7. KOMPLEXE ZAHLEN

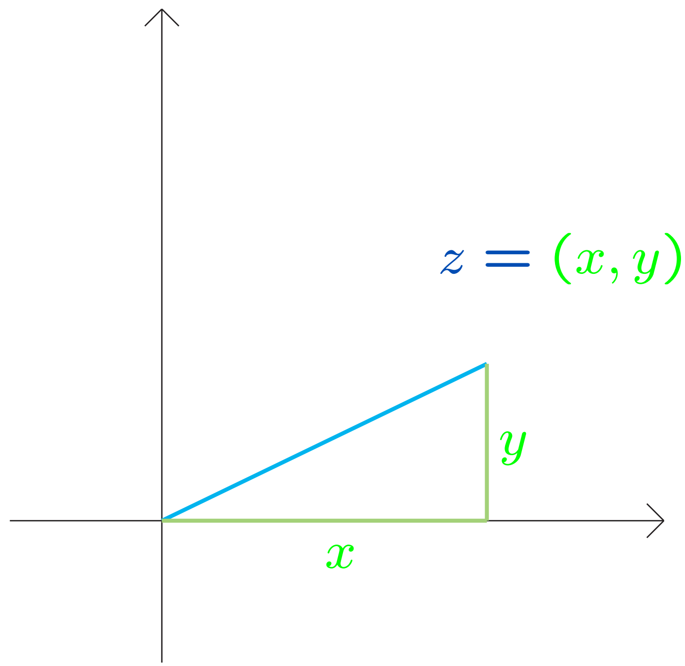
und die

KOMPLEXE e-FUNKTION

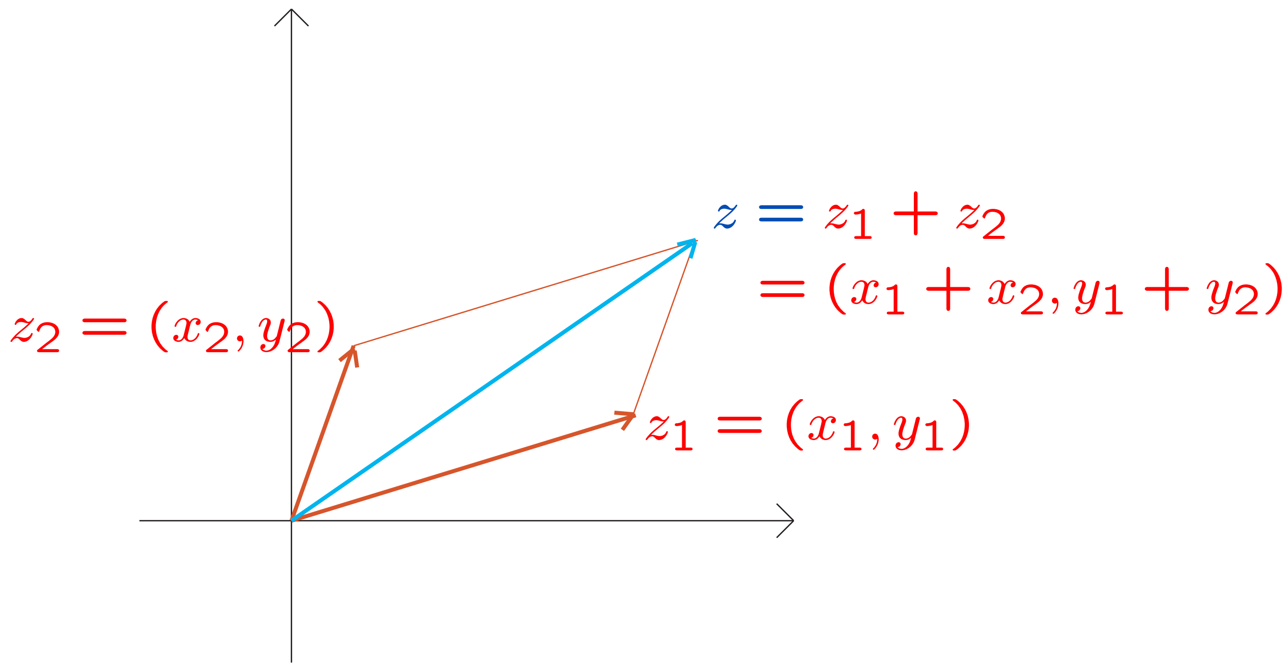
Wir gehen aus von der Ebene, versehen mit einem Koordinatensystem und x, y-Koordinaten. Dann entsprechen Punkte z in der Ebene Zahlenpaaren:

$$z = (x, y)$$

x und y sind die (kartesischen) Koordinaten von z.


