

Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 2:

Von der Startverteilung
mit den Übergangswahrscheinlichkeiten
zur gemeinsame Verteilung

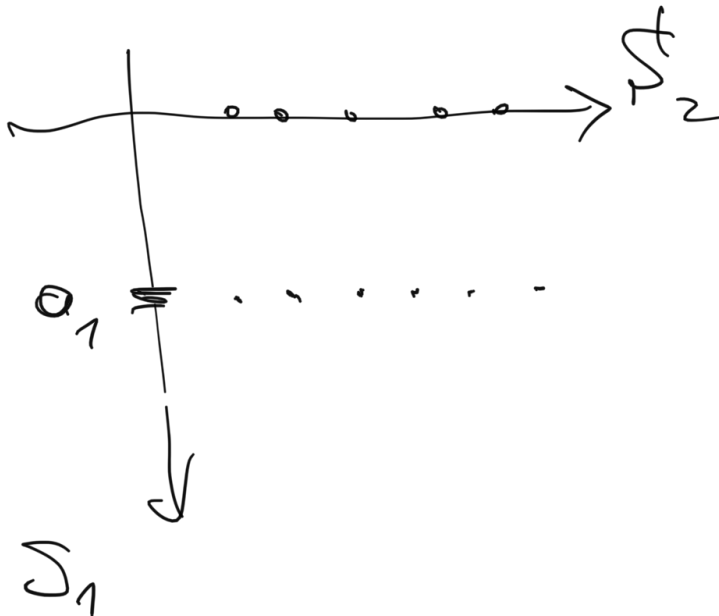
(Buch S. 87-89, 91-92)

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar
mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2 .

Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2), a_2 \in S_2$ Verteilungsgewichte
auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.



Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar
mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2 .

Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte
auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar
mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2 .

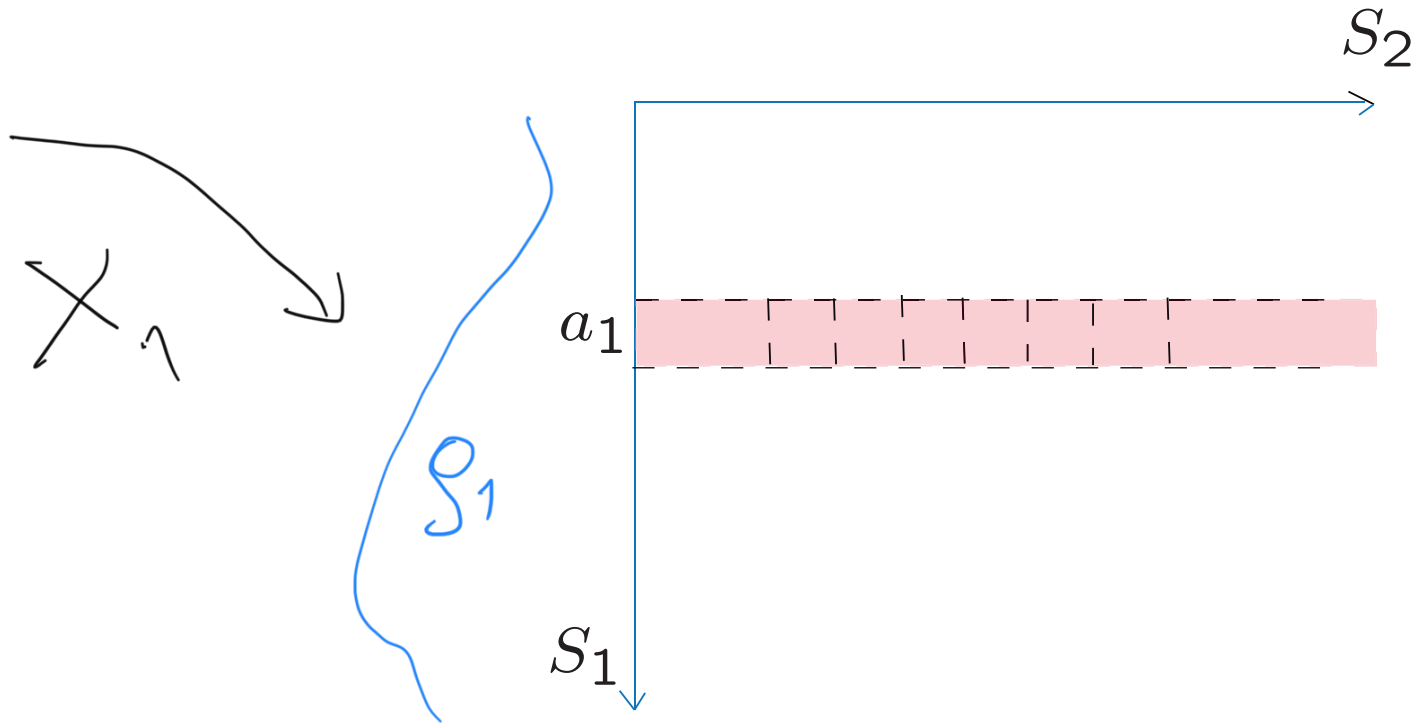
Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.

