

Vorlesung 9b

Markovketten II

Teil 3:

Das Ehrenfest-Modell

(Buch S. 109-110)

veröffentlicht 1909 von Paul und Tatjana Ehrenfest, konzipiert
als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:

ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.

In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d
ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.

Hat diese Dynamik eine Gleichgewichtsverteilung,
und wenn ja, wie sieht sie aus?

Zur Illustration betrachten wir erst nur den Fall $d = 3$.

Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind dann

(für $\ell = 0, 1, 2, 3$):

$$P(\ell, \ell + 1) = \frac{3 - \ell}{3}, \quad P(\ell, \ell - 1) = \frac{\ell}{3}.$$

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden nummeriert mit 1, 2, 3.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \text{..... in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Dynamik des Feinmodells:

Eine Nummer $i \in \{1, 2, 3\}$ wird rein zufällig ausgewählt
und das a_i wird “geflippt”
(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt die einfache Irrfahrt auf dem gewöhnlichen Würfel
mit der Knotenmenge $\{0, 1\}^3$ (siehe Teil 2).

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:
die uniforme Verteilung auf $\{0, 1\}^3$
(denn jeder Knoten hat gleich viele Nachbarn).

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$h(a) := a_1 + a_2 + a_3.$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^3$,
dann ist $Z^{(1)} + Z^{(2)} + Z^{(3)}$ Binomial($3, \frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial($3, \frac{1}{2}$)-Verteilung
ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell
mit $d = 3$ Kugeln:

$$2^{-3} \binom{3}{\ell} \frac{3 - \ell}{3} = 2^{-3} \binom{3}{\ell + 1} \frac{\ell + 1}{3}. \quad \square$$

Was 3 recht ist, ist einem allgemeinen d billig:

Die Binomial($d, \frac{1}{2}$)-Verteilung
ist ein reversibles Gleichgewicht
für das Ehrenfest-Modell mit d Kugeln.

Dazu werden jetzt die Teilchen durchnummeriert mit $1, \dots, d$.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \text{..... in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, \dots, a_d) \in \{0, 1\}^d.$$

Dynamik des Feinmodells:

Ein $i \in \{1, \dots, d\}$ wird rein zufällig ausgewählt
und das a_i wird “geflippt”
(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt einfach die Irrfahrt auf dem Würfel
mit der Knotenmenge $\{0, 1\}^d$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:
die uniforme Verteilung auf $\{0, 1\}^d$

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$h(a) := \sum_{i=1}^d a_i$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(d)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$,

dann ist $\sum_{i=1}^d Z^{(i)}$ Binomial($d, \frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial($d, \frac{1}{2}$)-Verteilung
ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell:

$$2^{-d} \binom{d}{\ell} \frac{d - \ell}{d} = 2^{-d} \binom{d}{\ell + 1} \frac{\ell + 1}{d}. \quad \square$$