$z = (x, y)$
y
x

Zahlenpaare addiert man *komponentenweise*:



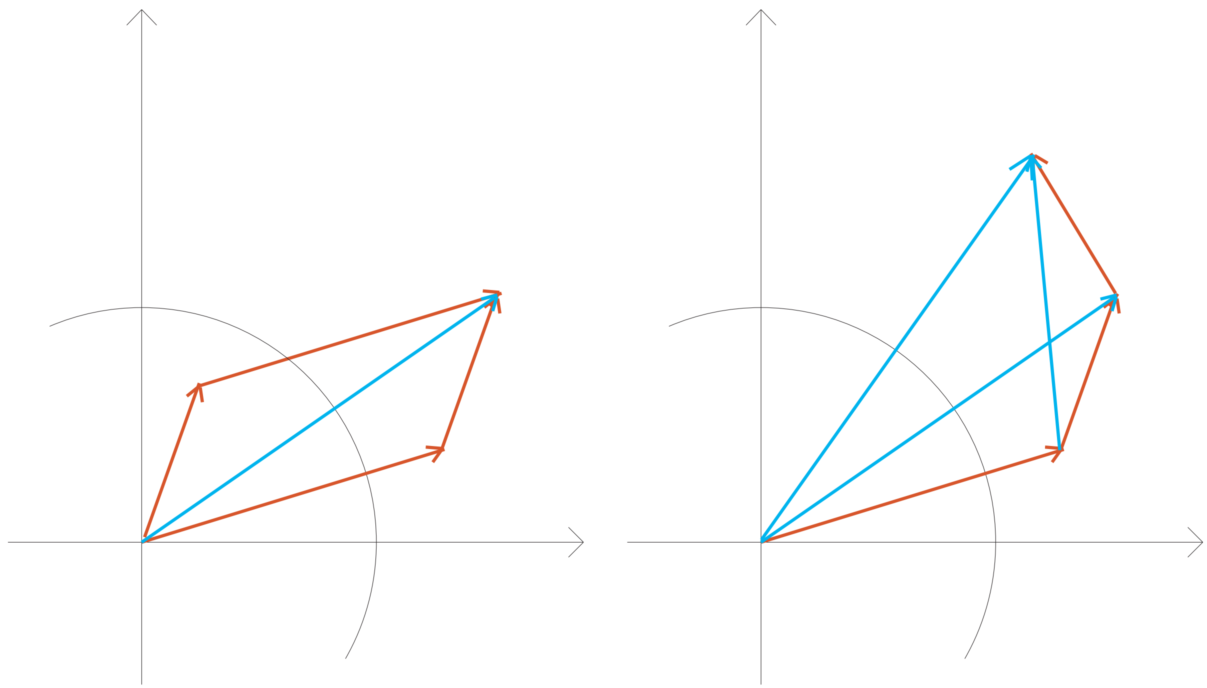
„Parallelogrammregel“

Diese Addition von Punkten z der Ebene erfüllt vertraute Rechenregeln:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ , \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

(Kommutativität, Assoziativität), weil sie komponentenweise gelten.

Kommutativität und Assoziativität



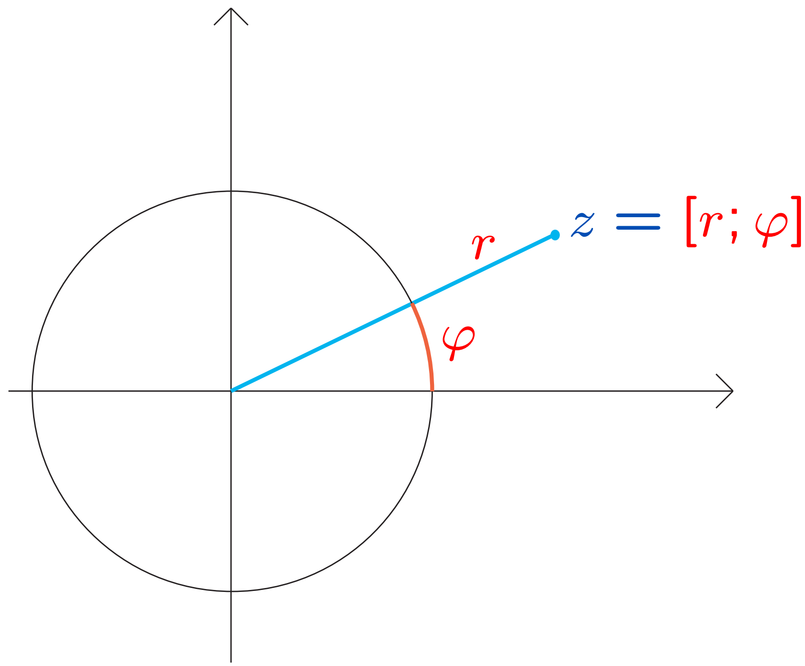
Wir wollen Punkte auch multiplizieren. Dazu betrachen wir auch die Darstellung eines Punktes z in *Polarkoordinaten*

$$z = [r; \varphi]$$

mit

r,	dem „Abstand“, „Betrag“, und
φ,	dem „Winkel“, „Argument“

von z.



