r > 0\ : B(\tilde{x}, r) \subseteq U \\ &\iff \forall x \in U\ \exists r > 0 \forall y \qquad d(x,y) < r \Rightarrow y \in U\ . \end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgert man leicht, dass die offenen Kugeln tatsächlich offen im Sinne der Definition sind.

Wir interessieren uns für die Gesamtheit $\mathfrak{U}$ aller offenen Mengen. Dieses **Mengensystem** $\mathfrak{U}$ hat die Eigenschaften :

a) $\emptyset$ und S sind offen

b) Sind U und V offen, so ist auch der Durchschnitt $U \cap V$ offen

c) Sei $\big\{U_\alpha : \alpha \in I\big\}$ eine Familie offener Mengen. Dann ist auch die Vereinigung $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ offen.

Man sagt kurz : $\mathfrak{U}$ ist gegenüber Vereinigungsbildung und endlicher Durchschnittsbildung stabil.
Das Mengensystem $\mathfrak{U}$ heißt auch die Topologie des Raums S.
Es gibt offenbar viele Metriken auf S, welche dieselbe Topologie erzeugen. z.B. erzeugen die Metriken $\frac{d(\cdot,\cdot)}{1+d(\cdot,\cdot)}$ und $d(\cdot,\cdot) \wedge 1$ dieselbe Topologie wie die Metrik $d(\cdot,\cdot)$.
Das Komplement einer Menge A bezeichnet man mit $S \backslash A$ oder mit A^c. Man nennt eine Menge F **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist.

Definition
Sei $A \subseteq S$.

a) A° bezeichnet die größte offene Teilmenge.
(A° heißt der **offene Kern** von A)

b) $\bar{A}$ bezeichnet die kleinste abgeschlossene Obermenge.
($\bar{A}$ heißt die **abgeschlossene Hülle** von A)

c) $\partial A := \bar{A} \backslash A^\circ$ heißt der **topologische Rand** von A.

Unser Beweis des folgenden Satzes gibt ein Beispiel für das Rechnen mit Mengenoperationen ohne Bezugnahme auf Punkte. Die Punkte kommen dann im nächsten Satz zur Geltung.

Satz
Für jedes A gilt $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

Beweis :

1) $(A^\circ)^c$ ist abgeschlossen und es gilt $(A^\circ)^c \supseteq A^c$ wegen $A^\circ \subseteq A$.
Da $\overline{A^c}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A^c ist, haben wir

$$\overline{A^c} \subseteq (A^\circ)^c \ .$$

2) $(\overline{A^c})^c \subseteq A$ wegen $\overline{A^c} \supseteq A^c$.
Die offene Menge $(\overline{A^c})^c$ ist also im offenen Kern A° enthalten.

$$(\overline{A^c})^c \subseteq A^\circ, \quad \overline{A^c} \supseteq (A^\circ)^c \ .$$

Definition (Umgebung)
A Umgebung von $x \Longleftrightarrow \ \exists r > 0 \ : B(x,r) \subseteq A$.

Bemerke
Eine Menge A ist Umgebung für jedes x im offenen Kern A°. Betrachten wir diese Aussage aus der Perspektive der Punkte.

Satz

a) $x \in A^\circ \Longleftrightarrow A$ ist Umgebung von x

b) $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall U$ (Umgebung von x) : $\quad U \cap A \neq \emptyset$

c) $x \in \partial A \Longrightarrow \forall U$ (Umgebung von x) : $\quad U \cap A \neq \emptyset$ und $U \cap A^c \neq \emptyset$

Beweis von b) : Wenden wir den obigenSatz auf A° an, so erhalten wir $A^{c\circ c} = \bar{A}$. Es gilt also: $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow x \notin A^{c\circ} \Longleftrightarrow A^c$ nicht Umgebung von x $\Longleftrightarrow$ in jeder Umgebung von x liegt ein Punkt von A.
Die Beweise von a) und c) werden als Übung empfohlen.

Satz
$\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$ sei metrischer Raum. $A \subseteq S$. Zu jedem $\tilde{x} \in \bar{A}$ existiert eine A-Folge, die gegen $\tilde{x}$ konvergiert.

Beweis :
In der $\frac{1}{n}$-Umgebung von $\tilde{x}$ gibt es mindestens einen Punkt $x_n \in A$. Wählen wir zu jedem n ein solches x_n, dann erhalten wir eine Folge, die gegen $\tilde{x}$ konvergiert.

Sprechweisen

a) Man sagt von einer Teilmenge A von $\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$, dass sie (in S) überall dicht liegt, wenn $\bar{A} = S$, wenn es also zu jedem $\tilde{x} \in S$ eine A-Folge gibt, welche gegen $\tilde{x}$ konvergiert.

b) Ein metrischer Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ wird **separabel** genannt, wenn es eine abzählbare überall dichte Teilmenge gibt.

c) Man sagt, die Topologie $\mathfrak{U}$ besitzt eine **abzählbare Basis**, wenn es ein abzählbares Teilsystem $\tilde{\mathfrak{U}} \subseteq \mathfrak{U}$ gibt, sodass man jedes $U \in \mathfrak{U}$ als Vereinigung von Mengen aus $\tilde{\mathfrak{U}}$ gewinnen kann.

Satz

Ein metrischer Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ist genau dann separabel, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis :

1) Sei A eine abzählbare überall dichte Menge. Betrachte zu allen $x_i \in A$ und allen rationalen $r > 0$ die offenen Kugeln $\tilde{U} = B\left(x_i, r\right)$. Dieses abzählbare Mengensystem $\tilde{\mathfrak{U}}$ hat die geforderte Eigenschaft.

2) Sei $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein abzählbares Mengensystem mit den angegebenen Eigenschaften. Wähle aus jedem $\tilde{U}$ einen Punkt. Die Menge A dieser Punkte liegt überall dicht. Um das zu sehen, müssen wir uns vergewissern, dass in jeder Umgebung eines beliebigen Punkts $\tilde{x} \in S$ einen Punkt aus A gibt. Dies ergibt sich trivialerweise aus der „Konstruktion“ von A.

Beispiele

1) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Wir konnten sie aber durch Vervollständigung der abzählbaren Menge $\mathbb{Q}$ gewinnen. $\mathbb{Q}$ liegt dicht $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ ist separabel.

2) Wenn $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ separabel ist, dann ist auch die Vervollständigung $\big(\bar{S}, \bar{d}(\cdot,\cdot)\big)$ separabel. Jede Menge, die in S überall dicht liegt, liegt nämlich auch in $\bar{S}$ überall dicht.

3) Man zeigt leicht, dass der Raum der finiten Folgen bzgl. jeder p-Norm separabel ist. Die Räume $\ell^p(\mathbb{Z})$ sind daher separable Banachräume.