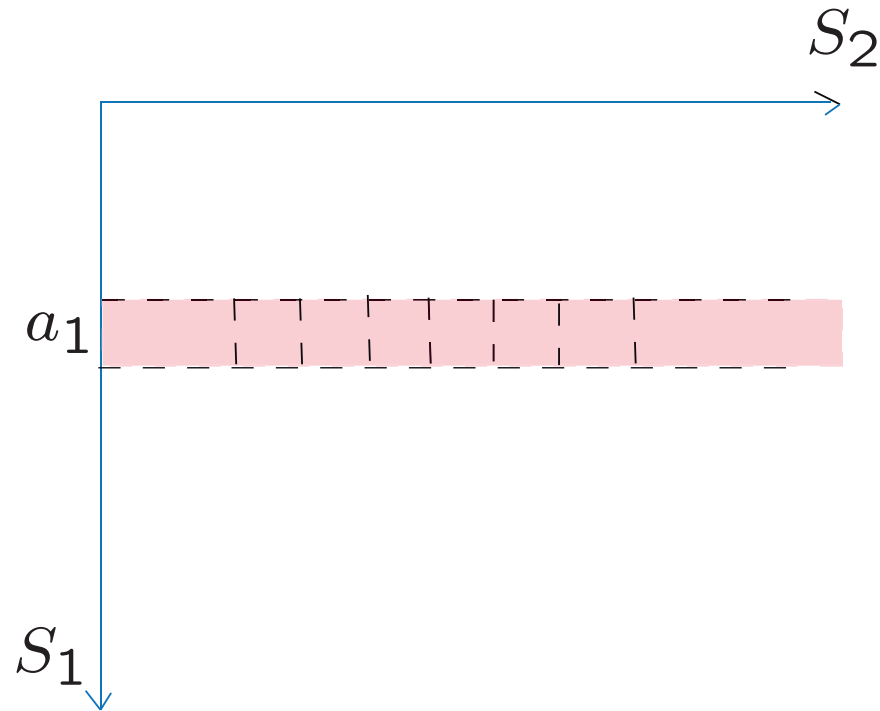
Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) =: P_{a_1}(X_2 = a_2) .$$



Jetzt bringen wir den Zufall auch in der erste Stufe ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1 -wertige Zufallsvariable mit **Verteilung ρ_1** .

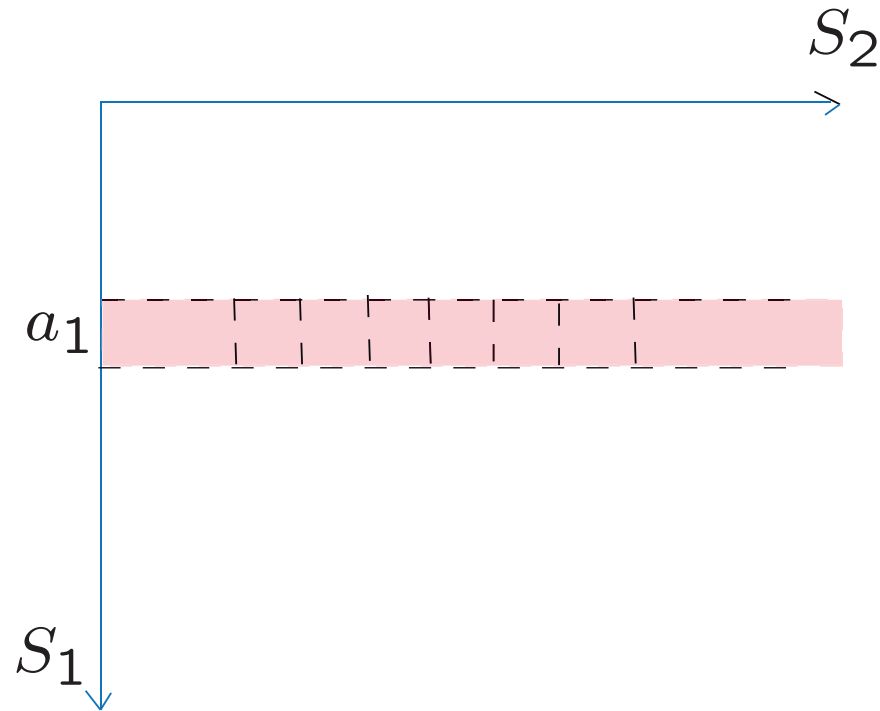


Jetzt bringen wir den Zufall auch in der erste Stufe ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1 -wertige Zufallsvariable mit **Verteilung** ρ_1 .