Der Winkel wird wieder als Länge entlang des Einheitskreises gemessen.

Man schreibt für *Betrag* und *Argument* von z

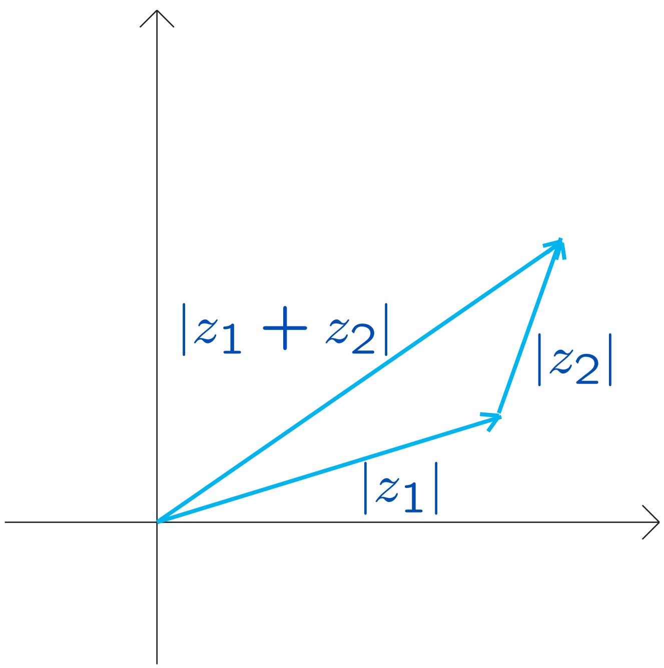
$$r = |z| \qquad \text{und} \qquad \varphi = \arg(z)$$

Unter Beachtung des Pythagoras gilt

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \ , \ \cos\varphi = \frac{x}{r}$$

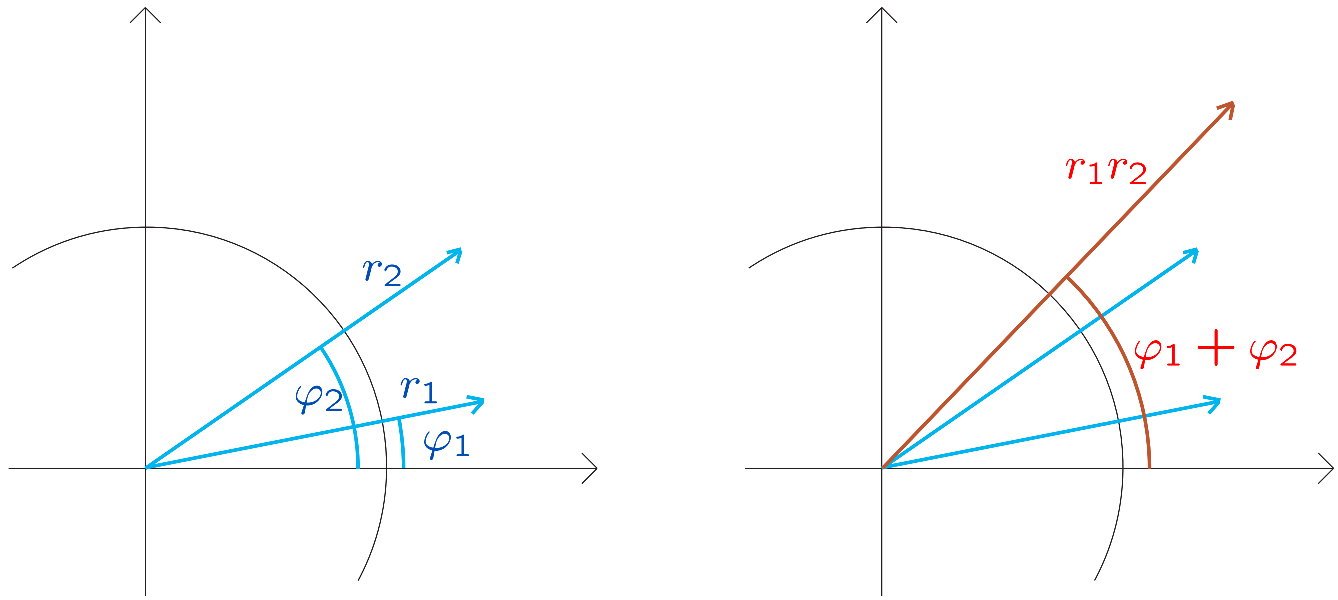
Es gilt die „Dreiecksungleichung“

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



Wir multiplizieren zwei Punkte der Ebene gemäß der Regel

$$z_1 = [r_1; \varphi_1] \ , \ z_2 = [r_2; \varphi_2] \quad :\Rightarrow \quad z_1 z_2 = [r_1 r_2; \varphi_1 + \varphi_2]$$



Geometrisch ist die Multiplikation eine *Drehstreckung*.