4) Ebenso leicht zeigt man, dass $L^p\Big((0, 2\pi), dt\Big)$ ein separabler Banachraum ist.

Jede Teilmenge A eines metrischen Raums $\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$ ist selbst ein metrischer Raum; denn die Einschränkung der Metrik ist eine Metrik.

Bemerkungen :

1) Eine Teilmenge $B \subseteq A$, die in $\big(A, d(\cdot,\cdot)\big)$ abgeschlossen ist, ist nicht notwendigerweise auch in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ abgeschlossen. Dies ist nur dann garantiert, wenn A selbst in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ abgeschlossen ist.

2) Eine A-Folge ist eine Cauchy-Folge in $\big(A, d(\cdot,\cdot)\big)$ genau dann, wenn sie Cauchy-Folge in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ist. Wenn sie in $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ konvergiert und A abgeschlossen ist, dann konvergiert sie auch in $\big(A, d(\cdot,\cdot)\big)$

Satz
$\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$ sei ein metrischer Raum.

a) Wenn für ein $A \subseteq S$ der metrische Raum $\Big(A, d(\cdot,\cdot)\Big)$ vollständig ist, dann ist A in S abgeschlossen.

b) Wenn $\Big(S, d(\cdot,\cdot)\Big)$ vollständig ist, dann ist jede in S abgeschlossene Teilmenge ebenfalls vollständig.
Der Beweis ist einfach.

Beispiel : Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ in vollständig.

Hinweis : Wir kommen in der übernächsten Vorlesung genauer auf die vollständigen Teilmengen eines metrischen Raums zu sprechen, dort nämlich, wo wir uns mit den kompakten Mengen befassen.

28. Vorlesung : Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten Abbildungen

$$\varphi \, : \big(D, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(E, e(\cdot,\cdot)\big) \ ,$$

wo der Definitionsbereich D ein beliebiger metrischer Raum ist und der Zielbereich E ein vollständiger metrischer Raum.
(Die Vollständigkeit von $\big(E, e(\cdot,\cdot)\big)$ wird nicht überall gebraucht.)

Definition

a) φ stetig in $\tilde{x} \in D \Longleftrightarrow \forall \varepsilon 0 \, \exists \delta > 0 \forall x \ : d\,(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow e\big(\varphi(x), \varphi\,(\tilde{x})\,\big) < \varepsilon$.

b) φ stetig in $D \Rightarrow \forall \tilde{x} \ \ \varphi$ stetig in $\tilde{x}$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall \tilde{x} \in D \ \ \exists \delta > 0 \forall x \ : d\,(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow e\big(\varphi(x), \varphi\,(\tilde{x})\,\big) < \varepsilon$.

Definition

φ gleichmäßig stetig in $D \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ \ \forall \tilde{x}, x \ \ d\,(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow e\big(\varphi(x), \varphi\,(\tilde{x})\,\big) < \varepsilon$.

Definition

φ Lipschitz-stetig in D zum Streckungsparameter $\leq \alpha \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall x, \tilde{x} \ : d\,(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow e\big(\varphi(x), \varphi\,(\tilde{x})\,\big) \leq \alpha \cdot \delta$.

Bemerke : Die Lipschitz-Stetigkeit bedeutet

$$\forall x \neq \tilde{x} \ : \frac{e\big(\varphi(x), \varphi\,(\tilde{x})\,\big)}{d\,(x, \tilde{x})} \leq \alpha \ .$$

Satz :

$\varphi(\cdot)$ ist in $\tilde{x}$ stetig genau dann, wenn gilt

$$\forall \left(x_n\right)_n \ : x_n \longrightarrow \tilde{x} \Longrightarrow \varphi\left(x_n\right) \longrightarrow \varphi\left(\tilde{x}\right) \ .$$

Beweis :

1) Wenn $\varphi(\cdot)$ in $\tilde{x}$ stetig ist, dann gilt die Aussage.

2) $\varphi(\cdot)$ unstetig in $\tilde{x} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \ \exists x \ : d(x, \tilde{x}) < \delta \wedge e\big(\varphi(x), \varphi(\tilde{x})\big) \geq \varepsilon$.
Sei ε^* ein solches ε. Wähle zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein x_n mit der angegebenen Eigenschaft. Die Folge $\left(x_n\right)_n$ konvergiert gegen $\tilde{x}$; die Bildfolge hält Abstand $> \varepsilon^*$ von $\varphi\,(\tilde{x})$.

Didaktischer Hinweis

Die ε-δ-Definition der Stetigkeit (in einem Punkt $\tilde{x}$) heisst in Didaktikerkreisen die statische Definition der Stetigkeit. Die im Satz genannte Definition auf der Grundlage aller (gegen $\tilde{x}$) konvergierenden Folgen nennt man die dynamische Stetigkeitsdefinition. Man behauptet, dass sie für Anfänger leichter fassbar ist. Die auf Bolzano (1817) zurückgehende ε-δ-Definition hat sich aber als wesentlich praktischer erwiesen.

Beispiele

1) Wir werden sehen, dass jede stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ notwendigerweise gleichmäßig stetig ist. Auf beschränkten abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ gibt es aber sehr wohl stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind. Ein Beispiel wäre etwa
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2} \quad \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [-2, +2] \ .$$
$f(\cdot)$ ist in jedem rationalen Punkt stetig.

2) Die Funktion
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \in [0, 1]$$
ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig; der Differenzenquotient
$$\frac{\Big| f(x_2) - f(x_1) \Big|}{|x_2 - x_1|} = \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$$
kann nämlich nicht gleichmäßig durch eine Zahl α abgeschätzt werden.

3) Sei X_0 der Vektorraum der trigonometrischen Funktionen ohne konstanten Term. $|\cdot|$ sei eine der p-Normen
$$\varphi \ : X_0 \longrightarrow X_0$$
sei die Stammfunktionsbildung
$$\varphi \left(\sum c_k e^{ikt} \right) = \sum \frac{1}{ik} c_k e^{ikt} \ .$$
Für jede der Funktionen $e_k(t) = e^{ikt}$ gilt
$$\|e_k\| = 1 \quad \text{und} \quad \|\varphi(e_k)\| = \frac{1}{|k|} \ .$$
$\varphi(\cdot)$ ist eine Lipschitz-stetige Abbildung mit dem Streckungsfaktor 1. Man sagt: $\varphi(\cdot)$ ist eine lineare Kontraktion von X_0 .

