

Vorlesung 9a

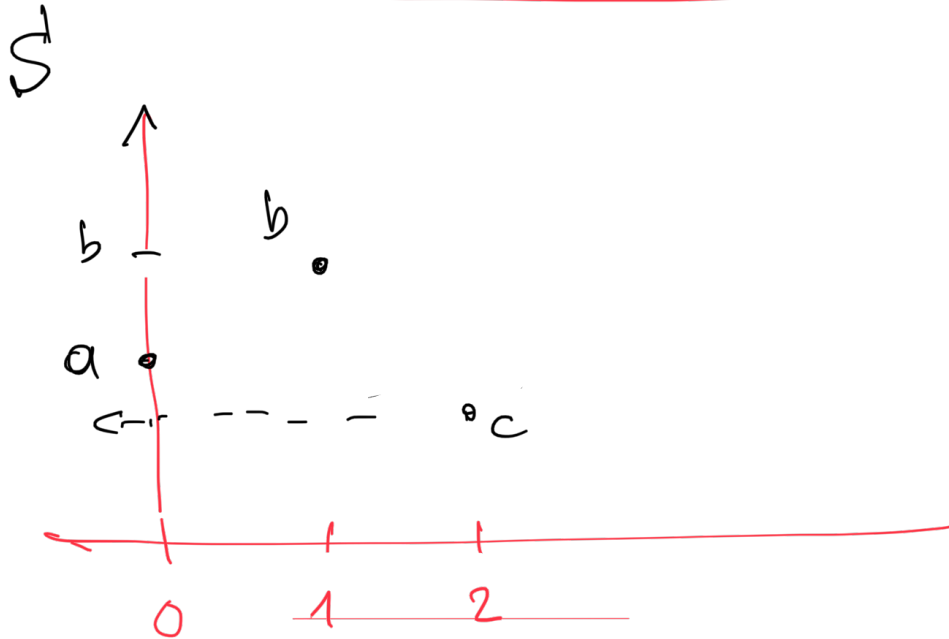
Markovketten

Teil 2

Zerlegung nach dem ersten Schritt

(Buch S. 94)

$$P_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$



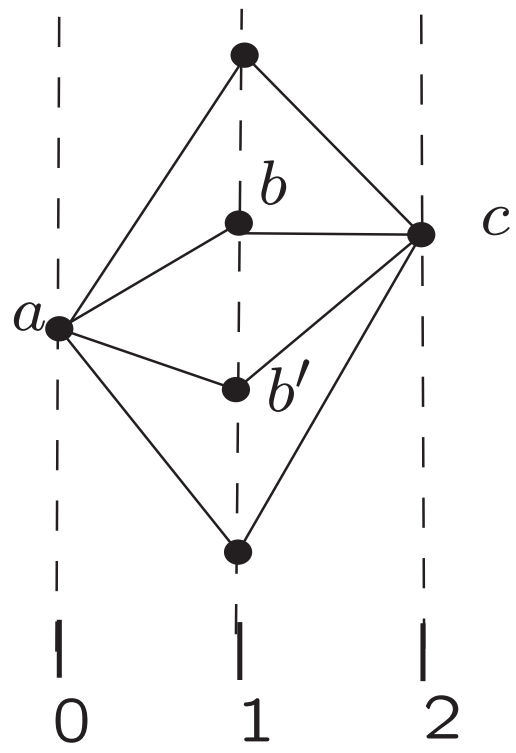
$$P_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

Summation über $b \in S$:

$$P_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

oder Verteilung von
Zerlegung von X_2 nach X_1 ,

Zerlegung nach dem ersten Schritt



$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

Die **rechte Seite** lässt sich übrigens
als Matrixprodukt verstehen: Für

$$P^2 := P \cdot P :=$$

das Produkt der Matrix P mit sich selbst

gilt

$$P^2(a, c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

jetzt für n statt 2:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \\ &= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \\ &= P(a, a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \dots, X_{n-1} = a_n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{b, a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(a, b) P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$= \sum_{b \in S} P(a, b) \sum_{a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{b, a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(a, b) P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$= \sum_{b \in S} P(a, b) \sum_{a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

Damit bekommen wir die

Zerlegung der Verteilung von X_n

nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c) .$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in S} P(a, a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

Die rechte Seite ist übrigens nichts anderes als der Eintrag in Zeile namens a und Spalte namens c der Matrix $P^n := P \cdots P$

(also der n -ten Potenz von P bzg. der Matrixmultiplikation)