Kommutativität und Assoziativität

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \text{und} \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

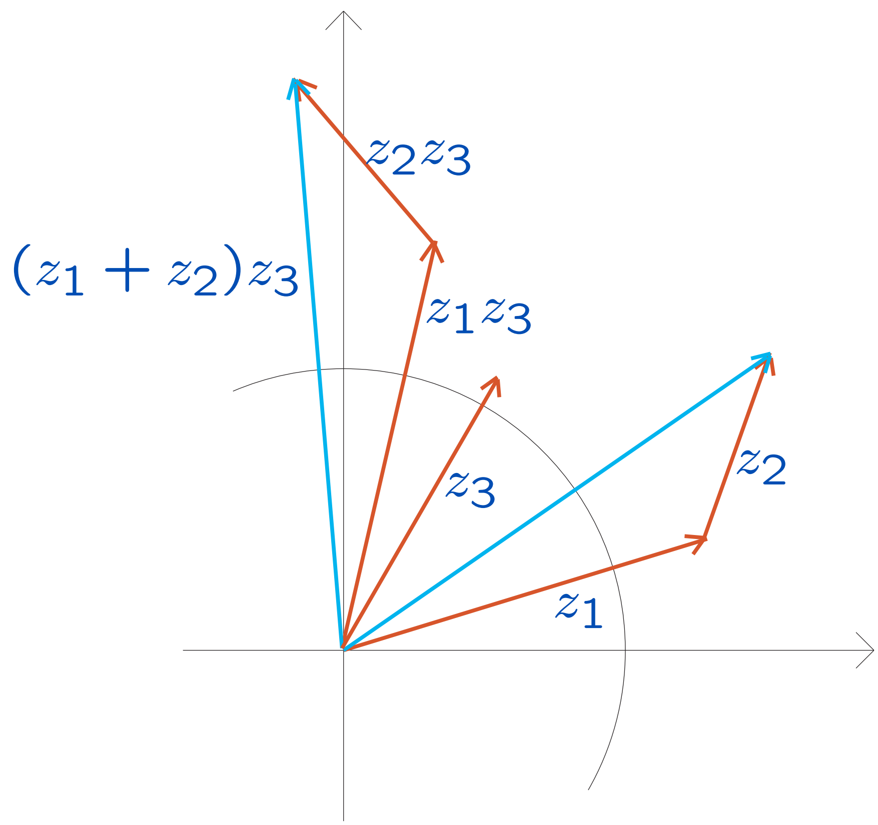
ergeben sich wieder komponentenweise, z.B.

$$\begin{aligned} z_1(z_2 z_3) &= [r_1(r_2 r_3); \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)] \\ &= [(r_1 r_2) r_3; (\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3] = (z_1 z_2) z_3 \end{aligned}$$

Zudem passen Addition und Multiplikation zusammen: Es gilt das Distributivgesetz

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Geometrische Veranschaulichung des Distributivgesetzes durch Drehstreckung:



Die Punkte der Ebene, versehen mit dieser Addition und Multiplikation, heißen die

komplexen Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Spezialfälle:

a) Punkte der x-Achse: Es gilt

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \ , \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

Dabei muss man bei der Multiplikation die Fälle $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0, x_2 < 0$ und $x_1, x_2 < 0$ getrennt betrachten.

Man identifiziert also die *reelle* Zahl x mit der *komplexen* Zahl $z = (x, 0)$. Beim Rechnen führt das nicht zu Konflikten.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist damit (samt Rechnen) eingebettet in die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

In der Ebene sind das die Punkte auf der x-Achse.

Spezialfälle:

b) Die Zahlen auf der y-Achse heißen die *imaginären* Zahlen. Insbesondere heißt

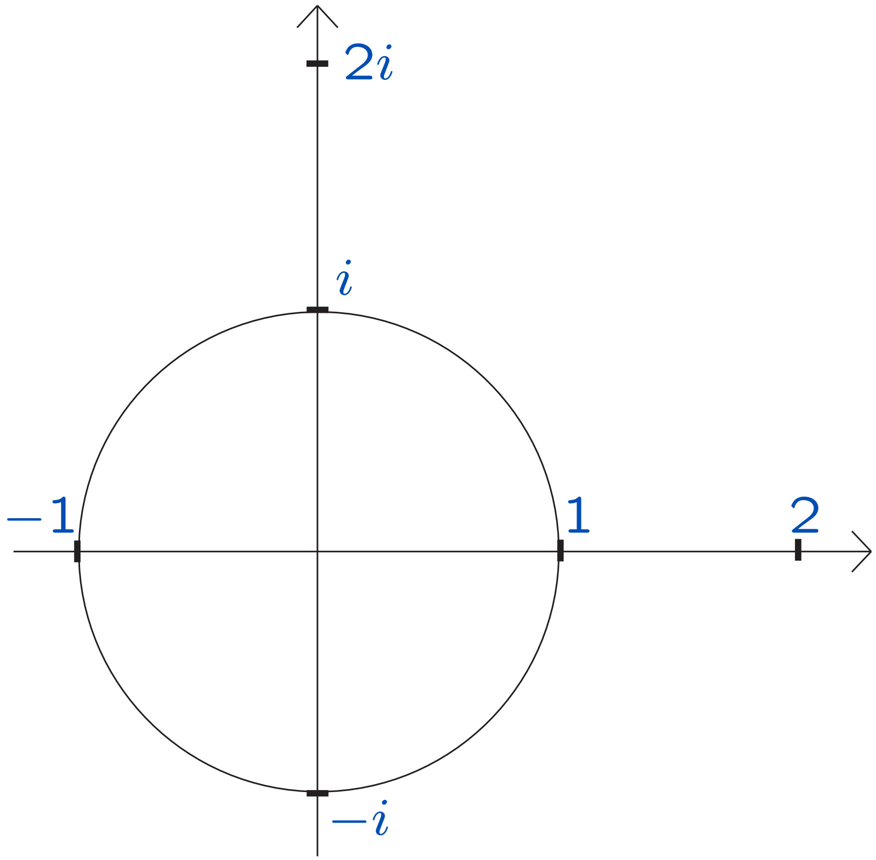
$$i = (0, 1)$$

die *imaginäre Einheit*.

Die Multiplikation von z mit i bewirkt eine Drehung von z um 90°. Für eine reelle Zahl y bedeutet das

$$iy = (0, y)$$

Es sind also die Punkte der y-Achse die reellen Vielfachen der imaginären Einheit i.


$2i$
i
-1
1
2
$-i$

Spezialfälle:

c) Die imaginäre Einheit erfüllt

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Sie löst die Gleichung $z^2 + 1 = 0$, die in den reellen Zahlen keine Lösung hat.

Komplexe Zahlen algebraisch:

Jede komplexe Zahl besitzt die Darstellung

$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

x und y heißen *Real*- und *Imaginärteil* von z. Man schreibt

$$x = \Re(z) \ , \ y = \Im(z)$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen schreibt sich nun

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Die Multiplikation von komplexen Zahlen gelingt nun auch nach dem Distributivgesetz:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2$$

bzw.

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Eine Anwendung:

Nach der Definition der Multiplikation gilt:

$$(\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) = \cos(s+t) + i \sin(s+t)$$

Ausmultiplizieren und Zerlegen in Real- und Imaginärteil gibt das *Additionstheorem für die trigonometrischen Funktionen*:

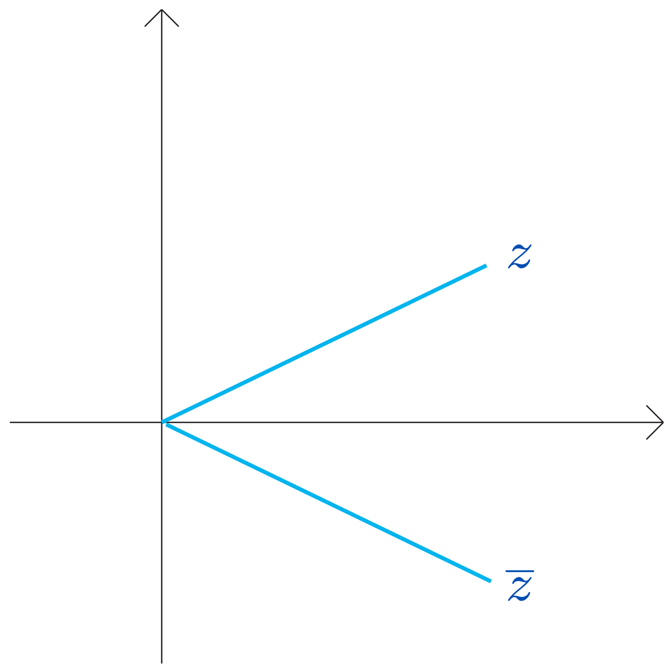
$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

Für $z = x + iy$ heißt

$$\overline{z} := x - iy = \Re(z) - i\Im(z)$$

die *Konjugierte* von z.