Mit Wahrscheinlichkeit $\rho_1(a_1)$ fällt X_1 auf a_1

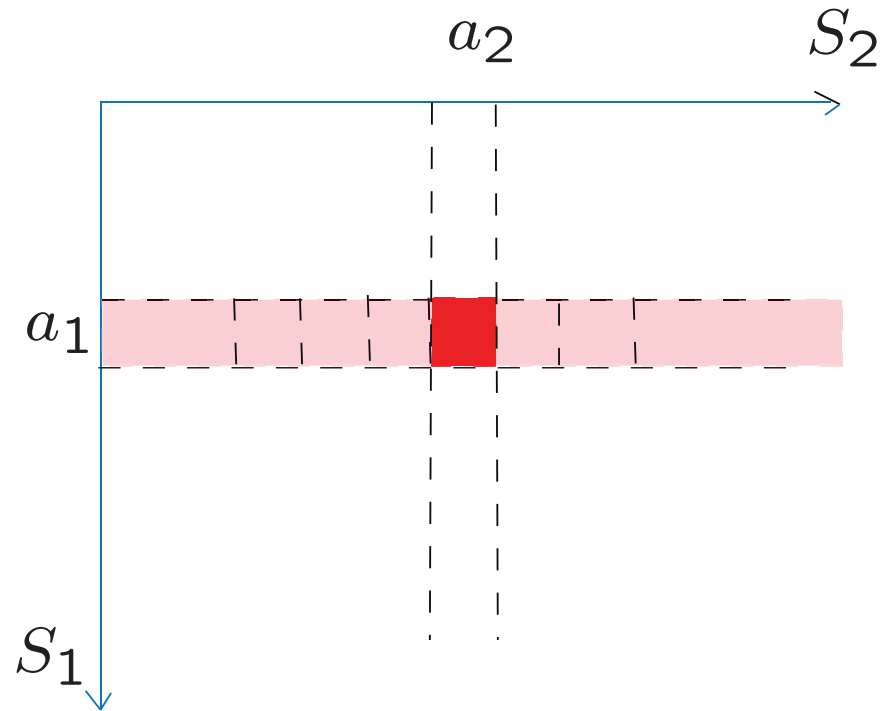
.... damit landet man in der Zeile namens a_1 .



Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Das heißt im hier betrachteten diskreten Fall:

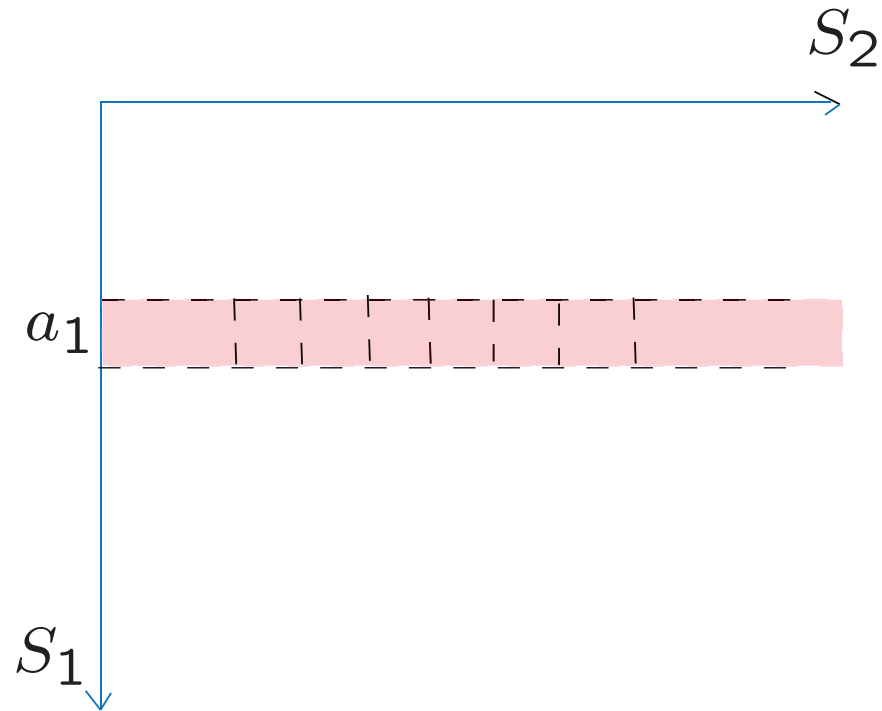
$P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, sind Verteilungsgewichte auf S_2 ,
also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.



