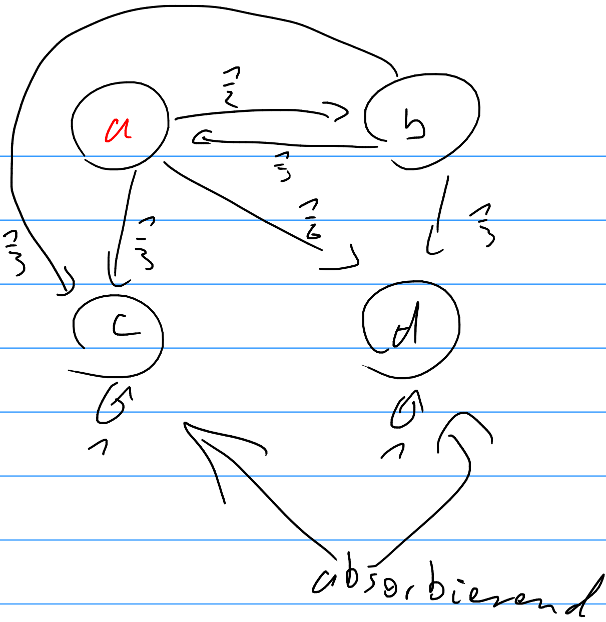
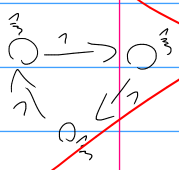
6. X sei eine Markovkette auf der Menge $S := \{a, b, c, d\}$ mit der durch die folgenden Eigenschaften festgelegten Übergangsmatrix P:



- Die Chancen, von a aus im nächsten Schritt a, b, c oder d zu erreichen, stehen im Verhältnis $0 : 3 : 2 : 1$.
- Die Chancen, von b aus im nächsten Schritt a, b, c oder d zu erreichen, stehen im Verhältnis $1 : 0 : 1 : 1$.
- $P(c, c) = P(d, d) = 1$.

$0 : 0 : 1 : 0$

iii) drei verschiedene Gleichgewichtsverteilungen von X.



$\cancel{\pi(a) \cdot P(a,b) = \pi(b) \cdot P(b,a)}$

nicht bei gerichteten

x alle Vorgänger von a

$$\pi(a) = \pi(x) \cdot P(x,a) + \dots$$
$$= \pi(b) \cdot P(b,a)$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi(b)$$

$$\pi(b) = \tfrac{1}{2} \pi(a)$$
$$\pi(c) = \tfrac{2}{3} \pi(a) + \tfrac{1}{3} \pi(b) + 1 \cdot \pi(c)$$
$$\pi(d) = \tfrac{1}{6} \pi(a) + \tfrac{1}{3} \pi(b) + 1 \cdot \pi(d)$$

$$(0, 0, 1, 0) = (\pi(a), \pi(b), \pi(c), \pi(d))$$
$$(0, 0, 0, 1)$$
$$(0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$(0, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

I $\pi(a) = \frac{1}{3}\pi(b)$

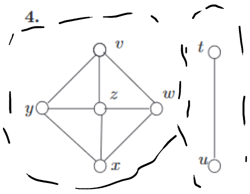
II $\pi(b) = \frac{1}{2}\pi(a)$

II in I einsetzen

$\pi(a) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi(a)\right) = \frac{1}{6}\pi(a) \quad \Big| -\frac{1}{6}\pi(a)$

$\frac{5}{6}\pi(a) = 0$

4.



Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt X auf der Knotenmenge $S = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ des links abgebildeten *nicht zusammenhängenden*, ungerichteten Graphen G: von jedem Zustand $a \in S$ geht man im nächsten Schritt zu einem rein zufällig gewählten Nachbarn von a. Wir erinnern, dass eine Verteilung π auf S eine *reversible Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix* P heißt, wenn gilt:

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a) \quad \text{für alle } a, b \in S.$$

a) Begründen Sie, warum die Verteilung π mit den Gewichten $\pi(t) = \pi(u) = 1/2$, $\pi(v) = \pi(w) = \pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 0$, eine reversible Gleichgewichtsverteilung der gewöhnlichen Irrfahrt auf G ist.

b) Geben Sie noch mindestens zwei weitere Gleichgewichtsverteilungen der gewöhnlichen Irrfahrt auf G an.

c) Für $a \in S$ sei T_a die erste Treffzeit von a. Berechnen Sie $\mathbf{E}_y[T_z]$.

$$\pi(k) = \frac{\text{Grad}(k)}{2 \# \text{Kanten}}$$

links : $0{,}4$ rechts $0{,}6$

$\pi(y) = 0{,}4 \cdot \frac{3}{16}$ $\pi(t) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{2}$

