Vorlesung 9a

Markovketten

Teil 1

Markovketten als
spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

(Buch S. 94)

Zur Erinnerung:

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

hat man für jedes $i = 1, 2, \dots$

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(\underbrace{a_1 \dots a_i}, a_{i+1}) = \underbrace{\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1})},$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \dots, X_i = a_i\}$.

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die "Startverteilung")

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = a_0) = \rho(a_0)$$

$a_0 \in S$

(z.B.: $S = \{1, 2, 3\}$)

$$\mathbb{P}_\rho(X_0 = a_0, X_1 = a_1) = \rho(a_0) P(a_0, a_1)$$

$$\boxed{\mathbb{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n) = \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)}$$

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die "Startverteilung")

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0) = \rho(a_0).$$

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

z.B. $S = \{1, 2, 3\}$

$a = 1$

$\delta_1(1) = 1$

$\delta_1(2) = 0$

$\delta_1(3) = 0$

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

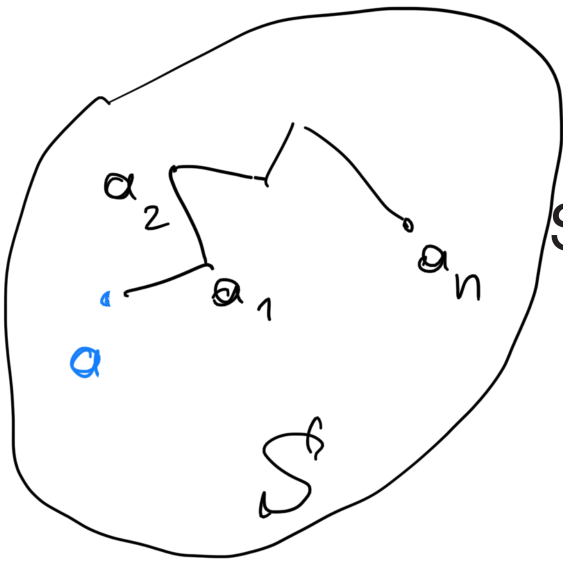
und erhält

$$\mathbb{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = P(a, a_1) P(a_1, a_2)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).



Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

$$\boxed{\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)\ .}$$

Beispiele für Markovketten

(Buch S. 98)

Auch (Z_n) ist eine MK!

$P(\text{Kopf}, \text{Zahl}) = 1/2$

$P(\text{Zahl}, \text{Zahl}) = 1/2$

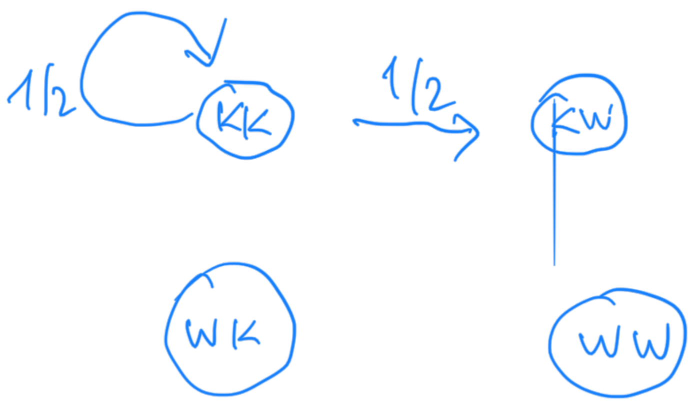
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \ldots$ unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