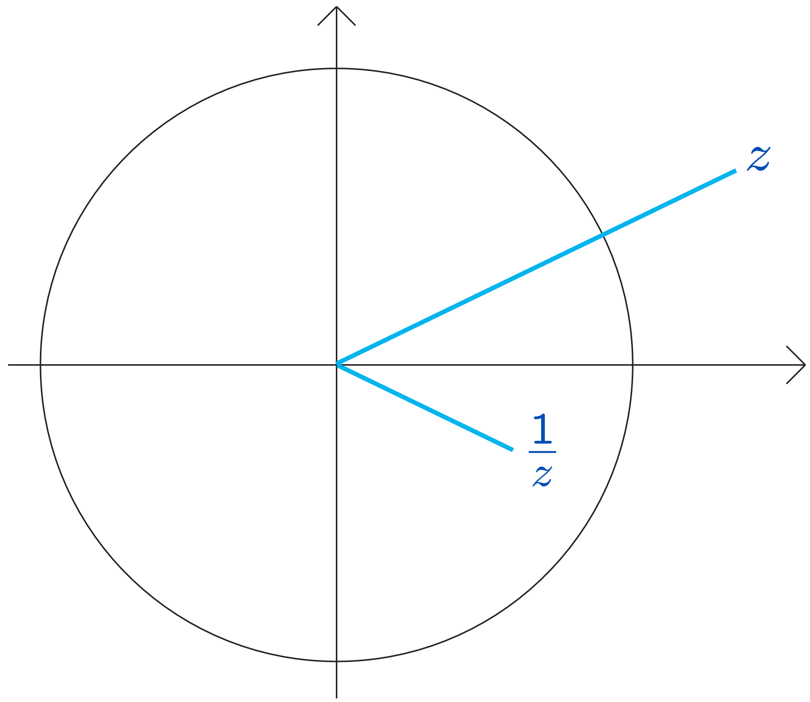


Es gelten die Regeln

$$z\overline{z} = |z|^2 \quad \text{und} \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$$

z.B. $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Damit erhalten wir den Kehrwert einer komplexen Zahl $z \neq 0$ als

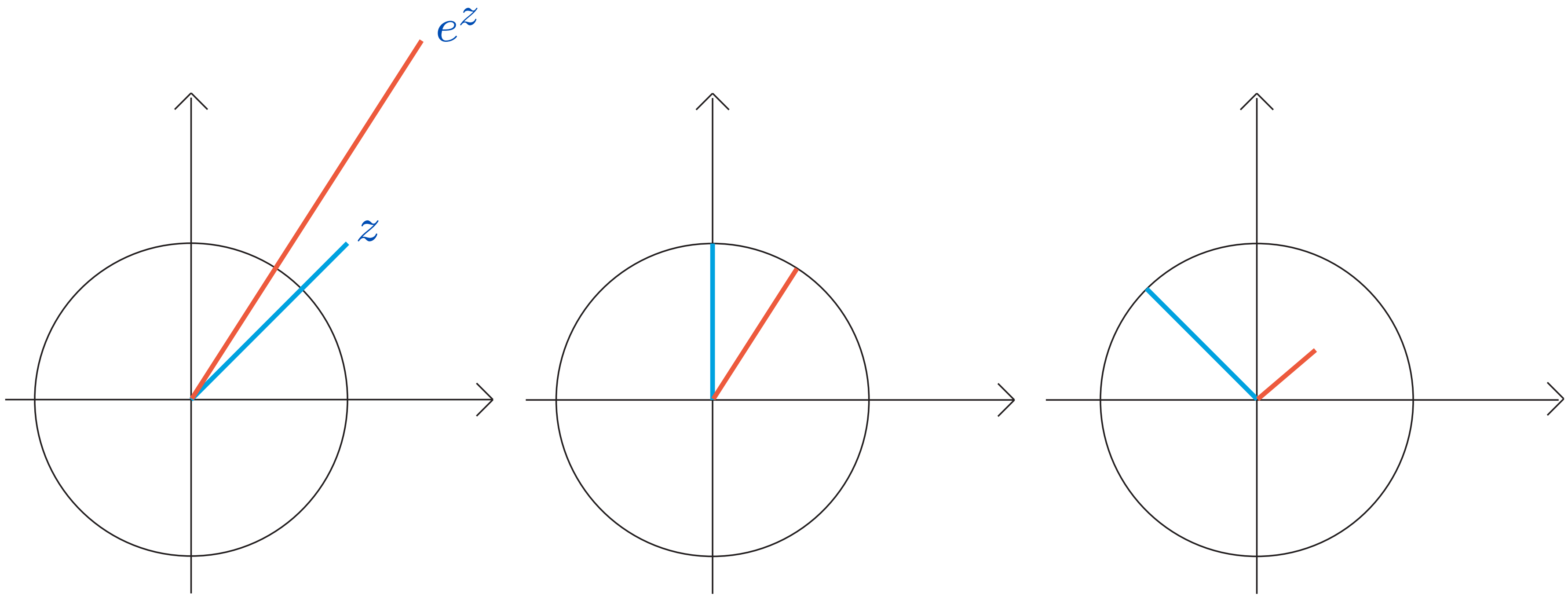
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$


z
$\frac{1}{z}$

DIE KOMPLEXE EXPONENTIALFUNKTION

Wir definieren e^z für komplexes $z = x + iy$ durch ihre Polarkoordinaten, nämlich als die komplexe Zahl mit dem Betrag und Argument, gegeben durch

$$|e^z| = e^x = \exp(\Re(z)) \quad \text{und} \quad \arg(e^z) = y = \Im(z)$$



e^z
z

Warum diese Definition?