$\pi(z) = 0{,}4 \cdot \frac{4}{16}$ $\pi(u) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{2}$

links : 0 rechts : 1

(in Aufgabe gegeben)

links : 1 rechts : 0

$\pi(v) = \pi(w) = \pi(x) = \pi(y) = \frac{3}{16}$ $\pi(u) = \pi(t) = 0$

$\pi(z) = \frac{4}{16}$

$\pi(z) = \frac{4}{18}$

$\pi(v) = \pi(w) = \pi(x) = \pi(y) = \frac{3}{18}$

$\pi(u) = \pi(t) = \frac{1}{18}$

---

a) $\pi(a) \cdot P(a,b) = \pi(b) \cdot P(b,a)$

$\pi(u) \cdot P(u,t) \overset{?}{=} \pi(t) \cdot P(t,u)$

$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1$

Stationary / Gleichgewicht

$\forall a \in S \qquad \pi(a) = \sum_{\substack{x \in \\ \text{Vorgänger}(a)}} \pi(x) \cdot P(x, a)$

reversible

$\forall a, b \in S \qquad \pi(a) \cdot P(a, b) = \pi(b) \cdot P(b, a)$

5. In einer Population bestehend aus g Individuen ist der Mittelwert $\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} w_j$ eines bestimmten individuellen Merkmals gleich μ. In einer ohne Zurücklegen gezogenen Stichprobe mit Umfang $n\,(\geq 20)$ ergibt sich der Stichprobenmittelwert 30 $= M_n$ und die Stichprobenstandardabweichung 5. $= s$
Bestimmen Sie daraus ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für den Populationsmittelwert μ, wenn

(i) g sehr groß gegenüber n ist

(ii) g doppelt so groß ist wie n.

2 σ-Umgebung

$$\{\mu \in [M_n \pm 2\sigma_{M_n}]\}$$

$$= \{M_n \in [\mu \pm 2\sigma_{M_n}]\}$$

Beidemale dürfen Sie mit der Normalapproximation rechnen. (Hinweis zu (ii) In einer Übungsaufgabe hatten wir gezeigt, dass der Korrekturfaktor für die Varianz beim Ziehen ohne Zurücklegen gleich $\frac{g-n}{g-1} \approx \frac{g-n}{g}$ ist.)

$$\sigma_{M_n} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ii) $\sigma_{M_n} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g-n}{g}}$

$$Var(M_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j\right) = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{j=1}^{n} w_j\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(Var(w_1) + Var(w_2) + \dots Var(w_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n \cdot Var(w_1)\right)$$

$$= \frac{1}{n} Var(w_1)$$

$$\sigma_{M_n} = \sqrt{Var[M_n]} = \frac{\sqrt{Var(w_1)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ für einen einzelnen Zug

i) $\left[M_n - 2\frac{s}{\sqrt{n}},\ M_n + 2\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

$$= \left[30 - \frac{10}{\sqrt{n}},\ 30 + \frac{10}{\sqrt{n}}\right]$$

ii) $\left[M_n - 2\frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g-n}{g}},\ M_n + 2\frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g-n}{g}}\right]$

$$= \left[M_n - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ M_n + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[30 - \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{n}},\ 30 + \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}\right]$$

$$f_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ii $\sigma_{M_n} = ?\ \sqrt{Var(M_n)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g-n}{g}}$

$Var(M_n) = \frac{Var(w_n)}{n} \cdot \frac{g-n}{g}$

2. a) Wir betrachten den (klassischen) Anteilschätzer $H := K/n$ für die unbekannte Erfolgwahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. (Dabei ist n die Anzahl der Versuche (bzw. der Stichprobenumfang) und K die zufällige Anzahl der Erfolge.)
(i) Was ist die Standardabweichung von H (in Abhängigkeit von p und n?)
(ii) Begründen Sie die folgende Aussage: $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist eine obere Schranke für die Standadabweichung von H.
(iii) Für welches p wird die in (ii) angegebene Schranke erreicht?
(iv) Wie groß sollte (unter Verwendung von (ii)) der Stichprobenumfang n mindestens sein, wenn das Konfidenzintervall $[H - 0.02, H + 0.02]$ den Parameter p mit einer Wahrscheinlichkeit $\gtrapprox 95\%$ überdecken soll?

binomial (n,p)

i) $\sigma_H = \sigma_{\frac{K}{n}} = \frac{1}{n}\,\sigma_K = \frac{1}{n}\sqrt{n \cdot p(1-p)}$

$= \sqrt{p(1-p)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$\sigma_{\frac{K}{n}} = \sqrt{Var[\frac{K}{n}]} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\, Var[K]}$

$= \frac{1}{n}\sqrt{Var[K]} = \frac{1}{n}\,\sigma_K$

$\boxed{p(1-p) = p - p^2}$

ii) $\frac{d}{dp}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot (1-2p)$

Ableitung 0 setzen

$1 - 2p = 0 \iff p = \frac{1}{2}$

Für $p = \frac{1}{2}$ ist $\sigma_{\frac{K}{n}}$ maximal

$\sigma_{\frac{K}{n}}$ für $p = \frac{1}{2}$ $= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4n}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$

iii) $p = \frac{1}{2}$ eben berechnet

$[H \pm 0{,}02]$ soll $\hat{\approx}$ 95% KI

$$0{,}02 \stackrel{!}{\approx} 2\sigma_{\frac{k}{n}}$$

$$0{,}02 = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$$ ← „worst case" für $\sigma_{\frac{k}{n}}$

$$0{,}02 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{0{,}02} = 50$$

$$\sqrt{n} = 50$$

$$n = 2500$$