4) Die Differentiation auf dem Prähilbertraum $(X_0, \|\cdot\|_2)$
$$\psi \ : \psi \left(\sum c_k e^{ikx} \right) = \sum ikc_k \cdot e^{ikx}$$
ist eine unstetige Abbildung. Dennoch spielt dieser Operator eine wichtige Rolle, insbesondere in der Quantenmechanik. Der Operator
$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \quad \text{heisst der Impulsoperator,}$$
wenn er auf Funktionen im Ortsraum angewendet wird, welche den Zustand eines quantenmechanischen Systems beschreiben. Siehe

Feynman, „*Vorlesungen über Physik*“, Band III, Quantenmechanik, Kapitel 20: Operatoren.

Satz

Sei φ eine lineare Abbildung von einem normierten Vektorraum in einen normierten Vektorraum.

$$\varphi \ : \big(V, \|\cdot\|\big) \longrightarrow \big(W, \|\cdot\|\big) \ .$$

Wenn φ im Nullpunkt stetig ist, dann ist φ Lipschitz-stetig zum Streckungsfaktor

$$\|\varphi\| \ := \sup\big\{\|\varphi(v)\| \ : \|v\| \leq 1\big\} \ .$$

(Dieses Supremum heisst die **Operatornorm**.)

Beweis :

1) Wenn wir die Stetigkeit im Nullpunkt bestätigen wollen, dann brauchen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\sup\big\{\|\varphi(v)\| \ : \|v\| \leq \delta\big\} \leq \varepsilon \ .$$

Das Supremum ist gleich

$$\delta \cdot \sup\left\{\|\varphi\left(\frac{v}{\delta}\right)\| \ : \left\|\frac{v}{\delta}\right\| \leq 1\right\} = \delta \cdot \|\varphi\| \ .$$

2) Wenn die Operatornorm endlich ist, dann gilt für alle $v_2 \neq v_1$

$$\frac{\|\varphi\left(v_2\right) - \varphi\left(v_1\right)\|}{\|v_2 - v_1\|} = \left\|\varphi\left(\frac{v_2 - v_1}{\|v_2 - v_1\|}\right)\right\| \leq \|\varphi\| \ .$$

Man drückt den Sachverhalt so aus:
Eine lineare Abbildung ist genau dann stetig, wenn sie auf der Einheitskugel beschränkt ist.

Satz :

Gleichmäßig stetige Abbildungen von $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ kann man auf die Vervollständigung stetig fortsetzen.

Beweis :

Gleichmäßig stetige Abbildungen bilden Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen ab. Das sieht man so: Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Wenn δ so klein ist, dass gilt

$$d(x', x'') < \delta \Longrightarrow e\big(\varphi(x'), \varphi(x'')\big) < \varepsilon$$

und N so groß ist, dass

$$m, n \geq N \Longrightarrow d\left(x_m, x_n\right) < \delta$$

dann gilt $e\big(\varphi\left(x_m\right), \varphi\left(x_n\right)\big) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Gleichmäßige Konvergenz

$\big(D, d(\cdot,\cdot)\big)$ und $\big(E, e(\cdot,\cdot)\big)$ seien metrische Räume. $e(\cdot,\cdot)$ sei beschränkt. (Wir haben gesehen, dass mit $e(\cdot,\cdot)$ auch $e(\cdot,\cdot)\wedge 1$ eine Metrik ist und dass der Begriff der Cauchy-Folge von dieser Modifikation der Metrik nicht tangiert wird.)

Definition : $\mathcal{C}(D,E)$ bezeichne die Menge aller stetigen Abbildungen

$$\varphi \ : \big(D, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(E, e(\cdot,\cdot)\big) \ .$$

Für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(D,E)$ definieren wir die Distanz

$$\|\varphi,\psi\|_\infty = \sup\Big\{ e\big(\varphi(x),\psi(x)\big) \ : x \in D \Big\} \ .$$

Bezeichnungen :

Die Metrik $\|\cdot,\cdot\|_\infty$ heißt der Supremumsabstand im Raum der stetigen Abbildungen. Wenn eine Folge $(\varphi_n)_n$ bzgl. dieser Metrik konvergiert, dann sagt man, dass sie gleichmäßig konvergiert. $\|\cdot,\cdot\|_\infty$ heißt auch die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Satz :

Wenn der Zielraum $\big(E, e(\cdot,\cdot)\big)$ vollständig ist, dann ist auch $\big(\mathcal{C}(D,E), \|\cdot,\cdot\|_\infty\big)$ vollständig.

Beweis :

Sei $(\varphi_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}(D,E)$.

1) Für jedes $x \in D$ ist $(\varphi_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in E; ihren Limes nennen wir $\tilde\varphi(x)$.

2) Wir zeigen $\sup\Big\{ e\big(\varphi_n(x),\tilde\varphi(x)\big) \ : x \in D \Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
In der Tat existiert zu $\varepsilon > 0$ ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $\forall x \in D \ \ e\big(\varphi_n(x),\varphi_m(x)\big) \leq \varepsilon$ q.e.d.

3) Wir zeigen, dass $\tilde\varphi$ in jedem $\tilde x$ stetig ist.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir N so groß, dass gilt

$$\|\varphi_N,\tilde\varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ d.h. } \ \forall x \ : e\big(\varphi_N(x),\tilde\varphi(x)\big) \leq \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\forall x \in D \ \ d\,(x,\tilde x) < \delta \Longrightarrow e\big(\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(\tilde x)\big) \leq \varepsilon \ ; \quad \text{denn}$$
$$e\big(\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(\tilde x)\big) \leq e\big(\tilde\varphi(x),\varphi_N(x)\big) + e\big(\varphi_N(x),\varphi_N(\tilde x)\big) + e\big(\tilde\varphi(\tilde x),\varphi_N(\tilde x)\big) \ .$$

Corollar

$\varphi_n \longrightarrow \tilde\varphi$ (gleichmäßig), $x_n \longrightarrow \tilde x$(in D) $\Longrightarrow \varphi_n\,(x_n) \longrightarrow \tilde\varphi\,(\tilde x)$ (in E) .
Die Konklusion kann man auch so ausdrücken :
$\lim\limits_n \varphi_n \left(\lim\limits_m x_m\right) = \lim\limits_{m,n} \varphi_n\,(x_m) = \lim\limits_m \tilde\varphi\,(x_m)$.

Beispiele

1) Für jede konvergente Folge reeller Zahlen $x_n \longrightarrow \tilde x$ gilt

$$\Big(1 + \frac{x_n}{n}\Big)^n \longrightarrow \exp\tilde x \ ;$$

denn die Funktionenfolge

$$\varphi_n(x) = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$$

konvergiert auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion.

2) Die Funktionenfolge

$$f_n(x) = |x|^{1/n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

konvergiert nicht gleichmäßig. Der punktweise Limes existiert, die Limesfunktion ist im Nullpunkt unstetig.

