

Vorlesung 8b

Mehrstufige Zufallsexperimente

Teil 1

Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

(Buch S. 94-95)

bisher Zweistufigkeit nur von “heute” zu “morgen”
jetzt zusätzlich von “heute & morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \dots, n - 1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \dots a_i, a_{i+1}) = P_{a_1 \dots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}),$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i + 1)$ -ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \dots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n
ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) \\ = & \mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1})P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n) \\ & = \dots \\ & = \rho(a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n) \\ =: & \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \cdots \mathbf{P}_{a_1 \dots a_{n-1}}(X_n = a_n) \end{aligned}$$

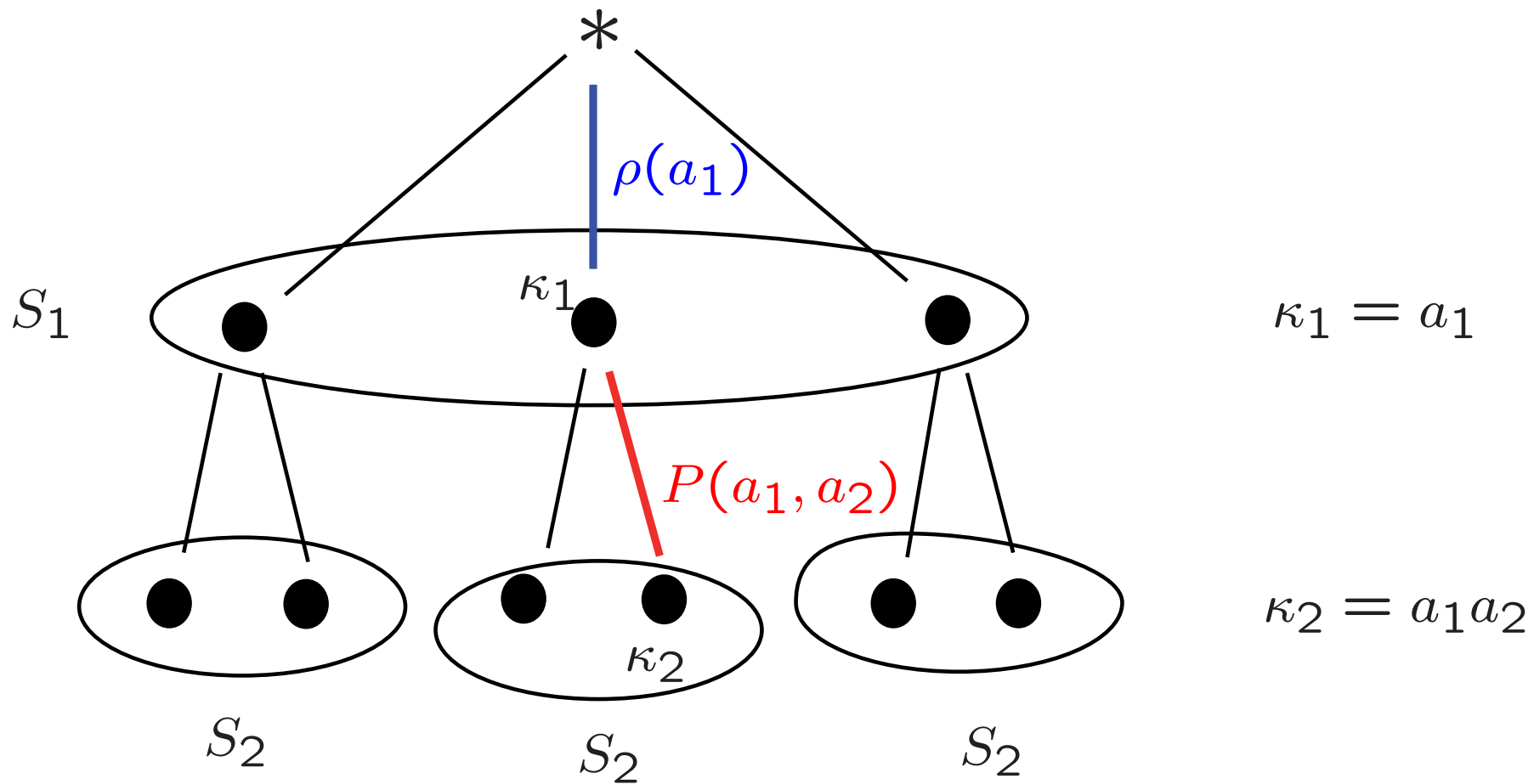
Dabei ist $a_i \in S_i :=$ Wertebereich von X_i .

Mehrstufige Zufallsexperimente kann man
durch Bäume veranschaulichen

(Buch S. 95)

Wir erinnern uns an die

**Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten
durch *Bäume*:**



$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2).$
 (Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Was 2 recht ist, ist $i + 1$ billig:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe i*

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1), \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1$, $\kappa_i = a_1 \dots a_i$, $\kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die *Wahrscheinlichkeit*, in einem bestimmten Blatt zu enden,

ergibt sich als *Produkt* der *Kantengewichte*

entlang des *Weges* von der *Wurzel* zum *Blatt*.