Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 5:

Bedingte Verteilung mit X_2 als erster Stufe:

Die Formel von Bayes

(Buch S. 111-112, 116)

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2

kann man immer

zu einer 2-**stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

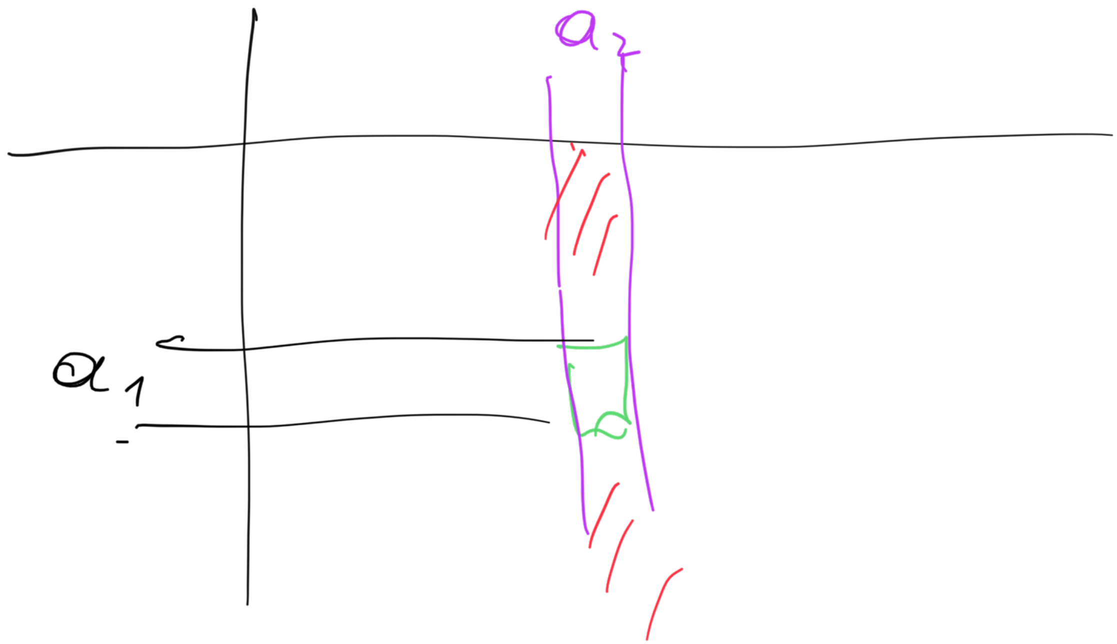
Man kann dabei wählen,

ob man X_1 als die erste Stufe auffasst oder als die zweite.

Wählt man X_1 als die zweite und X_2 als die erste Stufe,

dann schreibt sich die Multiplikationsformel als

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_2 = a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2).$$



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_2 = a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2).$$

Mit der *Formel für die totale Wahrscheinlichkeit*

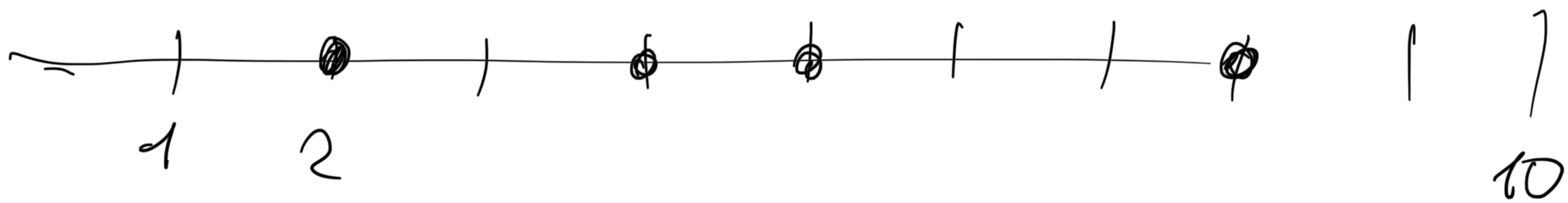
$$\mathbf{P}(X_2 = a_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \mid X_1 = a_1\big)$$

ergibt sich daraus eine Version der *Formel von Bayes:*

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \mid X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \mid X_1{=}a_1)}{\sum_{a' \in S_1} \mathbf{P}(X_1{=}a')\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \mid X_1{=}a')}$$

Beispiel: Erfolgreiche Würfe beim Münzwurf:

Wann kamen die erfolgreichen unter den ersten zehn Würfen, gegeben man kennt ihre Anzahl?



Beispiel: Erfolgreiche Würfe beim Münzwurf:

Wann kamen die erfolgreichen unter den ersten zehn Würfen,

gegeben man kennt ihre Anzahl?

Bei einem 10-maligen p-Münzwurf sei

K die Anzahl der Erfolge,

und $G \subset \{1, \dots, 10\}$ die zufällige Menge der Zeiten,

zu denen die Erfolge eintreten.

Die bedingte Verteilung von K gegeben $G = a$ ist klar:

$$\mathbf{P}(K = \#a \,|\, G = a) = 1.$$

Beispiel: Erfolgreiche Würfe beim Münzwurf:

Wann kamen die erfolgreichen unter den ersten zehn Würfen,

gegeben man kennt ihre Anzahl?