Die gleichmäßige Konvergenz beschränkter linearer Operatoren

Seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W\|\cdot\|)$ Banachräume. $B(V,W)$ bezeichne den Vektorraum aller beschränkten linearen Abbildungen

$$T\ :(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (W\|\cdot\|)$$

$\|T\|_{V,W}$ sei die Operatornorm $\|T\|_{V,W} = \sup\big\{\|T(v)\|\ : \|v\| \leq 1\big\}$.

Satz :

$B(V,W)$ ist vollständig bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{V,W}$.

Beweis :

Man betrachte die T als Abbildungen der Einheitskugel. Cauchy-Folgen konvergieren gleichmäßig auf der Einheitskugel und die Grenzfunktion gehört zu einem beschränkten linearen Operator $\tilde{T}$:

$$\sup\big\{\|T_n(v) - \tilde{T}(v)\|\ : \|v\| \leq 1\big\} \longrightarrow 0\ .$$

Hinweis

In der Funktionalanalysis studiert man neben der hier behandelten „Konvergenz bzgl. der Norm“ noch andere Konvergenzbegriffe für beschränkte lineare Operatoren, insbesondere die

„starke Konvergenz“ und die „schwache Konvergenz“.

Für endlichdimmensionale Vektorräume fallen alle diese Konvergenzbegriffe zusammen.

Das Hintereinanderschalten stetiger Abbildungen

Satz :

Gegeben seien Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi\ &: \big(D, d(\cdot,\cdot)\big) &\longrightarrow&\quad \big(D', d'(\cdot,\cdot)\big) \\ \psi\ &: \big(D', d'(\cdot,\cdot)\big) &\longrightarrow&\quad \big(D'', d''(\cdot,\cdot)\big)\ . \end{aligned}$$

Wenn $\varphi(\cdot)$ in $\tilde{x}$ stetig ist und $\psi(\cdot)$ in $\varphi(\tilde{x})$ stetig ist, dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$\chi(\cdot) = \psi\big(\varphi(\cdot)\big)\ : \big(D, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(D'', d''(\cdot,\cdot)\big)$$

im Punkt $\tilde{x}$ stetig.

Der Beweis liegt auf der Hand.

Satz :

Gegeben seien beschränkte lineare Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} T \ : (V, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (V', \|\cdot\|) \\ T' \ : (V', \|\cdot\|) & \longrightarrow & (V'', \|\cdot\|) \ . \end{array}$$

Die zusammengesetzte Abbildung

$$S(\cdot) = T'\big(T(\cdot)\big) \ : (V\|\cdot\|) \longrightarrow (V'', \|\cdot\|)$$

ist dann eine beschränkte lineare Abbildung mit

$$\|S\| \leq \|T\| \cdot \|T'\| \ .$$

Der Beweis liegt auf der Hand.

Satz :

Sei $B(V) = B(V, V)$ die Menge aller beschränkten lineare Abbildungen von $(V\|\cdot\|)$ in sich. $B(V)$ ist ein Vektorraum; außerdem kann man die Elemente multiplizieren

$$(S \cdot T)(v) = S(Tv) \ \text{ für } v \in V \ .$$

Die Operatornorm macht $B(V)$ zu einer normierten Algebra mit Einselement. D.h. : $B(V)$ ist ein normierter Vektorraum, in welchem ein Produkt definiert ist mit den Eigenschaften :

(i) Es existiert ein neutrales Element $I \ : (I \cdot S = S \cdot I = S)$.

(ii) $(\alpha \cdot S) \cdot T = S \cdot (\alpha T) = \alpha \cdot (S \cdot T)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3) = (S_1 \cdot S_2) \cdot S_3$.

(iv) $(S_1 + S_2) \cdot T = S_1 \cdot T + S_2 \cdot T$.

(v) $S \cdot (T_1 + T_2) = S \cdot T_1 + S \cdot T_2$.

(vi) $\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

29. Vorlesung : Kompaktheit, Funktionen auf kompakten Mengen

Definition

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ heißt folgenkompakt, wenn jede K-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel (Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$) Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Eine solche Menge ist nämlich vollständig und totalbeschränkt und wir werden sehen, dass diese Eigenschaften in einem allgemeinen metrischen Raum notwendig und hinreichend sind für die Folgenkompaktheit.

Hinweis

Auf elementarer Ebene kann man sich schwerlich eine Vorstellung machen von der Bedeutsamkeit des Kompaktheitsbegriffs. Man muss schon an so etwas wie Folgen in Funktionenräumen denken. K. Weierstraß beschäftigte sich in seiner Variationsrechnung mit Problemen wie dem Dirichlet-Problem der Potentialtheorie. Es geht darum, auf einem Gebiet eine Funktion $u(\cdot)$ mit vorgegebenen Randwerten zu finden, welche ein minimales „Energieintegral" besitzt. Es sind Verfahren bekannt, wie man von einer nichtoptimalen Näherungslösung zu einer besseren Nährerungslösung mit echt kleinerem Energieintegral kommt; man kann also eine Näherungslösung Schritt für Schritt verbessern. Es erhebt sich die Frage, ob man aus der Folge der verbesserten Lösungen eine konvergente Teilfolge auswählen kann - und die weitere Frage, ob die Limesfunktion das Minimierungsproblem tatsächlich löst.

Satz

Ein folgenkompakter metrischer Raum ist notwendigerweise vollständig.
Es ist einfach, einen kurzen Beweis zu geben. Wir wollen lieber etwas ausholen und zuerst ein Lemma beweisen, welches etwas umständlich erscheinen mag, sich aber bei vielen Gelegenheiten als nützlich erweist (z.B. beim Beweis des Satzes von Riesz-Fischer).

Lemma

Sei $(x_n)_n$ eine Folge mit den Eigenschaften :

(i) Jede Teilfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii) Die Limiten konvergenter Teilfolgen sind allesamt gleich.

Dann konvergiert die Folge.

Beweis

Sei $\tilde{x}$ der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge. Wenn $(x_n)_n$ nicht nach $\tilde{x}$ konvergiert, dann bedeutet das

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N \quad d\left(x_n, \tilde{x}\right) \geq \varepsilon \ .$$

Wählen wir ein solches $\varepsilon^* > 0$ und ein n_1 mit $d(x_{n_1}, \tilde{x}) \geq \varepsilon^*$. Wir konstruieren $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ rekursiv: $n_{j+1} = \min\{n \ : n_j \ , d(x_n, \tilde{x}) \geq \varepsilon^*\}$. Wenn die Folge $(y_j)_j = (x_{n_j})_j$ eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist deren Grenzwert ungleich $\tilde{x}$; dann ist also Bedingung (ii) verletzt. Wenn $(y_j)_j$ keine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist Bedingung (i) verletzt.

