Vorlesung 10

Schätzen mit Verlass:

Konfidenzintervalle

1. Schätzen von Anteilen

(Buch S. 121-122)

Große Population (♀ und ♂)

mit unbekanntem Weibchenanteil p

In einer Stichprobe vom Umfang $n = 53$

gab es 23 Weibchen.

Wie zuverlässig ist $\frac{23}{53}$ als Schätzung für p ?

Goldene Idee der Statistik:

In einem idealisiert gedachten Szenario
interpretiert man den Schätzwert
als Realisierung einer Zufallsvariablen
und rechnet mit der Variabilität dieser Zufallsvariablen.

In unserem Eingangsbeispiel wird
die Stichprobenziehung (idealisiert!)
als p-Münzwurf gedeutet.

Als *Schätzer* für p betrachten wir die *Zufallsvariable*

$$H := \frac{K}{n},$$

mit $\quad K :=$ Anzahl der “Erfolge”.

Als *Schätzer* für p betrachten wir die *Zufallsvariable*

$$H := \frac{K}{n},$$

mit $K :=$ Anzahl der “Erfolge”.

H ist die relative Häufigkeit der Erfolge (die “Trefferquote”).

$$\sigma_H = ?$$

Als *Schätzer* für p betrachten wir die *Zufallsvariable*

$$H := \frac{K}{n},$$

mit $\quad K :=$ Anzahl der “Erfolge”.

H ist die relative Häufigkeit der Erfolge (die “Trefferquote”).

$$\sigma_H = ?$$

K ist Bin(n, p)-verteilt. Also:

$$\boxed{\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}}$$

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

H ist approximativ normalverteilt

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

H ist approximativ normalverteilt

mit Erwartungswert $\mu_H = p$ und Standardabweichung σ_H.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_p(|p - H| \leq 2\sigma_H) \approx 0.95$$

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

H ist approximativ normalverteilt

mit Erwartungswert $\mu_H = p$ und Standardabweichung σ_H.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_p(|p - H| \leq 2\sigma_H) \approx 0.95$$

$$\mathbf{P}_p\left(p \in [H - 2\sigma_H,\, H + 2\sigma_H]\right) \approx 0.95$$

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

H ist approximativ normalverteilt

mit Erwartungswert $\mu_H = p$ und Standardabweichung σ_H.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_p(|p - H| \leq 2\sigma_H) \approx 0.95$$

$$\mathbf{P}_p\left(p \in [H - 2\sigma_H,\ H + 2\sigma_H]\right) \approx 0.95$$

Das zufällige Intervall $[H - 2\sigma_H,\ H + 2\sigma_H]$ überdeckt

den Parameter p mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95.

In der Praxis ist auch σ_H

(aus der *einen* vorliegenden Stichprobe) zu schätzen.

Als Schätzer für $\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$ bietet sich an:

$$\widehat{\sigma_H} := \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{H(1-H)}$$

$$\mathbf{P}_p\left(p \in [H - 2\sigma_H,\ H + 2\sigma_H]\right) \approx 0.95$$

überträgt sich auf

$$\mathbf{P}_p\left(p \in [H - 2\widehat{\sigma_H},\ H + 2\widehat{\sigma_H}]\right) \approx 0.95.$$

Das zufällige Intervall

$$I := [H - 2\widehat{\sigma_H},\, H + 2\widehat{\sigma_H}]$$

ist ein

Konfidenzintervall für p

mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.95

oder kurz ein

approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.

In unserem Eingangsbeispiel ($n = 53,\ k = 23$)

hatten die beobachtetet Realisierungen von H und $\widehat{\sigma_H}$

die Werte

$$h = 23/53 = 0.43,$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)} = \sqrt{\frac{0.43 \cdot 0.57}{53}} = 0.07.$$

Als Realisierung von $I = [H - 2\widehat{\sigma_H},\ H + 2\widehat{\sigma_H}]$ ergab sich

$$[0.43 - 2 \cdot 0.07,\ 0.43 + 2 \cdot 0.07] = [0.29, 0.57].$$

Man beachte:

Nicht der Parameter p ist zufällig, sondern das Intervall I.

