Vorlesung 9a

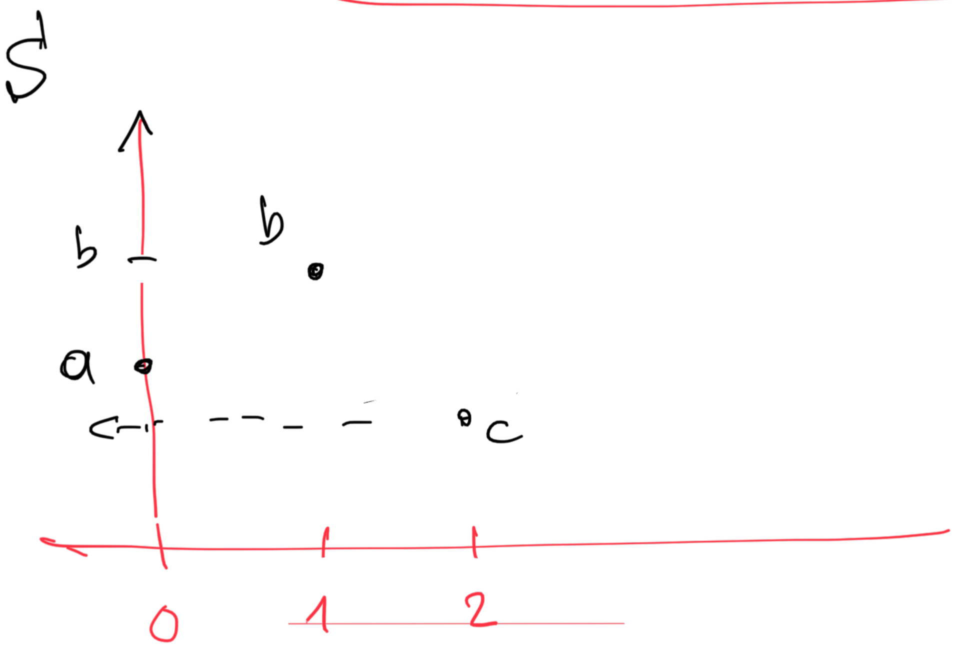
Markovketten

Teil 2

Zerlegung nach dem ersten Schritt

(Buch S. 94)

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$



$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$

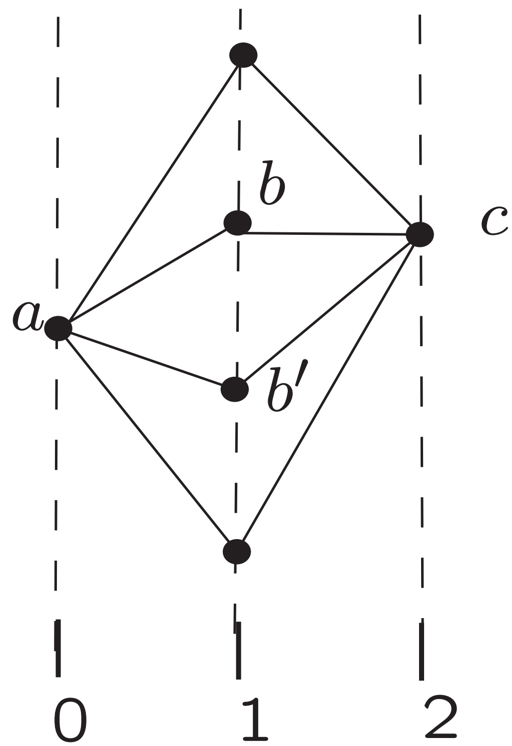
Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \boxed{\sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)}$$

oder Verteilung von

Zerlegung von X_2 nach X_1,

Zerlegung nach dem ersten Schritt



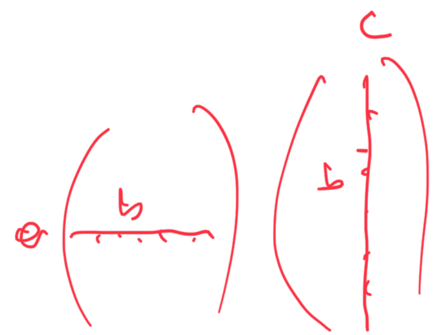
b
c
a
b'
0
1
2

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

Die rechte Seite lässt sich übrigens

als Matrixprodukt verstehen: Für



$$P^2 := P \cdot P :=$$

das Produkt der Matrix P mit sich selbst

gilt

$$P^2(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

jetzt für n statt 2:

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

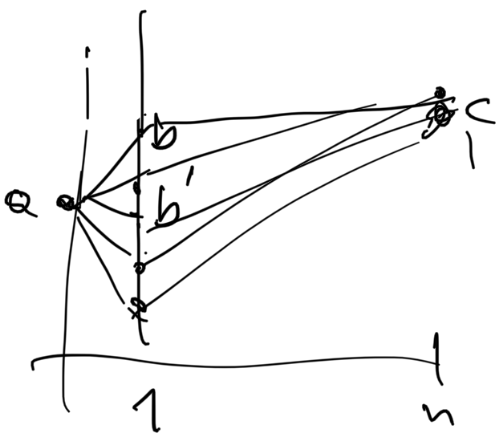
$$= P(a, a_1)\underbrace{P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)}$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{b,a_2,\dots,a_{n-1}\in S} P(a,b)P(b,a_2)\cdots P(a_{n-1},c)$$

$$= \underbrace{\sum_{b\in S} P(a,b)}\ \underbrace{\sum_{a_2,\dots,a_{n-1}\in S} P(b,a_2)\cdots P(a_{n-1},c)}_{=\mathbb{P}_b[X_{n-1}=c)}$$



$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{b, a_2, \ldots, a_{n-1} \in S} P(a,b) P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$= \sum_{b \in S} P(a,b) \sum_{a_2, \ldots, a_{n-1} \in S} P(b, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

Damit bekommen wir die

Zerlegung der Verteilung von X_n

nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\,.$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in S} P(a, a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

$$\mathbf{P}_a(X_n = c)$$

$$= \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in S} P(a, a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, c)$$

Die rechte Seite ist übrigens nichts anderes als der

Eintrag in Zeile namens a und Spalte namens c

der Matrix $P^n := P \cdots P$

(also der n-ten Potenz von P bzg. der Matrixmultiplikation)