Bemerke : Für jede konvergente Folge sind die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Eine Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum konvergiert also genau dann, wenn die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

Hinweis

In der Maß- und Integrationstheorie studiert man den Begriff der fastsicheren Konvergenz. Dieser Konvergenzbegriff kann nicht durch eine Metrik beschrieben werden. Es gibt Folgen, die nicht fastsicher konvergieren, obwohl sie den Bedingungen (i) und (ii) genügen. Von solchen Folgen sagt man, dass sie stochastisch, aber nicht fastsicher konvergieren. Die stochastische Konvergenz kann mit Hilfe des stochastischen Abstands beschrieben werden.

Definition

Eine Teilmenge B eines metrischen Raums heißt totalbeschränkt, wenn man sie für jedes $\delta > 0$ mit endlich vielen δ-Kugeln überdecken kann.

Satz

Ein metrischer Raum $\big(B, d(\cdot,\cdot)\big)$ ist genau dann totalbeschränkt, wenn es zu jeder Folge $(x_n)_n$ eine Teilfolge gibt, welche Cauchy-Folge ist.

Beweis

1) Sei $(x_n)_n$ irgendeine B-Folge. B sei totalbeschränkt. Wir überdecken B mit endlich vielen Kugeln mit dem Radius δ. Für mindestens eine dieser Kugeln, etwa B_1, gibt es unendlich viele n mit $x_n \in B_1$. Wir wählen ein $x_{n_1} \in B_1$. Für mindestens eine, etwa B_2, gibt es unendlich viele $n > n_1$ mit $x_n \in B_2$. Wir wählen $n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} \in B_2 \cap B_1$. So fahren wir fort. Wir erhalten Kugeln $B_1, B_2, \ldots$ mit Radius $= \delta \cdot 2^{-j}$ und $n_1 < n_2 < \ldots$ mit $x_{n_j} \in B_j \cap B_{j-1} \cap \ldots \cap B_1$.
   $(x_{n_j})_j$ ist offenbar eine Cauchy-Folge.

2) Wenn B nicht totalbeschränkt ist, dann gibt es ein $\delta^* > 0$, so dass B nicht mit endlich vielen δ^*-Kugeln überdeckt werden kann. Wir konstruieren eine Folge $(x_{n_j})_j$ mit $d(x_n, x_m) \geq \delta^*$ für alle $m \neq n$.
   Beginnen wir mit irgendeinem x_1; wählen wir $x_2 \notin B(x_j, \delta^*)$ und rekursiv x_{n+1} aus dem Komplement von $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B(x_j, \delta^*)$. Die Folge $(x_n)_n$ besitzt offenbar keine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist.

Beispiele

1) Jede beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$ ist totalbeschränkt. Wenn man eine beschränkte offene Menge mit δ-Kugeln überdecken will, dann gilt für die Anzahl $N(\delta)$ der benötigten Kugeln
$$N(\delta) \cdot \delta^n \longrightarrow \quad \text{const } \neq 0 \quad (\text{für } \delta \to 0)\ .$$
In einem hochdimensionalen Raum (n groß) wächst die Zahl $N(\delta)$ schnell mit $\delta \searrow 0$.

2) Im unendlichdimensionalen Folgenraum $\ell^p(\mathbb{Z})$ ist die Einheitskugel nicht totalbeschränkt. Es gibt nämlich Folgen $(x_n)_n$ mit $\|x_n\|_p \leq 1$, welche keine Teilfolge besitzen, die Cauchy-Folge ist.
Sei z.B. x_n die Funktion auf $\mathbb{Z}$, die im Punkt n den Wert 1 und überall sonst den Wert 0 hat. Diese x_n haben paarweise den Abstand $\delta^* = 2^{1/p}$.

Wenn wir die beiden obigen Sätze zusammenfassen, dann erhalten wir den verallgemeinerten

Satz von Bolzano-Weierstraß

Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann folgenkompakt, wenn sie vollständig und totalbeschränkt ist.

Hinweis

In vielen elementaren Lehrbüchern findet man unter dem Namen „Satz von Bolzano-Weierstraß“ die spezielle Behauptung:
„Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist“. Wir haben gesehen, dass jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums selbst vollständig ist. Es scheint uns didaktisch unglücklich, dass in diesem Zusammenhang von Beschränktheit die Rede ist, obwohl es auf die Totalbeschränktheit ankommt. (Die Beschränktheit einer Teilmenge B eines Vektorraums bedeutet, dass B durch eine Kugel mit genügend großem Radius überdeckt werden kann.)

Als Anwendung des Begriffs der Folgenkompaktheit formulieren wir drei Sätze über stetige Funktionen auf folgenkompakten Räumen.

Satz 1

Wenn $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ folgenkompakt ist, dann ist jede stetige Funktion auf S gleichmäßig stetig.

Beweis (durch Widerspruch)

Wir zeigen: Wenn $f(\cdot)$ nicht gleichmäßig ist, dann gibt es einen Punkt $\tilde{x}$ in welchem $f(\cdot)$ unstetig ist.
In der Tat: Wenn $f(\cdot)$ nicht gleichmäßig stetig ist, dann gilt
$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0\ \exists x, y \quad \big(d(x,y) < \delta\big) \wedge \big\|f(y) - f(x)\big\| > \varepsilon\ .$
Wähle ein solches $\varepsilon^* > 0$ und zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ ein Paar x_n, y_n mit den angegebenen Eigenschaften. Wir wählen eine Teilfolge $\big(x_{n_j}\big)_j$, welche konvergiert

$x_{n_j} \to \tilde{x}$. (Es gilt auch $y_{n_j} \to \tilde{x}$, wegen $d\left(x_{n_j}, y_{n_j}\right) \leq \frac{1}{n} \searrow 0$). Die Funktionswerte halten aber den Abstand $\leq \varepsilon^*$. $f(\cdot)$ ist unstetig in $\tilde{x}$.

Bemerke : Satz und Beweis übertragen sich auf stetige Abbildungen von kompakten Räumen

$$\big(S, d(\cdot,\cdot)\big) \longrightarrow \big(E, e(\cdot,\cdot)\big) \;.$$

Merke also . Über einem folgenkompakten Raum impliziert die Stetigkeit in jedem Punkt die gleichmäßige Stetigkeit.

Satz 2

Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ nimmt ihr Maximum an.

