Vorlesung 8b

Mehrstufige Zufallsexperimente

Teil 2

Die Pólya-Urne

Oder

Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu ....

(Buch S. 94-95)

In einer Urne befinden sich anfangs

eine rote und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

In einer Urne befinden sich anfangs

eine rote und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (1 für rot, 0 für blau).

In einer Urne befinden sich anfangs

eine rote und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

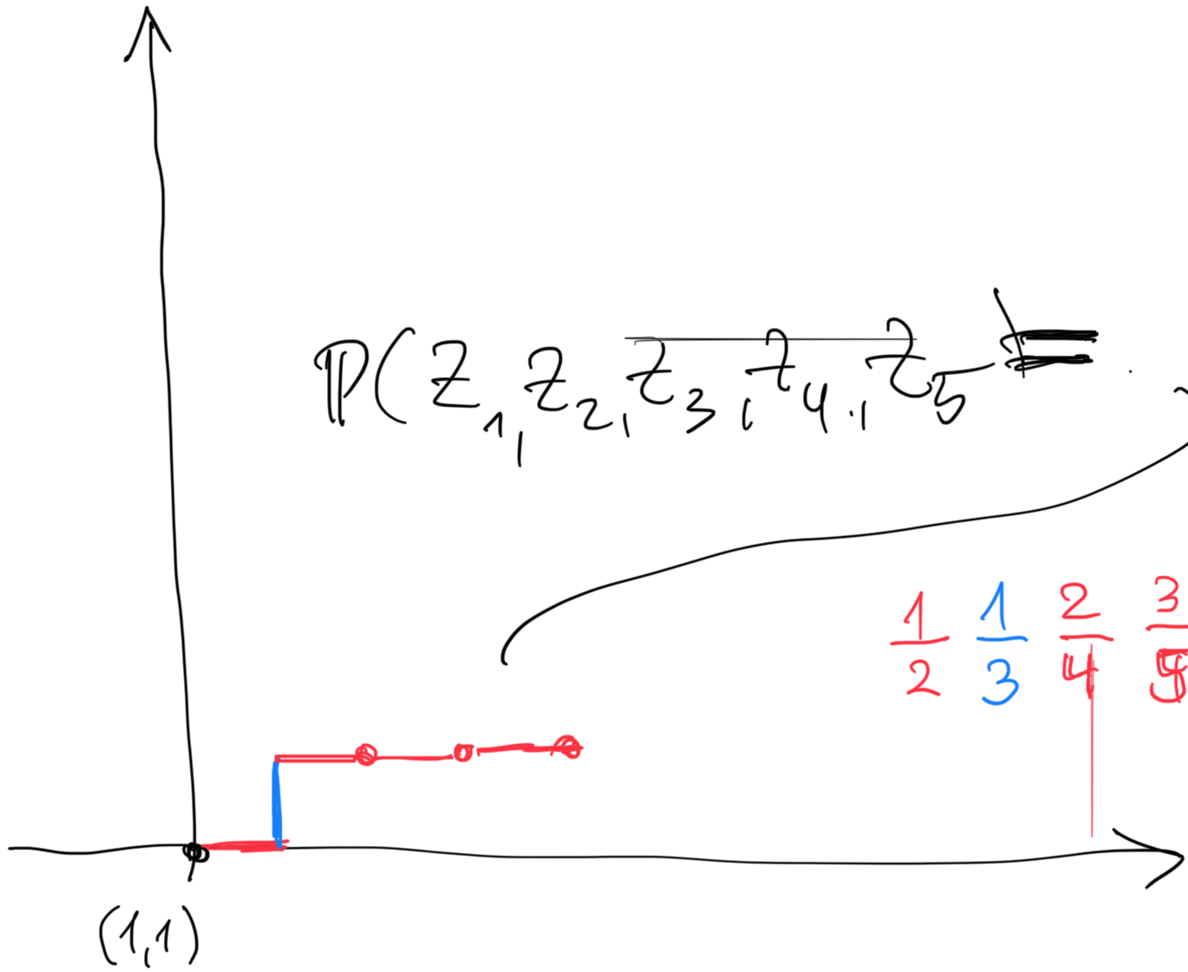
Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (1 für rot, 0 für blau).

Wir nennen dann $(Z_1, \ldots, Z_n)$ auch

eine (Standard-) *Pólya-Folge* der Länge n.

$$\mathbb{P}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 \quad) = ?$$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{6}$



$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

(das ist die W'keit, beim zweiten Zug blau zu ziehen,

wenn beim ersten Zug blau gezogen wurde)

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \frac{3}{4}$$
$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \frac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = 0) = \frac{1 + \#\{j : 1 \le j \le i,\ a_j = 0\}}{2 + i}$$

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = 1) = \frac{1 + \#\{j : 1 \le j \le i,\ a_j = 1\}}{2 + i}$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0\le k\le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\dots,a_n)$ mit $a_1+\dots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_n)=(a_1,\dots,a_n)\big)=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}\,.$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\dots,a_n)$ mit $a_1+\cdots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_n)=(a_1,\dots,a_n)\big)=\frac{k!(n-k)!}{\underbrace{(n+1)!}_{=n!\cdot(n+1)}}=\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen.

Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Fazit:

$$\boxed{\text{Die Anzahl der nach } n \text{ Zügen hinzugekommenen roten Kugeln ist uniform verteilt in } \{0, 1, \ldots, n\}.}$$

Pólya-Urne mit g Farben:

(Buch S. 95)

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$, also je eine Kugel von jeder Farbe.

$$S_{n,g} = \{k = (k_1, \dots, k_g) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_g = n\}$$

ist die Menge der Besetzungen von g Plätzen mit n Objekten (vgl Vorlesung 2a3).

$X_{jn} := \#$ Zugänge der Farbe j nach n Schritten.

$$X_n := (X_{1n}, \dots, X_{gn})$$

ist eine Zufallsvariable mit Wertebereich $S_{n,g}$.

~~Somit ist $X_1 = (1, \dots, 1)$.~~

Wie sieht die Verteilung von X_n aus?

Sei $(k_1, \ldots, k_g) \in S_{n,g}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_g = n$.

Man sieht wie im Fall $g = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_g)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_g!}{g \cdot (g+1) \cdots (n+g-1)} = \frac{k_1! \cdots k_g!}{(n+g-1)!}(g-1)!\,.$$

Es gibt $\binom{n}{k_1, \ldots, k_g} = \dfrac{n!}{k_1! \cdots k_g!}$ solche Zugfolgen. Also ist

Es gibt $\binom{n}{k_1, \ldots, k_g} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_g!}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{gn} = k_g) = n! \frac{(g-1)!}{(n+g-1)!}$$
$$= \frac{1}{\binom{n+g-1}{n}}$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{gn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,g}$.

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert uniform verteilte Besetzungen!