Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 1:

Übergangswahrscheinlichkeiten

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,

das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,

gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel A:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

entweder für einen fairen Würfel

oder für einen gezinkten:

drei von dessen 6 Seiten sind mit der Augenzahl 5,

die anderen drei sind mit der Augenzahl 6 beschriftet.

X_1:= der Typ des gewählten Würfels (fair oder gezinkt)

X_2:= die dann (in Stufe 2) geworfene Augenzahl.

	1	2	3	4	5	6
f	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
g	0	0	0	0	$1/2$	$1/2$

Wenn in Stufe 1 der faire Würfel gewählt wird,

dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

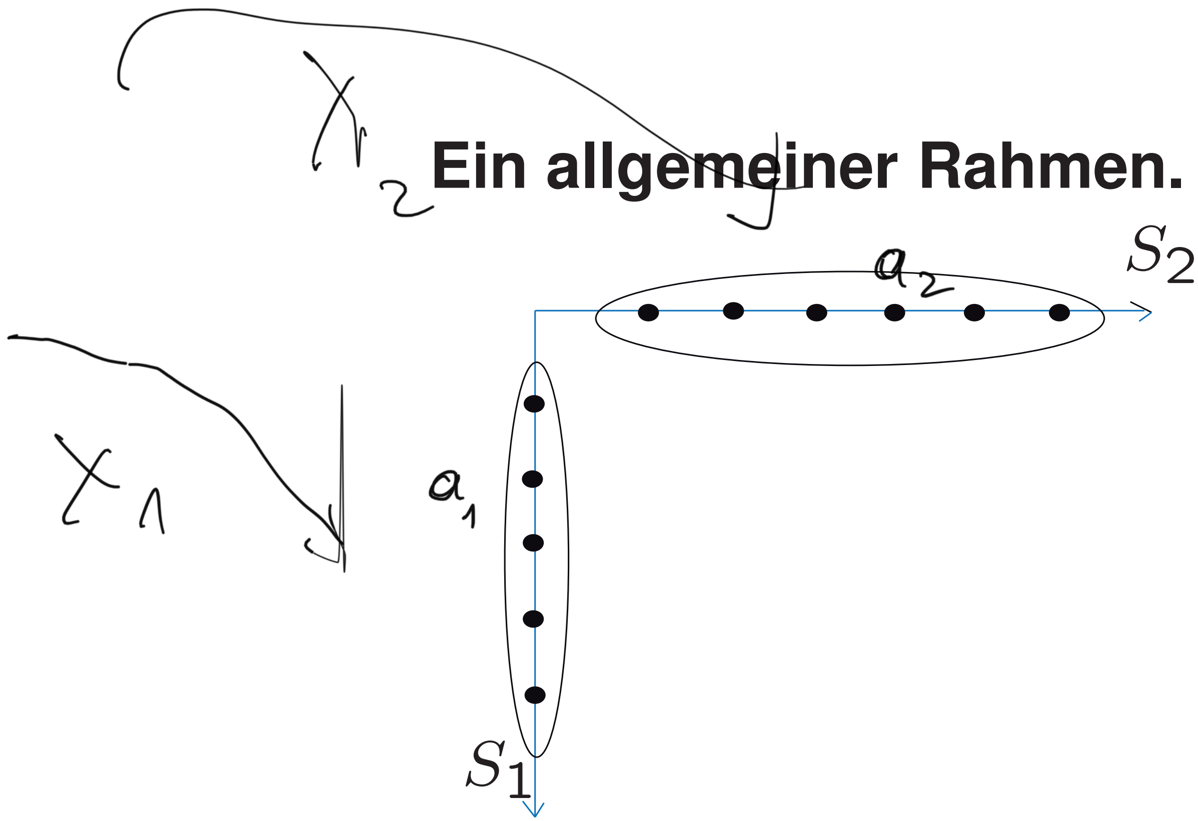
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

Wenn in Stufe 1 der gezinkte Würfel gewählt wird,

dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

Ein allgemeiner Rahmen.

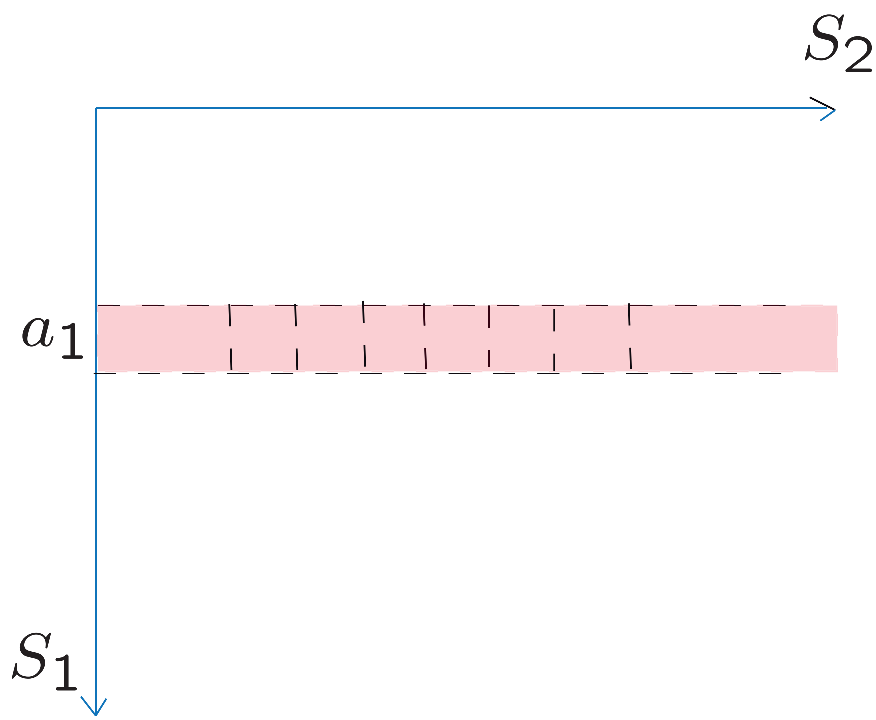


S_1 und S_2 seien zwei Wertebereiche.