Vorstellung:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

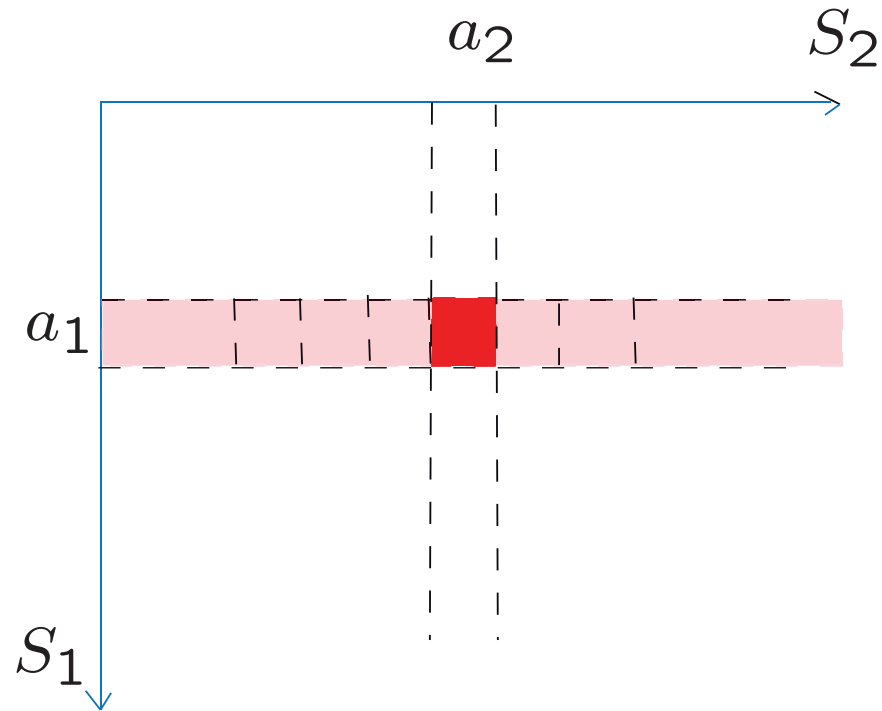
hat das Ereignis $\{X_2 = a_2\}$ die W'keit $P(a_1, a_2)$.



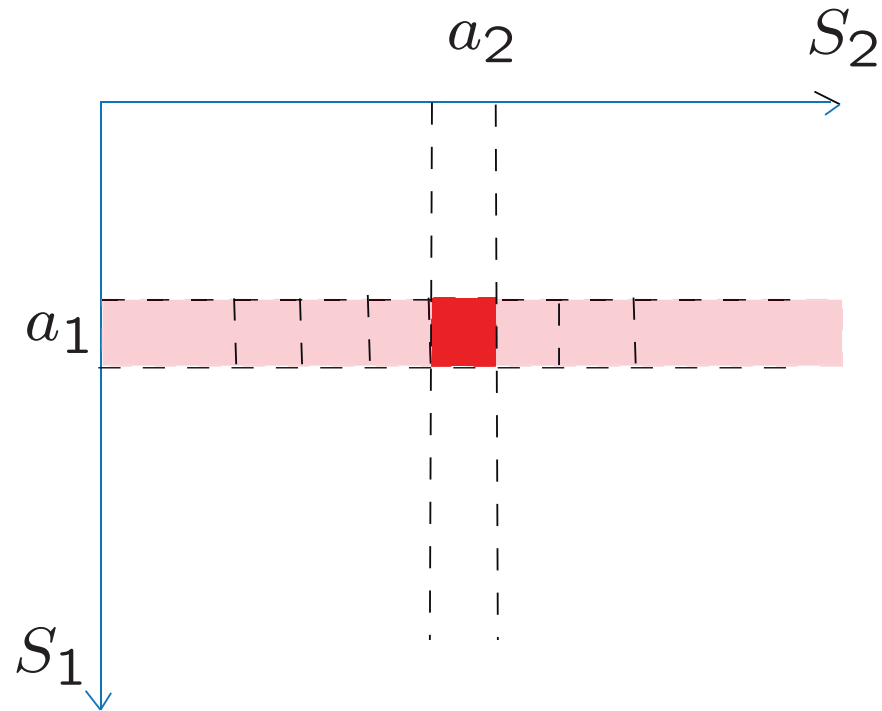
Anders gesagt:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.



