Vorlesung 9b

Markovketten II

Teil 1:

Transport von Verteilungen

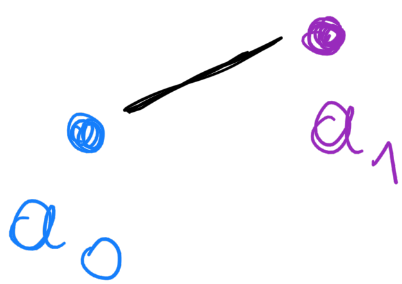
(Buch S. 107-108)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Markovkette auf dem Zustandsraum S

mit Übergangsw'keit P und Startverteilung ρ_0.

Dann gilt:

$$\mathbf{P}_{\rho_0}(X_0 = a_0, X_1 = a_1) = \rho_0(a_0)P(a_0, a_1)$$



$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Markovkette auf dem Zustandsraum S

mit Übergangsw'keit P und Startverteilung ρ_0.

Dann gilt:

$$\mathbf{P}_{\rho_0}(X_0 = a_0, X_1 = a_1) = \rho_0(a_0)P(a_0, a_1)$$

Summation über $a_0 \in S$ ergibt

$$\mathbf{P}_{\rho_0}(X_1 = a_1) = \sum_{a_0 \in S} \rho_0(a_0)P(a_0, a_1)$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine Markovkette auf dem Zustandsraum S

mit Übergangsw'keit P und Startverteilung ρ_0.

Dann gilt:

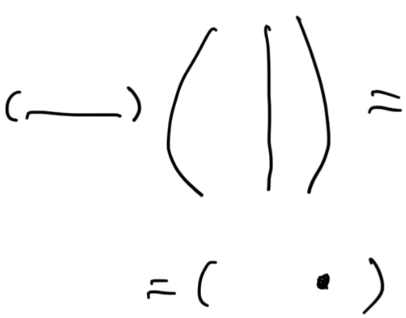
$$\mathbf{P}_{\rho_0}(X_0 = a_0, X_1 = a_1) = \rho_0(a_0)P(a_0, a_1)$$

Summation über $a_0 \in S$ ergibt

$$\mathbf{P}_{\rho_0}(X_1 = a_1) = \sum_{a_0\in S} \rho_0(a_0)P(a_0, a_1)$$

Die rechte Seite kann man lesen als Produkt

des Zeilenvektors ρ_0 mit der Matrix P:



$$\boxed{\sum_{a_0\in S} \rho_0(a_0)P(a_0, a_1) := (\rho_0 P)(a_1)}$$

$\mathbf{P}_\rho(X_n = c)$ zerlegt nach X_{n-1} ergibt die **Rekursion**

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{P}_\rho(X_n = c)}_{\varrho_n(c)} = \sum_{b\in S} \underbrace{\mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)}_{=:\varrho_{n-1}(b)}\, P(b, c)}$$

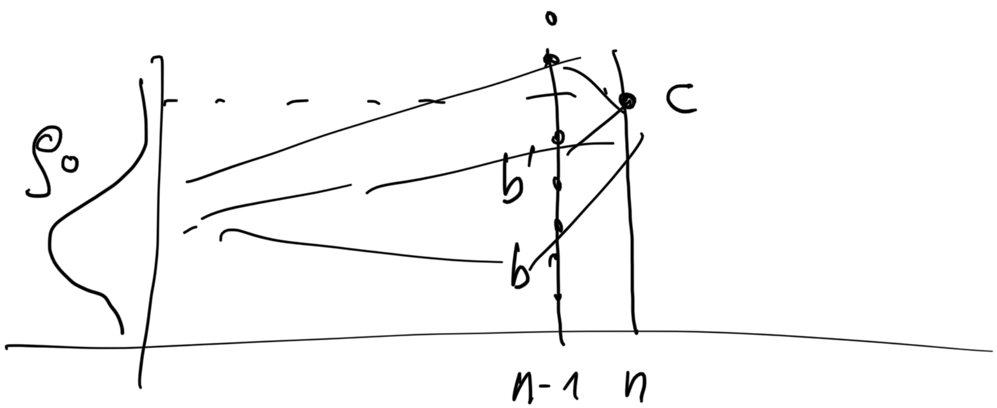
$$\boxed{\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b,c)}$$

Mit

$$\rho_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

lautet diese Rekursion

$$\boxed{\rho_n(c) = \sum_{b \in S} \rho_{n-1}(b) P(b,c)\,, \quad n \geq 1}$$



$$\boxed{\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b, c)}$$

Mit

$$\rho_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\ , \quad n = 0, 1, \ldots$$

lautet diese Rekursion

$$\boxed{\rho_n(c) = \sum_{b \in S} \rho_{n-1}(b) P(b, c)\ , \quad n \geq 1}$$

oder in Vektor-Matrix-Schreibweise, mit ρ_n als Zeilenvektor:

$$\boxed{\rho_n = \rho_{n-1} P\ , \quad n \geq 1.}$$