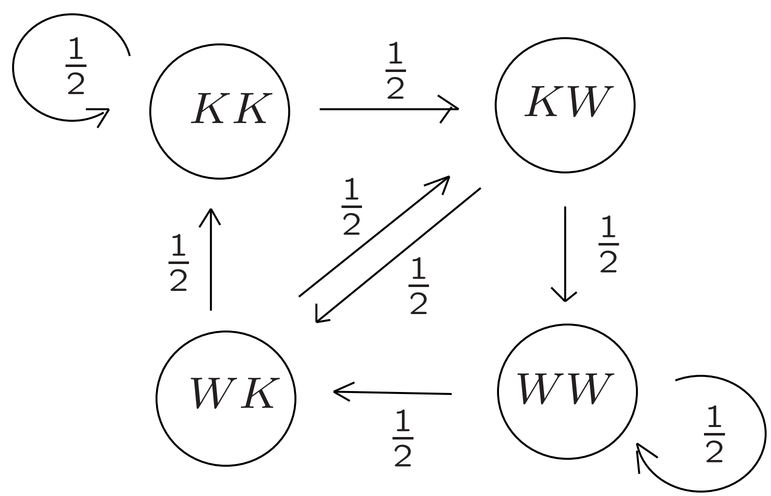
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \ldots$ unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:

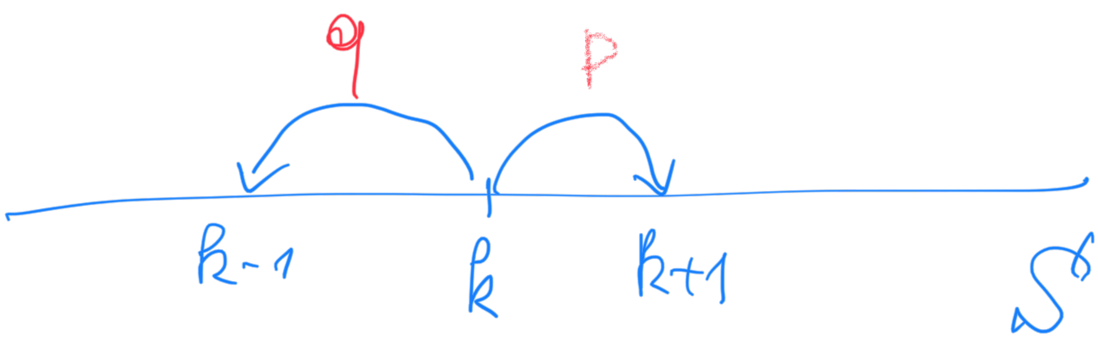


Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$, $S := \mathbb{Z}$

$$P(k, k+1) := p, \quad P(k, k-1) := q$$



$X_1 = X_0 + Z_1$ mit Z_1 (± 1) p-Münzwurf

Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$, $S := \mathbb{Z}$

$$P(k, k+1) := p, \quad P(k, k-1) := q$$

Für die Markovkette X mit Übergangsmatrix P und Start in a ist wegen der Multiplikationsregel $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ so verteilt wie

$$(a, a + Z_1, \ldots, a + Z_1 + \cdots + Z_n),$$

wobei $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig sind mit $\mathbf{P}(Z_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(Z_i = -1) = q$.

$\mathbb{E}_a[X_n] = ?$

$= a + p \cdot 1 - q \cdot (-1)$

$+ \ldots$

$+ \ldots$

$= a + n(p-q)$

$\mathbb{E}[Z_i] = p - q$

Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$, $S := \mathbb{Z}$

$$P(k, k+1) := p, \quad P(k, k-1) := q$$

Für die Markovkette X mit Übergangsmatrix P und Start in a ist wegen der Multiplikationsregel $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ so verteilt wie $(a, a + Z_1, \ldots, a + Z_1 + \cdots + Z_n)$, wobei Z_1, Z_2, … unabhängig sind mit $\mathbf{P}(Z_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(Z_i = -1) = q$.

Daraus sieht man sofort:

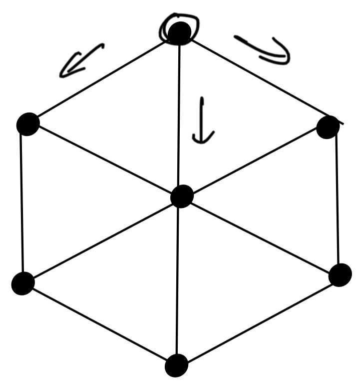
$$\mathbf{E}_a[X_n] = \mathbf{E}[a + Z_1 + \cdots + Z_n] = a + n(p - q),$$