Im Jargon der Statistik wird oft
sowohl der Schätzer (die Zufallvariable) H
als auch der Schätzwert (die Zahl) h
mit dem Symbol $\widehat{p}$ bezeichnet.

Auf der nächsten Folie,
die das Obige zsammenfasst,
steht $\widehat{p}$ für die Zufallsvariable H
(vgl. Buch S. 122):

Das zufällige Intervall

$$I := \left[\widehat{p} - \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})},\ \widehat{p} + \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}\right]$$

ist ein

Konfidenzintervall für p

mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.95

oder kurz ein

approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.

Dabei sollte $np(1-p)$ “nicht zu klein” sein.
Eine Faustregel für die Anwendbarkeit ist: $nh \geq 9$ und $n(1-h) \geq 9$.

Ein frischer Blick auf Konfidenzintervalle

(samt Wiederholung des Obigen):

n sei fest, und K sei sei die Anzahl der Treffer

bei n Versuchen und Erfolgswahrscheinlichkeit p,

d.h. es gilt

$$\mathbf{P}_p(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ein frischer Blick auf Konfidenzintervalle

(samt Wiederholung des Obigen):

n sei fest, und K sei sei die Anzahl der Treffer

bei n Versuchen und Erfolgswahrscheinlichkeit p,

d.h. es gilt

$$\mathbf{P}_p(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wie oben setzen wir $H := \frac{K}{n}$, $\widehat{p} := \frac{k}{n}$.

Im Geist von Übungsaufgabe 27.S definieren wir folgende Teilmenge von $\{0, 1, \ldots, n\} \times [0, 1]$:

$$M_{\mathsf{N}} := \left\{ (\widehat{p}, p) : |\widehat{p} - p| \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \widehat{p}\,(1 - \widehat{p})} \right\}$$

Im Geist von Übungsaufgabe 27.S definieren wir folgende

Teilmenge von $\{0, 1, \ldots, n\} \times [0, 1]$:

$$M_{\mathsf{N}} := \left\{ (\widehat{p}, p) : |\widehat{p} - p| \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \widehat{p}\,(1 - \widehat{p})} \right\}$$

Für nicht zu kleines npq gilt

wegen der approximativen Normalität von K

(und weil $\sqrt{\frac{1}{n} H\,(1 - H)}$ ein passender Schätzer für σ_H ist):

$$\mathbf{P}_p((H, p) \in M_{\mathsf{N}}) \approx 0.95.$$

Für die Intervalle $I_{\mathsf{N}}(\widehat{p}) := \{p : (\widehat{p}, p) \in M_{\mathsf{N}}\}$ haben wir für jedes $p \in [0, 1]$ die Ereignisgleichheit

$$\{p \in I_{\mathsf{N}}(H)\} = \{(H, p) \in M_{\mathsf{N}}\}.$$

Für die Intervalle $I_{\mathsf{N}}(\widehat{p}) := \{p : (\widehat{p}, p) \in M_{\mathsf{N}}\}$ haben wir für jedes $p \in [0, 1]$ die Ereignisgleichheit

$$\{p \in I_{\mathsf{N}}(H)\} = \{(H, p) \in M_{\mathsf{N}}\}.$$

Also gilt

$$\mathbf{P}_p(p \in I_{\mathsf{N}}(H)) = \mathbf{P}_p((H, p) \in M_{\mathsf{N}})$$

Für die Intervalle $I_{\mathsf{N}}(\widehat{p}) := \{p : (\widehat{p}, p) \in M_{\mathsf{N}}\}$ haben wir für jedes $p \in [0, 1]$ die Ereignisgleichheit

$$\{p \in I_{\mathsf{N}}(H)\} = \{(H, p) \in M_{\mathsf{N}}\}.$$

Also gilt

$$\mathbf{P}_p(p \in I_{\mathsf{N}}(H)) = \mathbf{P}_p((H, p) \in M_{\mathsf{N}})$$

und für nicht zu kleines npq

$$\mathbf{P}_p(p \in I_{\mathsf{N}}(H)) \approx 0.95.$$

So lange die Normalapproximation passt, gilt

$$M_{\mathsf{N}} \approx \left\{ \left(\frac{k}{n}, p\right) : k \text{ liegt zwischen dem 0.025-Quantil und dem 0.975-Quantil der Bin}(n,p)\text{-Verteilung, } 0 \le p \le 1. \right\}$$