Beweis

Sei $\tilde{s} = \sup\big\{f(x) \;: x \in S\big\}$ und $(x_n)_n$ so, dass $f(x_n) > s^* - \frac{1}{n}$. Sei $\left(x_{n_j}\right)_j$ eine konvergente Teilfolge. In ihrem Grenzwert $\tilde{x}$ haben wir $f\left(\tilde{x}\right) = \tilde{s}$.

Satz 3 (Satz von Dini)

Seien $f_1, f_2, \ldots$ stetige Funktionen auf einem kompakten Raum $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$. Wenn

$$f_1 \geq f_2 \geq \ldots \quad \text{mit } \lim \searrow f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in S \;,$$

dann konvergiert die Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Den Beweis lassen wir als Übung. Die Bedeutung der monotonen Konvergenz wird später zutage treten, wenn wir über Integrale sprechen.

Der folgende Satz wirft neues Licht auf den Begriff der Kompaktheit.

Satz 4 (Satz von Heine-Borel)

Sei K eine folgenkompakte Teilmenge von $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$. Zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung von K gibt es dann eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis

Seien $U_1, U_2, \ldots$ offene Mengen mit $K \subseteq \bigcup\limits^{\infty} U_j$. Die Annahme $\forall n \;: K \nsubseteq \bigcup\limits^{n} U_i$ soll zum Widerspruch geführt werden. Wenn die Annahme zutrifft, dann können wir für jedes n ein x_n wählen mit $x_n \notin \bigcup\limits^{n} U_i$. Sei $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und $\tilde{U} = U_N$ ein Element der Überdeckung, welches den Limespunkt $\tilde{y} = \lim y_j$ enthält. $\tilde{y}$ ist innerer Punkt von U_N. Also liegen schließlich alle y_j in U_N, im Widerspruch zur Konstruktion der $x_{n_j} = y_j$.

Hinweis

Die Eigenschaft von Heine-Borel trifft in der Tat den Kern des Kompaktheitsbegriffs. In der modernen Punktmengentopologie macht man diese Eigenschaft zur Definition. Für den Fall metrischer Räume wird das durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz
Sei $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ ein separabler metrischer Raum mit der Eigenschaft:
Zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $\{U_i \ : i \in \mathbb{N}\}$ von S existiere eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $\big(S, d(\cdot,\cdot)\big)$ folgenkompakt.

Beweis

1) Sei $\{x_i \ : i \in \mathbb{N}\}$ eine überall dichte Menge und $\tilde{\mathfrak{U}}$ das abzählbare System der speziellen offenen Kugeln $B\,(x_i, r)$ mit r rational.
Jede offene Menge U ist die Vereinigung solcher speziellen Kugeln.

2) Sei $(x_n)_n$ eine Folge, welche keine konvergente Teilfolge besitzt. Zu jedem $\tilde{x} \in S$ existiert dann eine Kugel $B\,(x_i, r)$, welche$\tilde{x}$ und nur endlich viele x_n enthält. Wählen wir zu jedem $\tilde{x}$ eine solche spezielle Kugel, so haben wir eine abzählbare offene Überdeckung von S.

3) Es kann keine endliche Teilüberdeckung geben, weil endlich viele Kugeln der konstruierten Art keinen Platz bieten für die unendlich vielen $\{x_n \ : n \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis
Man sagt, die moderne Integrationstheorie hätte mit der Beobachtung von E. Borel (1817-1956) begonnen, dass eine offene Überdeckung des Einheitsintervalls $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ stets eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Lebesgue hat darauf seine Theorie des äußeren Maßes einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ gegründet.

Historische Anmerkungen

(In Anlehnung an D. J. Struik *„Abriss der Geschichte der Mathematik“*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963)

Leibniz fand seinen Kalkül zwischen 1673 und 1676 in Paris unter dem persönlichen Einfluß von Huygens und durch das Studium von Descartes und Pascal. Durch die Veröffentlichung zweier Arbeiten von Leibniz wurde eine außerordentlich fruchtbare Periode mathematischen Schaffens eingeleitet. Nach 1687 war Leibniz eng mit den Brüdern Bernoulli (Jakob und Johann) verbunden, die seine Methoden begierig aufnhamen. Noch vor 1700 hatten diese Männer das meiste von dem gefunden, was bis in unsere Zeit hinein üblicherweise den Studierenden der Differential- und Integralrechnung geboten wird, dazu aber wichtige Teile höherer Gebiete einschließlich der Lösung einiger Probleme aus der Variationsrechnung.

Im 18. Jahrhundert konzentrierte sich die mathematische Produktivität auf die Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendungen auf die Mechanik. Die bedeutendsten Pioniere waren Daniel Bernoulli (1700-1782), L. Euler (1707-1783), J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827). Gegen Ende des 18. Jahrhunderts entstand merkwürdigerweise das Gefühl, der Bereich der Mathematik sei irgendwie erschöpft. Die mühevollen anstrengenden Arbeiten der großen Meister hatten schon die meisten wichtigen Sätze geliefert; die großen Standardlehrbücher hatten sie bereits im Zusammenhang dargestellt; die wenigen Mathematiker würden nur noch geringere Probleme zu lösen haben. Lagrange schrieb 1772 an d'Alembert: *„Scheint es Ihnen nicht, dass die* *erhabene Geometrie ein wenig dazu neigt, dekadent zu werden?" „Sie hat keine andere Stütze als Sie und Herrn Euler."* (zitiert nach D.J. Struik : *„Abriss der Geschichte der Mathematik"*, Berlin 1963) Arago sagt in seiner „Lobrede auf Laplace" (1842) : *„Fünf Mathematiker - Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange und Laplace - teilten die Welt unter sich auf, deren Existenz Newton enthüllt hatte. Sie erklärten sie nach allen Richtungen, drangen in Gebiete ein, die für unzugänglich gehalten worden waren, wiesen auf zahllose Erscheinungen in diesen Gebieten hin, die von der Beobachtung noch nicht entdeckt worden waren, und schließlich brachten sie - und darin liegt ihr unvergänglicher Ruhm - alles, was höchst verwickelt und geheimnisvoll in den Bewegungen der Himmelskörper ist, unter die Herrschaft eines einzigen Prinzips, eines einheitlichen Gesetzes. Die Mathematik besaß auch die Kühnheit, über die Zukunft zu verfügen; wenn die Jahrhunderte abrollen, werden sie die Entscheidungen der Wissenschaft gewissenhaft bestätigen."*

