

# Vorlesung 8b

## Mehrstufige Zufallsexperimente

### Teil 2

### Die Pólya-Urne

Oder

Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu ....

(Buch S. 94-95)

In einer Urne befinden sich anfangs  
eine rote und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und  
gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe  
zurückgelegt.

Die Zufallsvariable  $Z_i$  mit Werten in  $\{0, 1\}$  bezeichne die  
im  $i$ -ten Zug vorgefundene Farbe (1 für rot, 0 für blau).

Wir nennen dann  $(Z_1, \dots, Z_n)$  auch  
eine (Standard-) *Pólya-Folge* der Länge  $n$ .

$$P(Z_1 = 0) = P(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

(das ist die **W**'keit, beim zweiten Zug blau zu ziehen,  
wenn beim ersten Zug blau gezogen wurde)

$$P_0(Z_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P_{00}(Z_3 = 0) = \frac{3}{4}$$

$$P_{01}(Z_3 = 0) = \frac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = 0) = \frac{1 + \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = 0\}}{2 + i}$$

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = 1) = \frac{1 + \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = 1\}}{2 + i}$$

Z. B. ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_8) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)) &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{3}{5} \frac{2}{6} \frac{3}{7} \frac{4}{8} \frac{5}{9} \\ &= \frac{5! 3!}{9!}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq k \leq n$  hat jede 01-Zugfolge  $(a_1, \dots, a_n)$   
mit  $a_1 + \dots + a_n = k$  dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*) \quad \mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1}$$

Für  $0 \leq k \leq n$  hat jede 01-Zugfolge  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_1 + \dots + a_n = k$  dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*) \mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Es gibt  $\binom{n}{k}$  derartige Zugfolgen.

Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \dots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Fazit:

Die Anzahl der  
nach  $n$  Zügen hinzugekommenen roten Kugeln  
ist uniform verteilt in  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

## **Pólya-Urne mit $g$ Farben:**

(Buch S. 95)

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Vor dem ersten Zug sind  $g$  Kugeln in der Urne, von jeder Farbe eine.

Wie sind die Zugänge nach  $n$  Zügen verteilt?

$$S_{n,g} = \{k = (k_1, \dots, k_g) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_g = n\}$$

ist die Menge der Besetzungen von  $g$  Plätzen mit  $n$  Objekten  
(vgl Vorlesung 2a3).

$X_{jn} := \#$  Zugänge der Farbe  $j$  nach  $n$  Schritten.

$$X_n := (X_{1n}, \dots, X_{gn})$$

ist eine Zufallsvariable mit Wertebereich  $S_{n,g}$ .

Wie sieht die Verteilung von  $X_n$  aus?



Sei  $(k_1, \dots, k_g) \in S_{n,g}$ ,  
d.h.  $k_j \in \mathbb{N}_0$  mit  $k_1 + \dots + k_g = n$ .

Man sieht wie im Fall  $g = 2$ :

Alle möglichen Zugfolgen  
von  $(1, \dots, 1)$  nach  $(1 + k_1, \dots, 1 + k_g)$   
haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_g!}{g \cdot (g+1) \cdots (n+g-1)} = \frac{k_1! \cdots k_g!}{(n+g-1)!} (g-1)! .$$

Es gibt  $\binom{n}{k_1, \dots, k_g} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_g!}$  solche Zugfolgen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \dots, X_{gn} = k_g) &= n! \frac{(g-1)!}{(n+g-1)!} \\ &= \frac{1}{\binom{n+g-1}{n}} \end{aligned}$$

d.h.  $(X_{1n}, \dots, X_{gn})$  ist uniform verteilt auf  $S_{n,g}$ .

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung  $(1, \dots, 1)$

liefert uniform verteilte Besetzungen!