So lange die Normalapproximation passt, gilt

$$M_{\mathsf{N}} \approx \left\{ \left(\frac{k}{n}, p\right) : k \text{ liegt zwischen dem } 0.025\text{-Quantil und dem } 0.975\text{-Quantil der Bin}(n,p)\text{-Verteilung, } 0 \le p \le 1. \right\}$$

Für $p = 0$ bzw. $p = 1$ wird die Approximation unbrauchbar:
$\left(\frac{k}{n}, 0\right)$ gehört zu M_{N} nur für $k = 0$,
und $\left(\frac{k}{n}, 1\right)$ gehört zu M_{N} nur für $k = n$.

So lange die Normalapproximation passt, gilt

$$M_{\mathsf{N}} \approx \left\{ \left(\frac{k}{n}, p\right) : k \text{ liegt zwischen dem 0.025-Quantil und dem 0.975-Quantil der Bin}(n,p)\text{-Verteilung, } 0 \le p \le 1. \right\}$$

Für $p = 0$ bzw. $p = 1$ wird die Approximation unbrauchbar:

$\left(\frac{k}{n}, 0\right)$ gehört zu M_{N} nur für $k = 0$,

und $\left(\frac{k}{n}, 1\right)$ gehört zu M_{N} nur für $k = n$.

Auch für kleine npq wird die Approximation schlecht.

Vorschlag von Clopper und Pearson (1934):

$$M_C := \left\{ \left(\frac{k}{n}, p\right) : k \text{ liegt zwischen dem 0.025-Quantil und dem 0.975-Quantil der Bin}(n,p)\text{-Verteilung}, \ 0 \leq p \leq 1. \right\}$$

Vorschlag von Clopper und Pearson (1934):

$M_{\mathsf{C}} := \Big\{ \Big(\frac{k}{n}, p\Big)$: k liegt zwischen dem 0.025-Quantil und dem 0.975-Quantil der Bin(n, p)-Verteilung, $0 \le p \le 1.\Big\}$

Damit bekommen wir für *alle* $p \in [0, 1]$:

$$\mathbf{P}_p((H, p) \in M_{\mathsf{C}}) \geq 0.95.$$

Vorschlag von Clopper und Pearson (1934):

$$M_C := \left\{ \left(\frac{k}{n}, p\right) : k \text{ liegt zwischen dem 0.025-Quantil und dem 0.975-Quantil der Bin}(n,p)\text{-Verteilung, } 0 \le p \le 1. \right\}$$

Damit bekommen wir für *alle* $p \in [0,1]$:

$$\mathbf{P}_p((H,p) \in M_C) \geq 0.95.$$

Nach demselben Muster wie oben setzen wir

$$I_C(\widehat{p}) := \{p : (\widehat{p}, p) \in M_C\}$$

und bekommen jetzt für *alle* $p \in [0,1]$:

$$\mathbf{P}_p(p \in I_C(H)) \geq 0.95.$$

Beispiel: Von 1500 Senioren bekam die (per Losentscheid ermittelte) eine Hälfte (die *Behandlungsgruppe*) einen Impfstoff verabreicht und die andere Hälfte (die *Kontrollgruppe*) ein Placebo.
Fünf der Senioren haben sich infiziert, alle gehörten zur Kontrollgruppe.
(Quelle:
`https://www.nejm.org/doi/pdf/10.1056/NEJMoa2034577?articleToc`
Table 3, Age group ≥ 75 yr)

Als Realisierung des 95% Clopper-Pearson Konfidenzintervalls für die Erfolgswahrscheinlichkeit des Impfstoffes ergibt sich $[0.478, 1]$ (denn $0.478^5 = 0.025$).
Dieses Intervall schließt den Parameterwert $p = 1/2$ ein:
auch wenn alles rein zufällig zugegangen wäre,
hätte ein so extremes Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 5%.