Das Gewicht $\rho_1(a_1)$ aus Stufe 1
 wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, \cdot)$
 auf die Zeile a_1 aufgeteilt:



Das Gewicht $\rho_1(a_1)$ aus Stufe 1
 wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, \cdot)$
 auf die Zeile a_1 aufgeteilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2).$$

Aus der Verteilung von X_1
(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichnet mit ρ_1)

und den Verteilungen $P(a_1, \cdot)$
(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die *gemeinsame Verteilung* von X_1 und X_2
mit den Gewichten

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2)$$

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2)$$

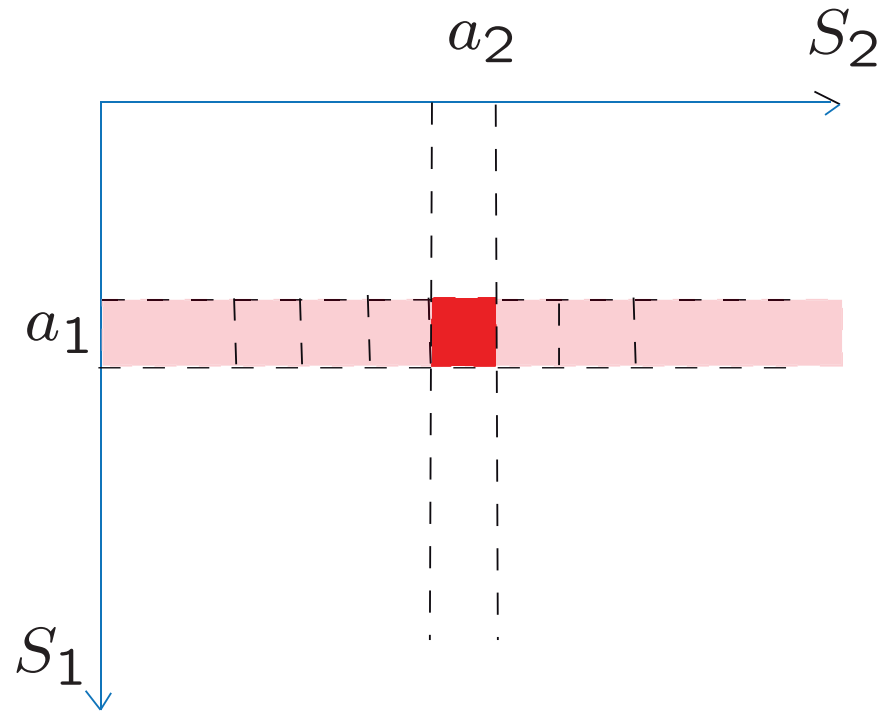
kann man auch schreiben als

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Das ist die einfachste Variante der sogenannten

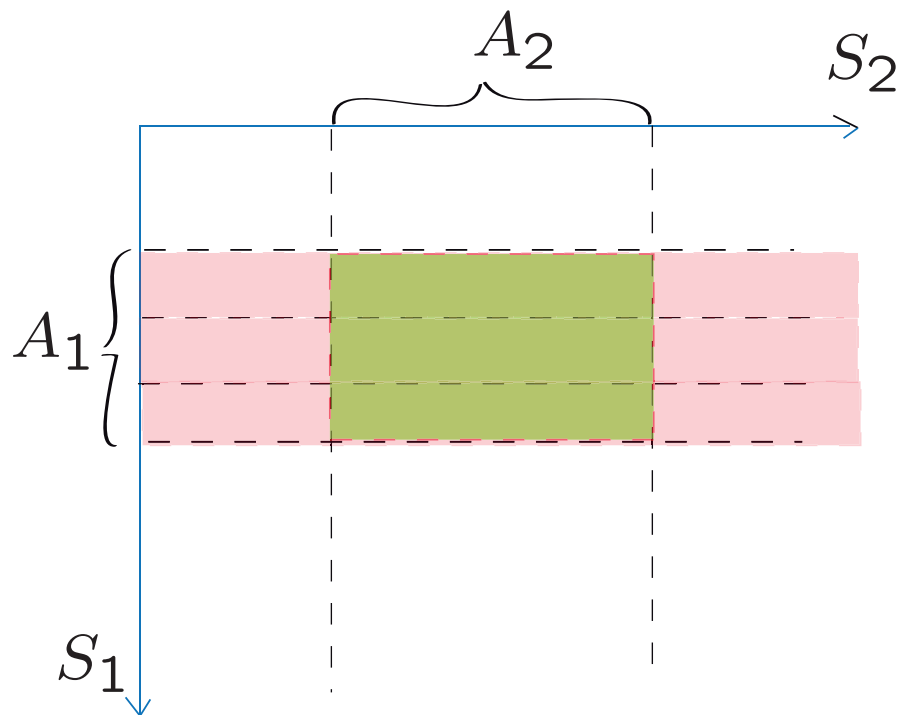
Multiplikationsregel.