Bei einem 10-maligen p-Münzwurf sei

K die Anzahl der Erfolge,

und $G \subset \{1, \dots, 10\}$ die zufällige Menge der Zeiten,

zu denen die Erfolge eintreten.

Die bedingte Verteilung von K gegeben $G = a$ ist klar:

$$\mathbf{P}(K = \#a \,|\, G = a) = 1.$$

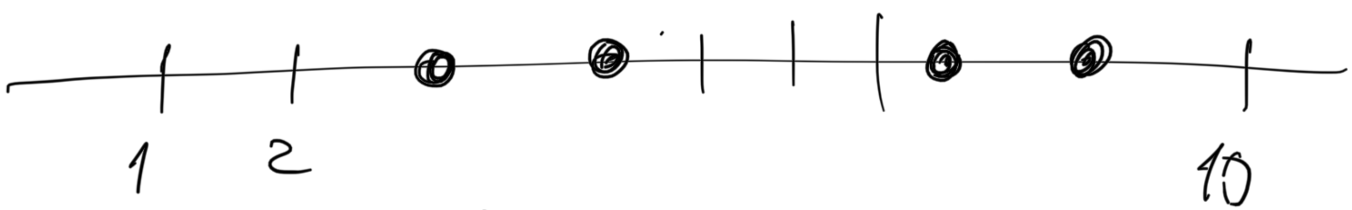
Was ist die bedingte Verteilung von G, gegeben $\{K = 4\}$?

Für jede 4-elementige Teilmenge a von $\{1, \dots, 10\}$ ist

$$\mathbf{P}(\{G = a\} \cap \{K = 4\}) = \mathbf{P}(G = a) = p^4(1-p)^6.$$

Das hängt nicht von a ab.

$k = 4$



z.B: $a = \{3, 4, 8, 9\}$

$$\frac{\mathbb{P}(\{G=a\} \cap \{K=4\})}{\mathbb{P}(K=4)} = \frac{p^4(1-p)^6}{\mathbb{P}(K=4)}$$ ... hängt nicht von a ab!

Für jede 4-elementige Teilmenge a von $\{1,\dots,10\}$ ist

$$\mathbf{P}(\{G=a\}\cap\{K=4\}) = \mathbf{P}(G=a) = p^4(1-p)^6.$$

Das hängt nicht von a ab.

Damit hängt auch $\mathbf{P}(G=a\,|\,K=4)$ nicht von a ab,

also ist $\mathbf{P}(G\in\cdot\,|\,K=4)$

die uniforme Verteilung

auf den 4-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,10\}$.

Beispiel: Wie war der erste Schritt?

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Beispiel: Wie war der erste Schritt?

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y,\, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Beispiel: Wie war der erste Schritt?

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y,

gegeben $\{Y + Z = b\}$?

"Wie war der erste Schritt?"

Die Gewichte der gemeinsame Verteilung von Y und $Y + Z$

kennen wir schon aus Teil 3.

Die Gewichte der gemeinsame Verteilung von Y und $Y+Z$

kennen wir schon aus Teil 3.

Die bedingte Verteilung von Y, gegeben $Y+Z=b$,

hat somit die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y=a\,|\,Y+Z=b)=\frac{\mathbf{P}(Y=a)\,\mathbf{P}(Z=b-a)}{\mathbf{P}(Y+Z=b)}\,.$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt.

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt.

Dann ist

$$\mathbf{P}(Y=a)\,\mathbf{P}(Z=b-a) = q^{\cancel{a}-1}p\,q^{(b-\cancel{a})-1}p = p^2q^{b-2}.$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt.

Dann ist

$$\mathbf{P}(Y=a)\,\mathbf{P}(Z=b-a) = q^{a-1}p\,q^{(b-a)-1}p = p^2q^{b-2}.$$

Dieses hängt nicht von a ab. Also hängt auch

$$\mathbf{P}(Y=a\,|Y+Z=b) = \frac{p^2q^{b-2}}{\mathbf{P}(Y+Z=b)}$$ nicht von a ab.

Deshalb ist die bedingte Verteilung von Y gegeben

$$\{Y+Z=b\}$$

die uniforme Verteilung auf $\{1,\dots,b-1\}$.

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf
der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,
ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

uniform verteilt auf $\{1, \dots, b-1\}$.

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y+Z=b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y+Z$ ist (vgl. F8a3.6)

$$e^{-a}e^{-(b-a)}\,da\,db = e^{-b}\,da\,db, \quad 0 \le a \le b$$

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist (vgl. F8a3.6)

$$e^{-a}e^{-(b-a)}\,da\,db = e^{-b}\,da\,db,\quad 0 \le a \le b$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist somit $\left(\int_0^b 1\,da\right)e^{-b}\,db \quad = be^{-b}db$

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist (vgl. F8a3.6)

$$e^{-a}e^{-(b-a)}\,da\,db = e^{-b}\,da\,db, \quad 0 \le a \le b$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist somit $\quad \left(\int_0^b da\right)e^{-b}\,db \quad = be^{-b}db$

Also:

$$\mathbf{P}(Y \in da \,|\, Y + Z = b) = \frac{e^{-b}}{be^{-b}}\,da = \frac{1}{b}\,da, \quad 0 \le a \le b.$$