Struik schreibt dazu (Seite 156) : *Aragos Rednerkunst wies auf die Hauptquelle dieses „fin-de-siècle"-Pessimismus hin, der in der Tendenz bestand, den Fortschritt der Mathematik allzusehr mit dem der Mechanik und Astronomie gleichzusetzen. Seit den Zeiten des alten Babylon bis zu denen von Euler und Lagrange hatte die Astronomie in der Mathematik die erhabensten Entdeckungen herbeigeführt und angeregt; nunmehr schien diese Entwicklung ihren Gipfel erreicht zu haben. Aber eine neue Generation, die von den durch die Französische Revolution eröffneten neuen Perspektiven und der Blüte der Naturwissenschaften begeistert war, machte sich daran, zu zeigen, wie unbegründet dieser Pessimismus war. Dieser große neue Impuls kam nur zum Teil aus Frankreich; er kam auch, wie so oft in der Geschichte der Kultur, aus dem Randgebiet der politischen und wirtschaftlichen Zentren, in diesem Falle von Gauß in Göttingen.*

Gauß hat bekanntlich in den verschiedensten Gebieten Bahnbrechendes geleistet. Im Hinblick auf die Anfängervorlesung „Mathematik für Physiker" sollte man vielleicht besonders erwähnen, dass Gauß im Zusammenhang mit seinen Ansätzen zur Potentialtheorie verschiedene Minimalprinzipien für Volumenintegrale aufgestellt hat. (Heute bekannt als „Dirichlet'sches Prinzip") Gauß hielt die Existenz eines Minimums noch für evident; später entstand daraus eine vieldiskutierte Fragestellung, die schließlich von Hilbert gelöst wurde.

Gauß war kein Lehrer. Die neuen Ansätze zur Lehre entstanden hauptsächlich in den französischen Militärschulen und -akademien. Der mathematische Unterricht spielte als Teil der Ausbildung von Militäringenieuren eine beträchtliche Rolle. Das Bedürfnis nach einer zentralisierten Ausbildung im Militäringenieurwesen führte zur Gründung der École Polytechnique in Paris (1794). Die Ausbildung in theoretischer und angewandter Mathematik bildete einen wesentlichen Bestandteil des Lehrplans. Forschung und Lehre wurden mit gleichem Nachdruck betrieben. Die besten Wissenschaftler Frankreichs wurden herangezogen, um ihre Kraft der Schule zu widmen. Die Ausbildung erforderte einen neuen Lehrbuchtyp. Der Einfluß dieser damals von den besten Wissenschaftlern verfaßten Lehrbüchern kann (nach Struik) bis in unsere heutigen Lehrbücher hinein verfolgt werden.

Struik schreibt weiter: *Die hervorragendsten Mathematiker, die mit den ersten Jahren der École Polytechnique verbunden waren - außer Lagrange und Monge - waren Siméon Poisson, Joseph Fourier und Augustin Cauchy. Alle drei waren zutiefst an der Anwendung der Mathematik auf die Mechanik und*

Physik interessiert, alle drei wurden durch dieses Interesse zu Entdeckungen in der „reinen" Mathematik geführt.
Die Produktivität von ***Poisson*** *wird durch die Häufigkeit gekennzeichnet, mit der sein Name in unseren Lehrbüchern genannt wird: Poissonsche Klammern in den Differentialgleichungen, die Poissonsche Konstante in der Elastizitätstheorie, das Poissonsche Integral und die Poissonsche Gleichung der Potentialtheorie. Diese „Poissonsche Gleichung"* $\Delta V = 4\pi\rho$, *war das Ergebnis der Entdeckung von Poisson (1822), daß die Laplacesche Gleichung* $\Delta V = 0$ *nur außerhalb von Massen gilt; ihr exakter Beweis für Massen von veränderlicher Dichte wurde erst von Gauß in seinen „Allgemeinen Lehrsätzen" (1839/40) geliefert. Poissons „Traité de mécanique" (1811) war im Geiste von Lagrange und Laplace geschrieben, enthielt aber auch viele neue Gedanken, wie die explizite Verwendung von Impulskoordinaten* $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, *wodurch später die Arbeiten von Hamilton und Jacobi angeregt wurden. Sein Buch aus dem Jahre 1837 enthält das „Poissonsche Gesetz" der Wahrscheinlichkeit* (siehe S. 119).

Fourier *ist in erster Linie als Autor der „Théorie analytique de la chaleur" (Analytische Theorie der Wärme) (1822) bekannt. Hierbei handelt es sich um die mathematische Theorie der Wärmeleitung und daher im wesentlichen um das Studium der Gleichung* $\Delta U = k\frac{\partial U}{\partial t}$. *Dank der Allgemeinheit seiner Methode wurde dieses Buch zum Ausgangspunkt aller modernen Methoden der mathematischen Physik, die sich auf die Integration von partiellen Differentialgleichungen bei vorgegebenen Randbedingungen beziehen. Diese Methode ist der Gebrauch von trigonometrischen Reihen, die schon Gegenstand der Diskussion zwischen Euler, d'Alembert und Daniel Bernoulli gewesen ware. Fourier klärte die Situation völlig auf. Er stellte die Tatsache klar, daß eine „willkürliche" Funktion (eine Funktion, die sich durch ein stetiges Kurvenstück oder durch eine Aneinanderreihung von solchen darstellen läßt) durch eine trigonometrische Reihe der Form* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A_n \cos nax + B_n \sin nax)$ *dargestellt werden kann. Trotz der Betrachtungen von Euler und Bernoulli war die Idee zur Zeit der Untersuchungen Fouriers so neu und frappierend, daß berichtet wird, wie er 1807, als er seine Idee zum erstenmal bekanntgab, auf den scharfen Widerspruch von niemand anderem als Lagrange selbst stieß.*

Die „Fourier-Reihen" wurden nun zu einem gut durchgebildeten Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit gegebenen Randbedingungen. Sie fanden aber auch ein selbständiges Interesse. Ihre Handhabung bei Fourier drängte auf die Klärung der Frage, was unter eine „Funktion" zu verstehen ist. Dies war einer der Gründe, warum die Mathematiker des neuzehnten Jahrhunderts es für notwendig hielten, sich mehr mit Fragen nach der Strenge mathematischer Beweise und den Grundlagen der mathematischen Begriffe überhaupt zu beschäftigen. Diese Aufgabe wurde insbesondere bei den Fourier-Reihen von ***Dirichlet*** *und* ***Riemann*** *in Angriff genommen.*