Stellen wir uns vor: Wenn in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.

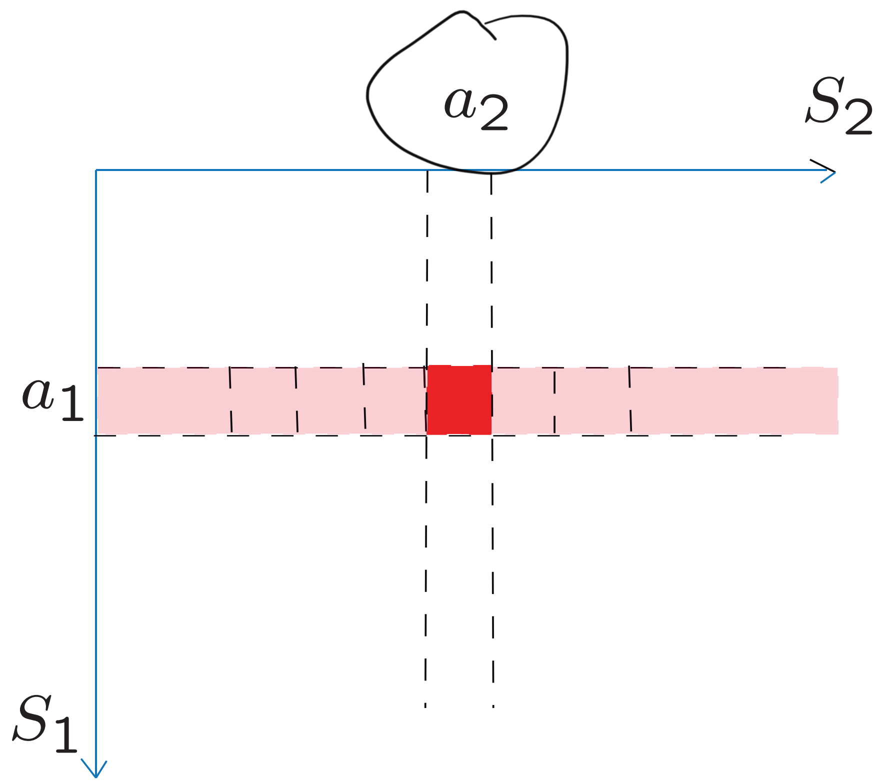


S_1 und S_2 seien zwei Wertebereiche.

Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.



Wenn dann in Stufe 2

die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,

landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten Feld

(Zeile a_1, Spalte a_2)

Beispiel B:

$$S_1 = \{1, 2, 3\},\ S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

In Stufe 1

wählen wir eine Zahl X_1 aus $\{1, 2, 3\}$.

In Stufe 2 verschieben wir das in Stufe 1 erzielte Ergebnis

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Mit anderen Worten:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

ist X_2 uniform verteilt auf $\{a_1 - 1, a_1 + 1\}$.

Beispiel C:

$S_1 = S_2 = \mathbb{R}$.

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Mit anderen Worten:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat X_2 die Verteilung N$(a_1, 1)$.

(Dieses Beispiel weist über den diskreten Fall hinaus.)

Für die

W'keit des Ereignisses $\{X_2 \in A_2\}$ gegeben $\{X_1 = a_1\}$

schreiben wir

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)$$

und sprechen von den

Übergangswahrscheinlichkeiten.

Für diskretes S_2

reicht es, die einzelnen Ausgänge a_2 zu betrachten:

$$P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2), \quad a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2$$

ist die sogenannte Übergangsmatrix.

Für diskretes S_2

reicht es, die einzelnen Ausgänge a_2 zu betrachten:

$$P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2), \quad a_1 \in S_1,\, a_2 \in S_2$$

ist die sogenannte Übergangsmatrix.

Man hat dann:

$$P(a_1, A_2) := \sum_{a_2 \in A_2} P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)$$

und kurz:

$$P(a_1, \cdot) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot).$$

Für kontinuierliches $S_2 \subset \mathbb{R}$ hat man

üblicherweise wieder Dichten (statt der Gewichte):

$$g_{a_1}(a_2)\, da_2 = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2), \quad a_1 \in S_1, a_2 \in S_2,$$

heißen die Übergangsdichten.

Für kontinuierliches $S_2 \subset \mathbb{R}$ hat man

üblicherweise wieder Dichten (statt der Gewichte):

$$g_{a_1}(a_2)\, da_2 = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2), \quad a_1 \in S_1, a_2 \in S_2,$$

heißen die Übergangsdichten.

Man hat dann z.B. für Intervalle $A_2 = [c, d] \subset S_2$:

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) = \int_c^d g_{a_1}(a_2)\, da_2.$$