2. Schätzung des Erwartungswertes

einer Verteilung auf $\mathbb{R}$

(Lageschätzung)

$$m := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

wird gedacht als eine Realisierung der Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt

mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

Anders als bei der Anteilschätzung ist hier σ

i.a. keine Funktion von μ.

$\bar{X}$ ist ein Schätzer für μ.

$\bar{X}$ hat Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.

Ein Schätzer für σ^2 ist

$$S^2 := \tfrac{1}{n-1}\big((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\big)$$

$\bar{X}$ ist ein Schätzer für μ.

$\bar{X}$ hat Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.

Ein Schätzer für σ^2 ist

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\left((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right)$$

Im Jargon der Statistik schreibt man oft s^2 statt S^2 und verwendet s^2 dann auch zur Bezeichung von Schätzwerten.
Anders als im Buch werden wir hier auf den Folien an der oben definierten Bezeichnung S^2 festhalten und s^2 für die Bezeichnung einer Realisierung von S^2 reservieren.

2a. Großer Stichprobenumfang n

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

$\bar{X} - \mu$ ist approximativ N$(0, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.

2a. Großer Stichprobenumfang n

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

$\bar{X} - \mu$ ist approximativ N$(0, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.

Bei bekanntem σ ist also für große n

$$\left[\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

2a. Großer Stichprobenumfang n

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert uns:

$\bar{X} - \mu$ ist approximativ N$(0, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.

Bei bekanntem σ ist also für große n

$$\left[\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

In der Praxis hat man auch σ aus den Daten zu schätzen.

Für große n ist auch

$$J := \left[\bar{X} - 2\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ

Dieses Intervall enthält keine unbekannten Parameter.

Für große n ist auch

$$J := \left[\bar{X} - 2\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ

Dieses Intervall enthält keine unbekannten Parameter.

Der beobachtete Wert (die Realisierung) von S ist

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots (x_n - \bar{x})^2\right)}$$

Für große n ist auch

$$J := \left[\bar{X} - 2\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ

Dieses Intervall enthält keine unbekannten Parameter.

Der beobachtete Wert (die Realisierung) von S ist

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots (x_n - \bar{x})^2\right)}$$

s ist ein Schätzwert für σ.

Die Realisierung von J ist somit $\left[\bar{x} - 2\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

2a. Kleiner Stichprobenumfang n

Für kleine n (etwa: $n \leq 10$) und (exakt bzw. annähernd)

normalverteilte X_i

macht man sich zunutze, dass die Verteilung von

$T := \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$ (exakt bzw. annähernd) so verteilt ist wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und N$(0, 1)$ verteilten $N_0, \ldots, N_{n-1}$.

Satz (W. Gosset (alias “Student”, 1908), R. Fisher (1924))

Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt,

dann ist $\quad T := \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und $\mathrm{N}(0, 1)$ verteilten $N_0, \dots, N_{n-1}$.

Das folgt aus der Rotationssymmetrie
der Standard-Normalverteilung im $\mathbb{R}^n$
mit einem ähnlichen Argument wie dem in F7a1.12, vgl. Buch S. 138.

Satz (W. Gosset (alias "Student", 1908), R. Fisher (1924))

Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt,

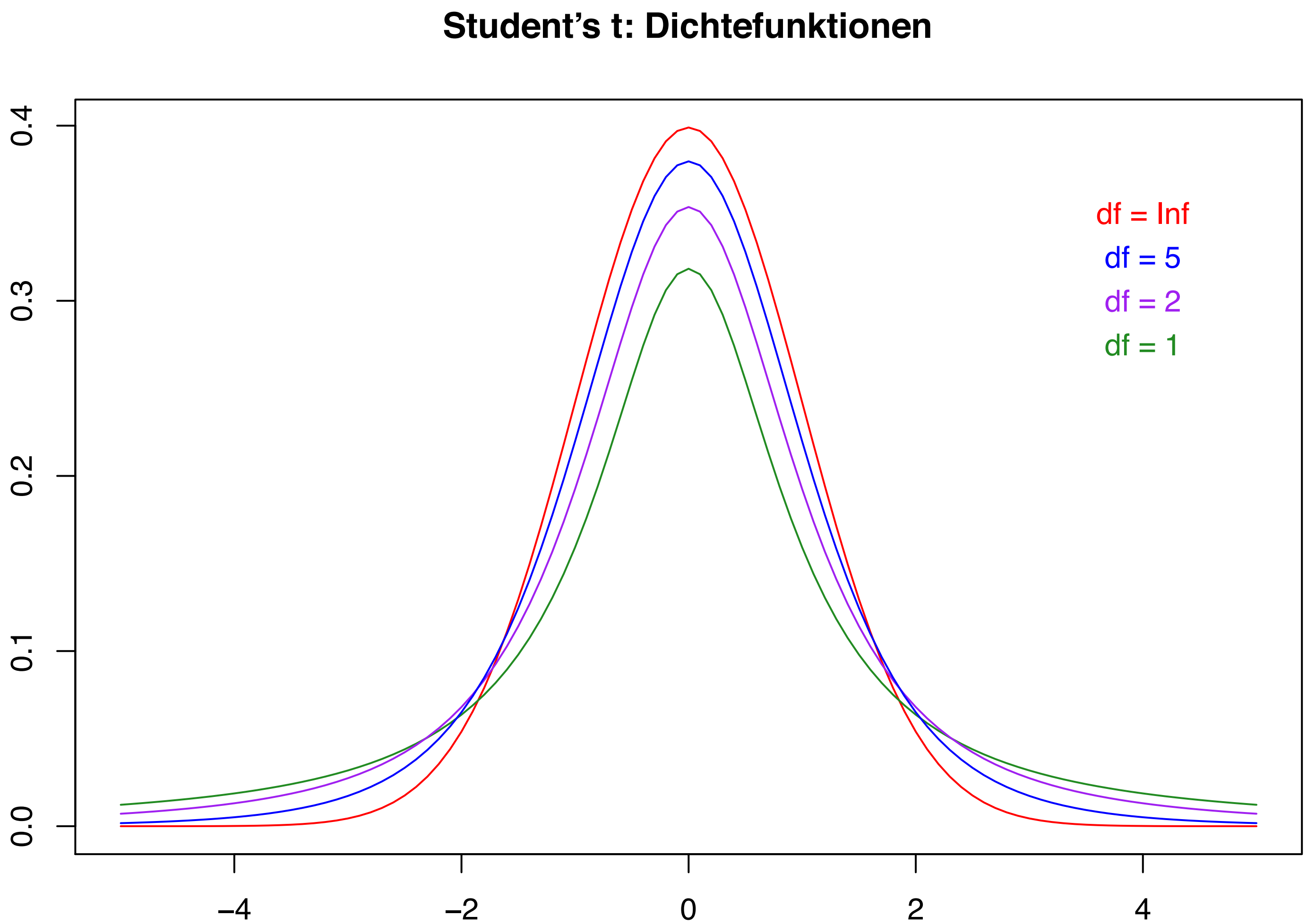
dann ist $\quad T := \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \quad$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und $\mathrm{N}(0, 1)$ verteilten $N_0, \dots, N_{n-1}$.

T heit (die aus $X_1, \dots, X_n$ gewonnene) t-Statistik.

Die Verteilung von T_{n-1} heißt t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit $n - 1$ Freiheitsgraden.



"df" steht hier für "degrees of freedom" , d.h. "Freiheitsgrade"

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

Für $n \to \infty$ ist T_{n-1} asymptotisch N$(0, 1)$-verteilt

(Gesetz der großen Zahlen für den Nenner von T_{n-1}).

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

Für $n \to \infty$ ist T_{n-1} asymptotisch N$(0, 1)$-verteilt

(Gesetz der großen Zahlen für den Nenner von T_{n-1}).

Je kleiner n, um so mehr schwankt der Nenner, und

um so *breitschultriger* ist die Verteilung von T_{n-1}

Z.B. für $n = 6$: $\quad \mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95$.