Cauchy *gehört zusammen mit seinen Zeitgenosen Gauß, Abel und Bolzano zu den Pionieren des neu erwachten Bedürfnisses nach Strenge in der Mathematik. Das achtzehnte Jahrhundert war im wesentlichen eine Zeit des Experimentierens gewesen, in der sich Ergebnisse in verschwenderischer Fülle einstellten. Die Mathematiker dieser Zeit hatten sich nicht allzusehr um die Grundlagen ihrer Arbeit gekümmert - „allez en avant, et la foi vous viendra" (Geht vorwärts, der Glaube wird sich schon einstellen) soll d'Alembert gesagt haben. Wenn sie sich um Strenge sorgten, wie es Euler und Lagrange gelegentlich taten, waren* *ihre Argumente nicht immer überzeugend. Nunmehr war die Zeit für eine zielgerichtete Konzentration auf die Sinndeutung der Resultate gekommen. Was war eigentlich eine „Funktion“ einer reellen Veränderlichen, die ein so verschiedenes Verhalten bezüglich einer Fourier-Reihe und bezüglich einer Potenzreihe zeigte? In welcher Beziehung stand sie zu der völlig andersartigen „Funktion“ einer komplexen Veränderlichen?*

A. Cauchy (1789-1857) hat zahlreiche Beiträge zur Theorie des Lichts und zur Mechanik („Elastizitätstheorie“) geleistet. Er fand sofort große Anerkennung für seine Arbeiten in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Cauchy's „Integralsatz“ erschien 1825. Der Satz, dass jede „reguläre“ Funktion lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, wurde 1831 veröffentlicht, im gleichen Jahr, als Gauß seine arithmetische Theorie der komplexen Zahlen veröffentlichte.

Über die Fragen nach dem Begriff der Funktion schreibt Struik weiter: *Diese Fragen schoben alle ungelösten Probleme der Begründung der Infinitesimalrechnung und der Existenz des aktualen und des potentiellen Unendlich in den Vordergrund des mathematischen Denkens. Was Eudoxus in der Zeit nach dem Sturz der Athener Demokratie geleistet hatte, begannen Cauchy und seine exakt denkenden Zeitgenossen in der Periode des sich ausbreitenden Industrialismus zu vollenden. Dieser Unterschied der gesellschaftlichen Umstände führte zu unterschiedlichen Ergebnissen: während der Erfolg des Eudoxus die Tendenz besaß, die Produktivität zu hemmen, wirkte der Erfolg der modernen Reformer auf die mathematische Produktivität in hohem Maße anregend. Auf Cauchy und Gauß folgten* ***Weierstraß*** *und* ***Cantor****.*

Die Autoren vor Bolzano hatten die ***Stetigkeit*** als eine Eigenschaft betrachtet, die eine konkret gegebene Funktion besitzt oder (in Ausnahmesituationen) auch einmal nicht besitzt. Bolzano und Cauchy führten nun die Stetigkeit als ein definierendes Prinzip ein. Die Stetigkeit sollte die Grundlage für mathematische Schlüsse sein. Bolzano führte das 1817 am Zwischenwertsatz vor (wobei er darauf zu sprechen kommt, welche Eigenschaften der reellen Zahlen hier eine Rolle spielen). Cauchy stützte seine Definition des Integrals auf den Begriff der Stetigkeit, wobei ihm insofern Ungenauigkeit nachzusagen ist, dass er gelegentlich die gleichmäßige Stetigkeit benützt ohne diesen schärferen Begriff definitorisch zu fassen. Man kann bei Cauchy eine ganze Reihe von lückenhaften Schlüssen finden, die darauf zurückzuführen sind, dass der Begriff der reellen Zahl noch nicht scharf gefaßt war. (Die entscheidenden Arbeiten von R. Dedekind erschienen in den Jahren 1872 und 1882.) Wirklich ernsthafte Schwachstellen entstanden bei Cauchy daraus, dass er den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz (einer Funktionenreihe) nicht erfaßte. Trotz aller Schwächen in Detail veränderte Cauchy's Ansatz die Theorie der Funktionen von Grund auf. Und die neuen Ideen haben sich (gegen anfängliche Widerstände) auf der ganzen Linie durchgesetzt. Über den Vollender dieses Ansatzes, K. Weierstraß (1815-1897) schreibt Struik (S. 186) : *Der Ruhm von Weierstraß beruht auf seinen mit höchster Sorgfalt ausgeführten Schußweisen, auf der „Weierstraßschen Strenge“, die nicht nur in seiner Funktionentheorie zutage tritt, sondern auch in seiner Variationsrechnung. Er klärte die Begriffe des Minimums, der Funktion und der Ableitung völlig auf und beseitigte damit die noch vorhandene Unbestimmtheit der Ausdrucksweise in den grundlegenden Begriffen der Infinitesimalrechnung. Er war das mathematische Gewissen schlechthin, sowohl in methodischer als auch in logischer Beziehung. Ein* *anderes Beispiel seiner peinlich genauen Denkweise ist seine Entdeckung der gleichmäßigen Konvergenz. Mit Weierstraß begann jene Zurückführung der Prinzipien der Analysis auf die einfachsten arithmetischen Begriffe, die wir die* ***Arithmetisierung der Mathematik*** *nennen.'*

Die Mathematik des 20. Jahrhunderts ist von den Mengenlehre geprägt. Man beschäftigt sich mit Operationen in gewissen Mengen traditioneller oder auch neuartiger mathematischer Objekte (die man sich zunächst einmal gar nicht so genau anschauen will).

Didaktisches Kommentar : Es ist heute allgemein (auch unter Anwendern) akzeptiert, dass man nicht weit käme, wenn man versuchte die Analysis von den Ansätzen des 18. Jahrhunderts her zu verstehen. Der Kalkül der elementaren Funktionen kann in dem gleichen Sinne von Systemen wie MAPLE übernommen werden, wie das Einmaleins vom Taschenrechner übernommen wurde. (Wie das geht, haben wir parallel zu den ersten 24 Vorlesungen gesehen.)

Ein Verständnis für physikalische Theorien jenseits der Mechanik aus dem 18. Jahrhundert braucht ein mathematisches Fundament im Sinne von Cauchy und Weierstraß: Vervollständigung, Stetigkeit und Kompaktheit. Dazu gehören auch die Denk- und Sprechweisen der naiven Mengenlehre: Mengen, Mengensysteme, Relationen, Aussagen. Der Blick auf die konkreten Objekte, die den klassischen Anwender interessieren, wird absichtlich unscharf; der Erkenntnisgewinn, der durch solche Abstraktion ermöglicht wird, ist erfahrungsgemäß für den Anfänger nicht leicht zu greifen. Die Konstruktionen der abstrakten Mengenlehre eignen sich auch weniger für Übungs- und Klausuraufgaben, jedenfalls nicht für Physikstudenten, die ja nicht vordringlich das mathematische Beweisen lernen sollen. Wir haben die Elemente der Analysis des 20. Jahrhunderts daher ans Ende unserer Vorlesung gestellt, mehr als Dokumentation, denn als Feld mathematischer Aktivität. Sie werden in der Fortsetzung der „Mathematik für Physiker“ zunächst keinen wichtigen Platz einnehmen.