Vorlesung 12b

Eine zweite Klausur aus 2019/20

Bei den Aufgaben 1, 3, 5 und 6 können je 16 Punkte erreicht werden, bei den Aufgaben 2 und 4 können jeweils 18 Punkte erreicht werden.

Geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. 100 Objekte (nummeriert mit $i = 1, \ldots, 100$) werden – mit für jedes Objekt rein zufälliger und unabhängiger Platzwahl – auf 10000 Plätze verteilt, Mehrfachbelegung von Plätzen ist also erlaubt..

a) Es seien $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, 100\}$ mit $i_1 \neq i_2$. Wie wahrscheinlich ist es, dass Objekt i_1 und Objekt i_2 (mit $i_1 \neq i_2$) kollidieren, d.h. auf ein-und demselben Platz landen?

$n = 100$ $\qquad g = 10.000$

a) Gegeben Objekt i_1 fällt auf Platz j_1

Dann hat — " — i_2 genau einen Platz (von 10000)

nämlich j_1, der zu Kollision führt!

Antwort: $\boxed{\dfrac{1}{10000\cancel{0}}}$

b) Finden Sie den Erwartungswert μ der Anzahl X der (ungeordneten) Paare von Objekten, die kollidieren.

zweielementige Teilmengen

beachte: $(1,2) \neq (2,1)$

$\{1,2\} = \{2,1\}$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\binom{100}{2}} \mathbb{I}_{\{\text{Paar Nr. } k \text{ kollidiert}\}} \right] \overset{\text{Lin. des EW.}}{=} \sum_{k=1}^{\binom{100}{2}} \mathbb{P}\left[\text{Paar Nr. } k \text{ kollidiert}\right]$$

$$\overset{\text{a)}}{=} \binom{100}{2} \frac{1}{10000} = \binom{n}{2} \frac{1}{g}.$$

c) Wieso ist X nicht (exakt) binomialverteilt? (Ein anschauliches Argument genügt.)

Die Ereignisse {Objekt 1 und 2 kollidieren},

{Objekt 2 und 3 kollidieren}

{Objekt 1 und 3 kollidieren}

sind nicht unabhängig.

d) Es sei E_0 das Ereignis, dass keine Kollision eintritt. In der Vorlesung hatten wir eine Approximation der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit mittels Linearisierung der Exponentialfunktion kennengelernt, diese Approximation hatte die Form $\mathbf{P}(E_0) \approx e^{-\alpha}$. Finden Sie α für die angegebenen Zahlenwerte.

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{g}\right) \approx \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\frac{i}{g}} = e^{-\frac{1}{2g}n(n-1)} = e^{-\underbrace{1/g\binom{n}{2}}_{=\alpha}}$$

$$\alpha = \frac{99}{200}$$

Merke: α war der Erwartungswert der Gesamtzahl der Kollision (siehe Teil b)

Außer Konkurrenz: Poissonapproximation:

$Z_1, Z_2, \dots$ p-Münzwurf (d.h. (Z_i) unabhängig).

$np = \alpha$ Dann ist für großes n und kleines p

$\sum_{i=1}^{n} Z_i$ approximativ Pois(α)-verteilt.

2. X sei standard-exponentialverteilt, $Y := 3X + 5$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

$$\mathbb{E}[3X+5] = 3\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=1,\ \text{da } X \text{ Exp}(1)\text{-verteilt.}} + 5 = 8.$$

Lin. des EW

b) Berechnen Sie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t<5 \\ 1-e^{-\frac{t-5}{3}} & \text{sonst} \end{cases} \qquad f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<5 \\ \frac{1}{3}e^{-\frac{t-5}{3}} & \text{für } t>5 \end{cases}$$

$$P(Y \le t) = P\left(X \le \frac{t-5}{3}\right)$$

(i) für $t \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit, dass Y größer als t ausfällt,

(ii) eine Dichtefunktion f von Y.

$$Y = 3X+5$$

$$\{Y > t\} = \{3X+5 > t\} = \left\{X > \frac{t-5}{3}\right\}$$

$$\bar{F}(t) := P\left(X > \frac{t-5}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t<5 \\ e^{-\frac{t-5}{3}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t<5 \\ -\frac{1}{3}e^{-\frac{t-5}{3}} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t<5 \\ \frac{1}{3}e^{-\frac{t-5}{3}} & \ldots\ t \ge 5 \end{cases}$$

c) Finden Sie (gerne ohne weitere Rechnung) den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} af(a)da$ für die in Aufgabenteil b) (ii) zu findende Funktion f.

$$= \mathbb{E}[Y] \underset{a)}{=} 8$$

b) $b_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} K_{XY} = \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2} K_{XY} = \frac{1}{\sigma_X^2} \mathrm{Cov}[X,Y]$ $=: S'$

3. (X, Y) sei uniform verteilt auf der dreielementigen Menge $\{(-1,-1), (0,0), (1,$

$(1,2)\}$

a) Berechnen Sie

(i) $\mathbf{E}[X]$, (ii) $\mathbf{E}[Y]$, (iii) **Var** $[X]$, (iv) **Var**$[Y]$, (v) **Cov**$[X, Y]$.