Später werden wir das Analogon für n
statt 2 Zufallsvariable kennenlernen.



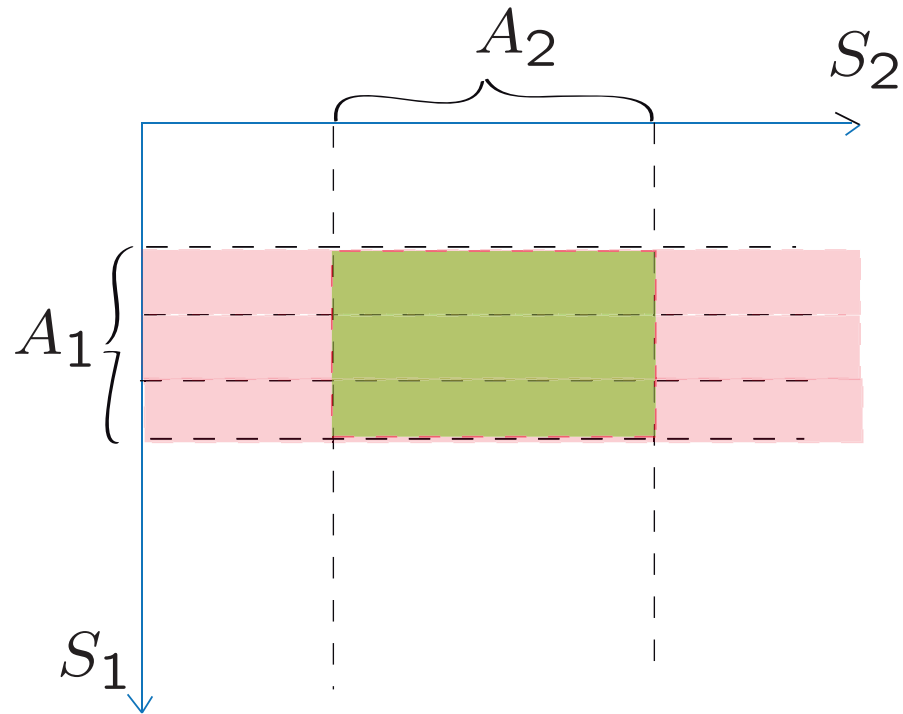
$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Summiert über $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ erhält man daraus:



$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

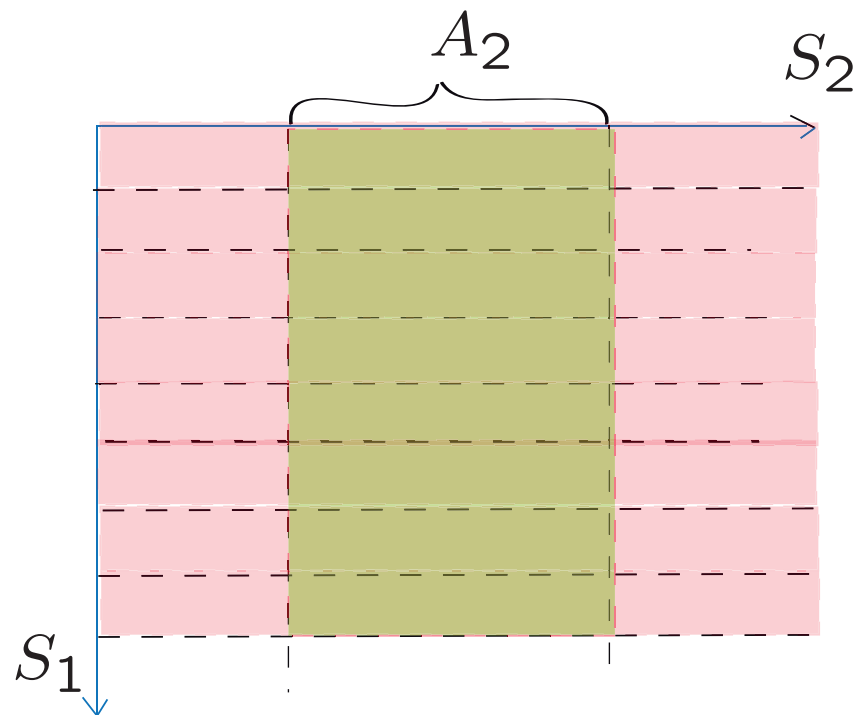
$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