Satz (W. Gosset (alias “Student”, 1908), R. Fisher (1924))

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\quad T := \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \quad$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und N$(0, 1)$ verteilten $N_0, \ldots, N_{n-1}$.

Folgerung: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, dann ist für jedes $c > 0$:

$$\mathbf{P}(|T_{n-1}| \le c) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}\right| \le c\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Folgerung: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist für jedes $c > 0$:

$$\mathbf{P}(|T_{n-1}| \leq c) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}\right| \leq c\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Für ein 95%-Konfidenzintervall bestimme c so,

dass sich für die linke Seite 0.95 ergibt.

Z.B. für $n = 6$: $\quad \mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95.$

Der passende R-Befehl ist `qt(0.975, 5)`,

mit der Ausgabe 2.57

Denn: $\mathbf{P}(T_5 \leq 2.57) = 0.975.$

Man sagt: Das 0.975-Quantil der $t(5)$-Verteilung ist 2.57.

3. Ein Konfidenzintervall für den Median

(Buch S. 128)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, mit Verteilung ρ.

Es gibt Situationen, in denen die Schätzung der “Lage” von ρ

über den Stichprobenmittelwert problematisch ist –

etwa wenn ρ so viel Masse “weit draußen” hat,

dass $\sigma^2 = \mathbf{Var}[X_1]$ sehr groß ist.

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, mit Verteilung ρ.
Es gibt Situationen, in denen die Schätzung der "Lage" von ρ
über den Stichprobenmittelwert problematisch ist –
etwa wenn ρ so viel Masse "weit draußen" hat,
dass $\sigma^2 = \mathbf{Var}[X_1]$ sehr groß ist.

In diesem Fall ist es günstig,
einen "robusteren" Lageschätzer zu verwenden:

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty,\nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu,\infty)) \geq 1/2$ gilt.

Wenn es nur eine Zahl ν gibt mit $\rho((-\infty,\nu]) = 1/2$

(also z. B. wenn $\rho([\ell,r]) = 1$ gilt

und ρ eine strikt positive Dichtefunktion besitzt),

dann ist ν **der** Median von ρ.

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Wenn es mehrere Zahlen ν gibt mit $\rho((-\infty, \nu]) = 1/2$,

dann ist jede dieser Zahlen **ein** Median von ρ.

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Wenn es mehrere Zahlen ν gibt mit $\rho((-\infty, \nu]) = 1/2$,

dann ist jede dieser Zahlen **ein** Median von ρ.

Bsp: Für die uniforme Verteilung auf $[0, 1] \cup [2, 3]$

ist jedes $\nu \in [1, 2]$ ein Median.

Wie schätzt man den Median?

Wie schätzt man den Median?

Die *Ordnungsstatistiken* $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ sind die aufsteigend geordneten $X_1, \ldots, X_n$.

Wie schätzt man den Median?

Die *Ordnungsstatistiken* $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$

sind die aufsteigend geordneten $X_1, \ldots, X_n$.

Sei j eine natürliche Zahl mit $0 \leq j < n/2$.

Ein Kandidat für ein Konfidenzintervall für den Median ist

$$[X_{(1+j)}, X_{(n-j)}].$$

Wie schätzt man den Median?

Die *Ordnungsstatistiken* $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$

sind die aufsteigend geordneten $X_1, \ldots, X_n$.

Sei j eine natürliche Zahl mit $0 \leq j < n/2$.

Ein Kandidat für ein Konfidenzintervall für den Median ist

$$[X_{(1+j)}, X_{(n-j)}].$$

Z.B. für $j = 0$:

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \notin [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) = \mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) + \mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu)\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \notin [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) = \mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) + \mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu)\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) \leq 2^{-n}$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu) \leq 2^{-n}.$$

Also:

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \,.$$

Bsp: $n = 6$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \,.$$

Bsp: $n = 6$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(6)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{32} = 0.97 \;:$$

Das Konfidenzintervall $[X_{(1)}, X_{(6)}]$ für den Median
hält die Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.97 ein.