Erstens:

Für reelles z, im Fall $y = \Im(z) = 0$, ist dass nichts anderes als die uns geläufige reelle e-Funktion, wegen $\arg(e^z) = 0$ ist dann $e^z = e^x$.

Zweitens:

Die Multiplikativität der e-Funktion bleibt auch im Komplexen erhalten:

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$$

Nach der Definition der Multiplikation hat nämlich $e^{z_1}e^{z_2}$ als Betrag und Argument:

$$|e^{z_1}| \cdot |e^{z_2}| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}\ , \ \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2$$

Beide Größen zusammen ergeben die komplexe Zahl $e^{z_1+z_2}$.

Der imaginäre Fall:

Für $z = it$ gilt $|e^z| = e^0 = 1$ und $\arg(e^z) = t$.

D.h. e^{it} liegt auf dem Einheitskreis mit Bogenmaß t. In kartesischen Koordinaten ausgedrückt ergibt sich $e^{it} = (\cos t, \sin t)$ bzw. die

Formel von Euler:

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$$

Anwendungen:

(i) Nach Multiplikativität und Euler gilt

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

(ii) In den komplexen Zahlen kann man *immer* Wurzeln ziehen: Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ kann man schreiben als

$$z = |z| e^{i \, \mathrm{arg}(z)}$$

Es gibt zwei Wurzeln:

$$\sqrt{|z|} e^{i \, \mathrm{arg}(z)/2} \quad \text{und} \quad -\sqrt{|z|} e^{i \, \mathrm{arg}(z)/2} = \sqrt{|z|} e^{i \, \mathrm{arg}(z)/2 + i\pi}$$

(iii) *Schwebungen:*

Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt wegen

$$e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t} = 2\cos(\varepsilon t)$$

(Euler!) die Geichung

$$e^{i(1+\varepsilon)t} + e^{i(1-\varepsilon)t} = (e^{i\varepsilon t} + e^{-i\varepsilon t})e^{it} = 2\cos(\varepsilon t)e^{it}$$

Betrachtet man den Realteil dieser Gleichung, so folgt die „Schwebungsgleichung“

$$\cos(1+\varepsilon)t + \cos(1-\varepsilon)t = 2\cos(\varepsilon t)\cos t$$

(iv) Nochmal: *Die Additionstheoreme des Sinus und Cosinus.*

Aus $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$ folgt

$$\begin{aligned}\cos(s+t) + i\sin(s+t) &= (\cos s + i\sin s)(\cos t + i\sin t) \\ &= (\cos s\cos t - \sin s\sin t) + i(\cos s\sin t + \sin s\cos t)\end{aligned}$$

also

$$\sin(s+t) = \sin s\cos t + \cos s\sin t$$

$$\cos(s+t) = \cos s\cos t - \sin s\sin t$$

Einheitswurzeln.