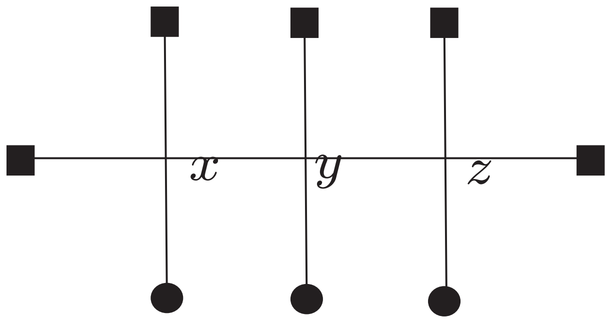
Transformations formel für EW

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[h((X,Y))] = \frac{1}{3}(-1)(-1) + \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} 1 \cdot 2 = 1$$

$$h: S' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x \cdot y$$

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0}\mathbb{E}[Y] = 1$$

4.



Die Menge S der Knoten des links skizzierten ungerichteten Graphen ist $S = A \cup B \cup C$. Dabei ist A die Menge, die aus den 5 mit ■ bezeichneten Knoten besteht, B die Menge, die aus den 3 mit ● bezeichneten Knoten besteht, und $C = \{x, y, z\}$ die Menge der 3 Knoten “in der Mitte”.

Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt X auf S. Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in x die Menge A vor der Menge B zu treffen,

b) die erwartete Anzahl von Schritten bis zum Treffen von $A \cup B$ bei Start in x,

c) die Gewichte der Gleichgewichtsverteilung von X.

5. Die Population S bestehe aus zwei großen Teilpopulationen A und B, wir haben also $S = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Die Größen von A und B stehen im Verhältnis $9 : 1$.

In der Teilpopulation A haben die Hälfte aller Individuen ein bestimmtes Merkmal M, in der Teilpopulation B haben 99% der Individuen das Merkmal M.

Jemand wählt erst rein zufällig ein Individuum aus S, und dann (abhängig vom Ausgang des ersten Zuges) rein zufällig ein zweites Individuum aus derjenigen Teilpopulation (A oder B), zu der das erste gewählte Individuum gehört.

Beide gewählten Individuen haben das Merkmal M. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören sie zur Teilpopulation B?

	M	M^c	
A	45	45	90
B	~~9.9~~	~~0.1~~	10

J_1 $\quad$ J_2

$\mathbb{P}(M|A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(M|B) = 0.99$

$$\boxed{\mathbb{P}(\underset{\substack{\text{Merkmal} \\ \text{vo } J_1}}{M}\underset{\substack{\text{Merkmal} \\ \text{vo } J_2}}{M}|A) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(MM|B) = 0.99 \times 0.99}$$

$$\mathbb{P}(MM) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(MM|A) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(MM|B) = 0.9 \cdot \ldots + 0.1 \cdot \ldots$$

$$\mathbb{P}(B|MM) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(MM|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(MM)} = 0.303$$

6. $X_1, \ldots, X_{30}$ seien identisch verteilt
mit Standardabweichung 2 und Erwartungswert μ_X,
$Y_1, \ldots, Y_{50}$ seien identisch verteilt
mit Standardabweichung 3 und Erwartungswert μ_Y.
Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{30}, Y_1, \ldots, Y_{50}$ seien unabhängig.
Es sei $M_X := \frac{1}{30}(X_1 + \cdots + X_{30})$, $M_Y := \frac{1}{50}(Y_1 + \cdots + Y_{50})$.

a) Berechnen Sie die Standardabweichungen von
(i) M_X, (ii) M_Y, (iii) $M_X - M_Y$.

b) Geben Sie ein um $M_X - M_Y$ zentriertes zufälliges Intervall an, das die Differenz $\mu_X - \mu_Y$ mit Wahrscheinlichkeit $\approx 95\%$ überdeckt. Verwenden Sie dabei die Normalapproximation.