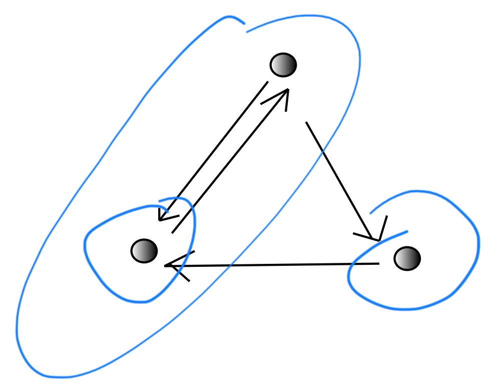
$$\mathbf{Var}_a[X_n] = \mathbf{Var}[a + Z_1 + \cdots + Z_n] = 4npq.$$

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen





$S :=$ die Menge der Knoten.

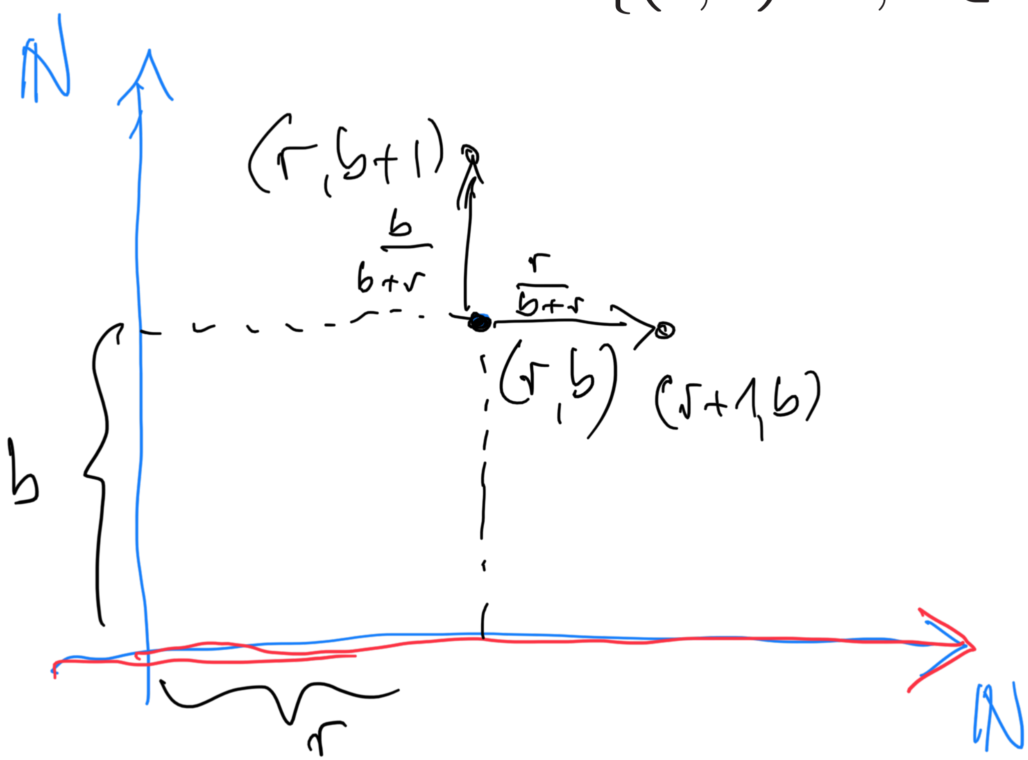
Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(r,b) : r, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$



Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(r,b) : r,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((r,b),(r+1,b)) := \frac{r}{r+b}\,,$$

$$P((r,b),(r,b+1)) := \frac{b}{r+b}\,.$$

Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(r,b) : r,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((r,b),(r+1,b)) := \frac{r}{r+b}\,,$$

$$P((r,b),(r,b+1)) := \frac{b}{r+b}\,.$$

Das modelliert dieselbe Situation wie in Vorlesung 8b2,
allerdings “sparsamer”:
als aktueller Zustand wird nicht der gesamte bisherige Pfad, sondern nur die Anzahl der ~~weißen~~ roten und blauen Kugeln in der Urne mitgeführt