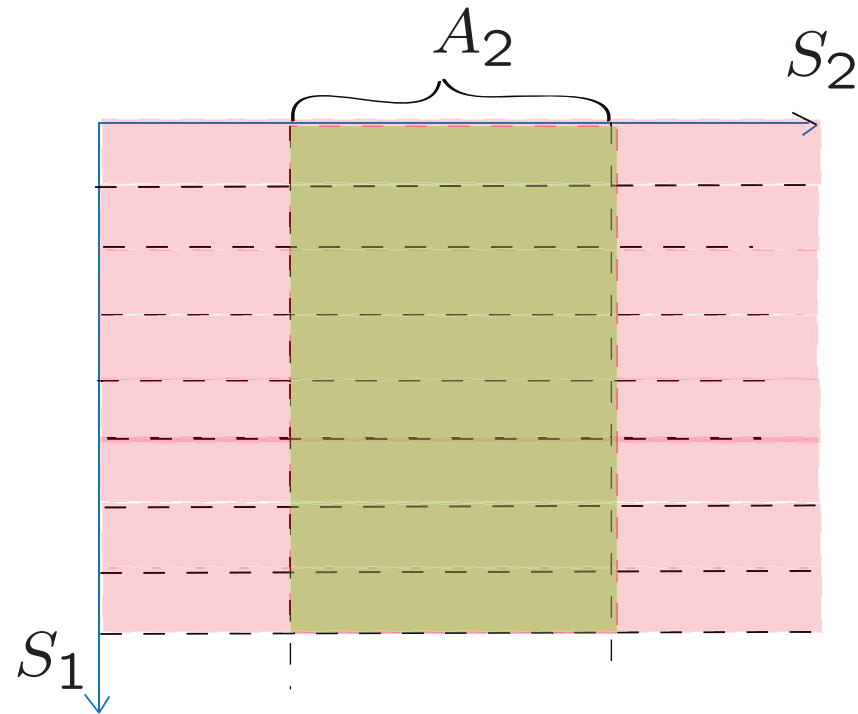
$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Speziell mit $A_1 := S_1$ ergibt sich:



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

“Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit”

“Zerlegung nach dem ersten Schritt”

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Wir bemerken: Genau dann
hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,
wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2)$$

$$P(a_1, a_2), a_1 \in S_1, a_2 \in S_2$$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P .

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

$$\nu(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) P(a_1, a_2)$$

$P(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$
sind die Einträge der sogenannten
Übergangsmatrix P .