Sei n eine natürliche Zahl. Die komplexe Zahl

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

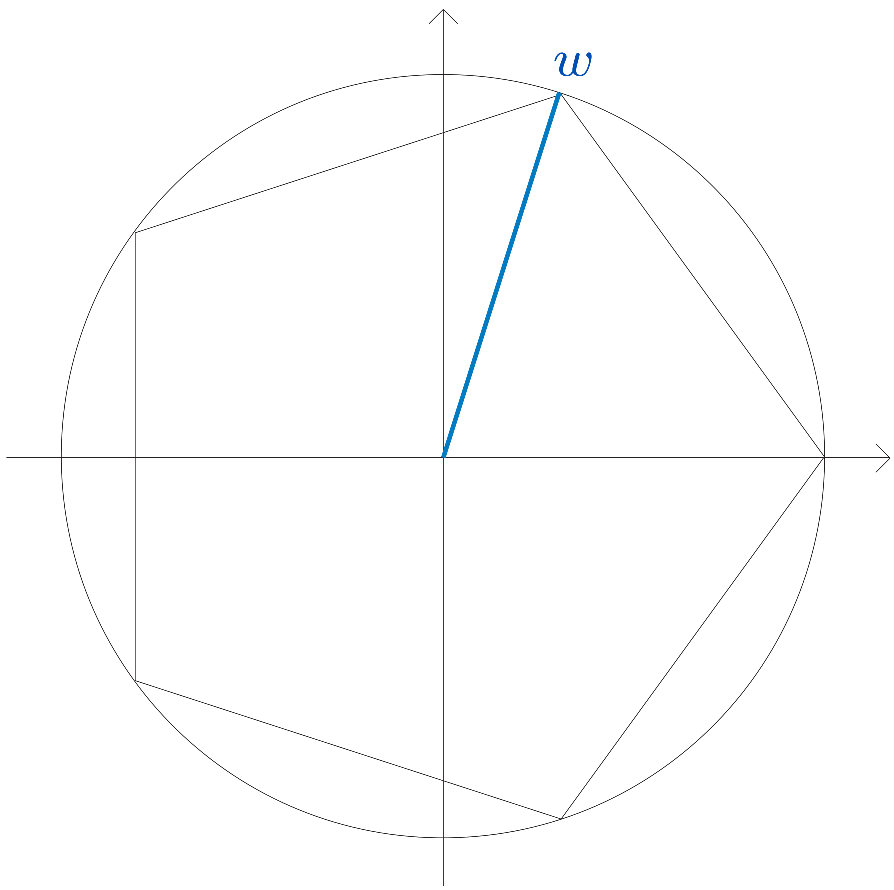
mit

$$|w| = 1 \quad \text{und} \quad \arg(w) = \frac{2\pi}{n}$$

löst die Gleichung

$$z^n = 1$$

Der Fall $n = 5$:



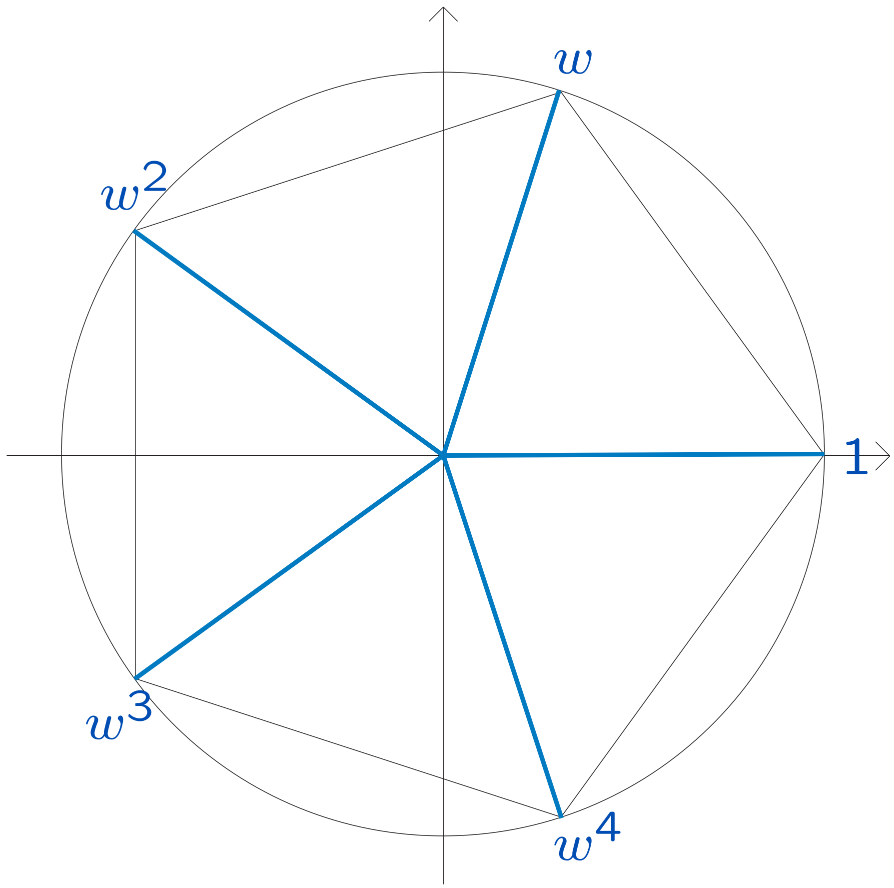
Auch die komplexen Zahlen

$$1 = w^0 \ , \ w \ , \ w^2 \ , \ w^3 \dots \ , w^k = e^{2\pi i k/n}$$

liegen auf dem Einheitskreis. Sie erfüllen ebenfalls die Gleichung $z^n = 1$, wegen

$$(w^k)^n = w^{kn} = (w^n)^k = 1^k = 1$$

Die fünf Lösungen von $z^5 = 1$:



Ab w^n wiederholen sich die Potenzen periodisch, wegen $w^n = 1$. Diese n komplexen Zahlen $w^0 = 1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ heißen die n-*ten Einheitswurzeln*.

Es gilt

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$$

was geometrisch völlig einleuchtet. Algebraisch folgt dies aus der Gleichung

$$0 = w^n - 1 = (w-1)(1 + w + w^2 + \dots w^{n-1})$$