Vorlesung 12

Eine Klausur aus 2019/20

Bei den Aufgaben 1, 3, 5 und 6 können je 16 Punkte erreicht werden, bei den Aufgaben 2 und 4 können jeweils 18 Punkte erreicht werden.

Bitte geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. a) Ein Land bestehe aus zwei Provinzen A und B, in der Provinz A leben 9mal so viele Menschen wie in der Provinz B. 70% der Bewohner der Provinz A leben in Großstädten, und 20% der Bewohner von Provinz B leben in Großstädten.

Wieviel Prozent der Großstatdtbewohner des Landes leben
in der Provinz A?

b) In der in a) beschriebenen Situation sei
J ein rein zufällig gewählter Bewohner des Landes,
X der Indikator des Ereignisses $\{J$ lebt in einer Großstadt$\}$
und Y der Indikator des Ereignisses $\{J$ lebt in der Provinz $A\}$.

Finden Sie die Übergangsmatrix im zweistufigen Experiment mit X als erster und Y als zweiter Stufe.

2. a) Y sei exponentialverteilt zum Parameter α.
(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Y \geq 4\}$?
(ii) Für welches α ist der Median der Verteilung von Y gleich 4?

b) X sei eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit Dichte $2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2/2}\, da$, $a \geq 0$. Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert

(ii) die Varianz

von X.

Hinweis zu (i): Was ist die Ableitung von $a \mapsto e^{-a^2/2}$?

Hinweis zu (ii): Hier dürfen Sie verwenden, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\, da$ die Varianz einer standard normalverteilten Zufallsvariablen ist - und die kennen Sie doch!

c) Z sei standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}$. Finden Sie die Dichte von $|Z|$. (Eine kurze Begründung genügt.)

d) X sei wie in Teil b).

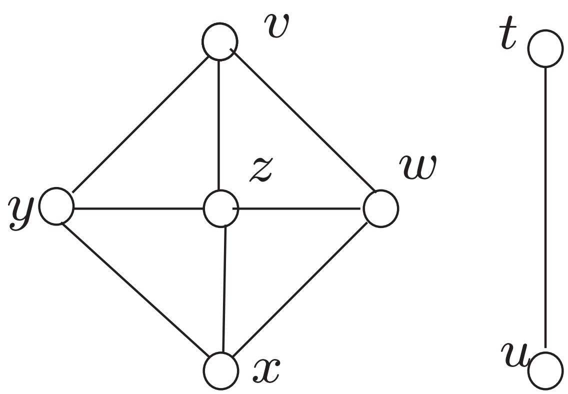
Geben Sie eine positive Zahl b an mit $\mathbf{P}(X \leq b) \approx 0.68$.

(Auch hier genügt eine kurze Begründung.)

3. a) Aus einer (als unendlich groß gedachten) Population $\mathcal{P}$, in der jedes Individuum entweder von Typ A oder vom Typ B ist, werden 100 Individuen rein zufällig gewählt. Davon haben 40 den Typ A und 60 den Typ B. Geben Sie eine auf diesen Daten basierende Realisierung eines approximativen 95%-Konfidenzintervalles für den Anteil p der Typ-A Intervalle in der Population an.

b) Wie ist das Ergebnis aus a) zu modifizieren, wenn $\mathcal{P}$ eine aus insgesamt (nur) $g = 200$ Individuen bestehende Population ist (und die Stichprobengröße nach wie vor 100 beträgt)?

4.

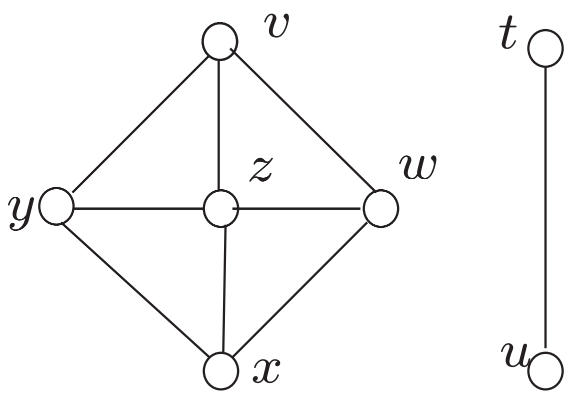


Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt X auf der Knotenmenge $S = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ des links abgebildeten *nicht zusammenhängenden*, ungerichteten Graphen G: von jedem Zustand $a \in S$ geht man im nächsten Schritt zu einem rein zufällig gewählten Nachbarn von a.

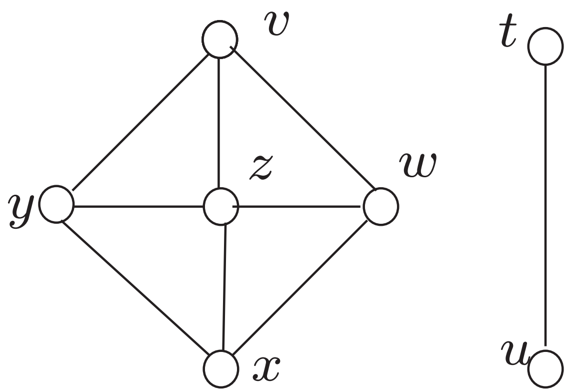
Wir erinnern, dass eine Verteilung π auf S eine *reversible Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix* P heißt, wenn gilt:

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a) \quad \text{für alle } a, b \in S.$$

a) Begründen Sie, warum die Verteilung π mit den Gewichten
$\pi(t) = \pi(u) = 1/2$,
$\pi(v) = \pi(w) = \pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 0$, eine reversible Gleichgewichtsverteilung der gewöhnlichen Irrfahrt auf G ist.



b) Geben Sie noch mindestens zwei weitere Gleichgewichtsverteilungen der gewöhnlichen Irrfahrt auf G an.



c) Für $a \in S$ sei T_a die erste Treffzeit von a.
Berechnen Sie $\mathbf{E}_y[T_z]$.

5. Wir betrachten die Farbfolge der Züge aus einer Pólya-Urne, in der sich anfänglich zwei blaue und eine rote Kugel befinden. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Zug eine rote Kugel gezogen wird, gleich 1/3.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten vier Zügen jeweils nur rote Kugeln gezogen werden.

(ii) Was ist (für $n \in \mathbb{N}$) die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten n Zügen jeweils nur rote Kugeln gezogen werden?

(iii) Es sei T die Nummer des Zuges, zu dem erstmals eine blaue Kugel gezogen wird. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(T > n)$.

(iv) Wir haben in der Vorlesung bewiesen, dass $\mathbf{E}[T] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(T > n)$.

Berechnen Sie damit den Erwartungswert von T. Hilfreich dabei ist die Gleichheit $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

6. 20 mit $i = 1, 2, \ldots, 20$ nummerierte Plätze werden ohne Mehrfachbelegung in rein zufälliger Ordnung mit 20 Objekten besetzt. 8 dieser Objekte haben den Typ A, 7 Objekte den Typ B und 5 Objekte den Typ C.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Platz 1 und 2 mit zwei Objekten von Typ A besetzt?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Platz 1 und 2 mit zwei Objekten desselben Typs besetzt?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert

(i) der Anzahl von Paaren aufeinanderfolgender Plätze $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, 19$, die mit Objekten desselben Typs besetzt sind,

(ii) der Anzahl von Paaren aufeinanderfolgender Plätze $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, 19$, die mit Objekten unterschiedlichen Typs besetzt sind.