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

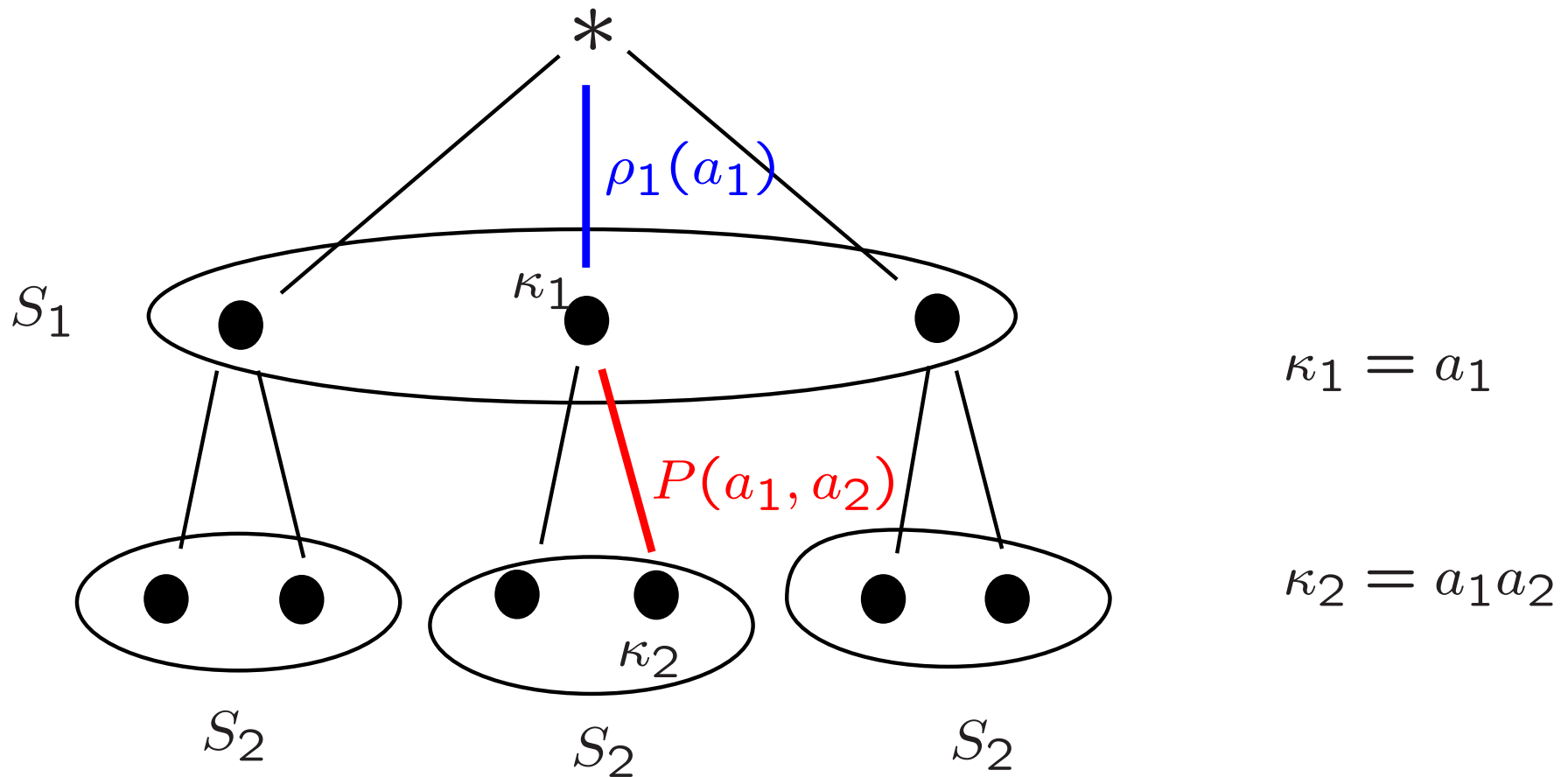
Die Zeilensummen der Matrix $\nu(.,.)$
ergeben die Einträge $\rho_1(.)$.

Die Gesamtsumme aller $\nu(a_1, a_2)$ ist 1.

Veranschaulichung durch einen Baum

Ein zweistufiges Zufallsexperiment
kann in seiner Abfolge
durch einen *Baum der Tiefe 2* veranschaulicht werden.

Beispiel mit $\#S_1 = 3$, $\#S_2 = 2$:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho_1(a_1)P(a_1, a_2).$$

(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)

Zweistufige Zufallsexperimente - kontinuierlicher Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

S_1 und S_2 seien Intervalle in \mathbb{R} .

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei

$g_{a_1}(a_2) da_2$, $a_2 \in S_2$, eine Dichte auf S_2 .

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Dichte $g_{a_1}(a_2) da_2$.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Dichte $g_{a_1}(a_2) da_2$.

Schreibweise:

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2) = g_{a_1}(a_2) da_2$$

Die S_1 -wertige Zufallsvariable X_1 habe die Dichte

$$f(a_1) da_1, a_1 \in S_1.$$

Dann hat (X_1, X_2) die gemeinsame Dichte

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = f_1(a_1) g_{a_1}(a_2) da_1 da_2$$

Die S_1 -wertige Zufallsvariable X_1 habe die Dichte

$$f(a_1) da_1, a_1 \in S_1.$$

Dann hat (X_1, X_2) die gemeinsame Dichte

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = f_1(a_1) g_{a_1}(a_2) da_1 da_2$$

Integriert über $A_1 \times A_2$ ergibt das:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \int_{A_1} f_1(a_1) \int_{A_2} g_{a_1}(a_2) da_2 da_1$$

Die S_1 -wertige Zufallsvariable X_1 habe die Dichte

$$f(a_1) da_1, a_1 \in S_1.$$

Dann hat (X_1, X_2) die gemeinsame Dichte

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = f_1(a_1) g_{a_1}(a_2) da_1 da_2$$

Integriert über $A_1 \times A_2$ ergibt das:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \int_{A_1} f_1(a_1) \int_{A_2} g_{a_1}(a_2) da_2 da_1$$

Speziell mit $A_1 = S_1$ folgt als Dichte von X_2 :

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2) = \left(\int_{S_1} f_1(a_1) g_{a_1}(a_2) da_1 \right) da_2$$