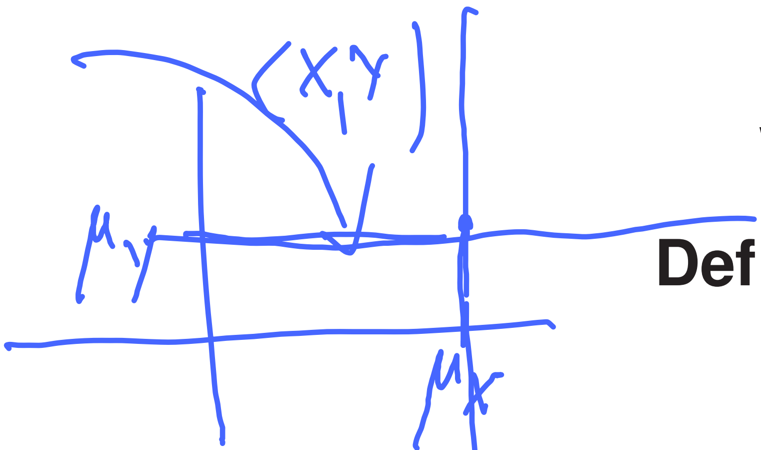
Vorlesung 7b

Korrelationskoeffizient und Regressionsgerade

Teil 1

Die Varianz-Kovarianz-Ungleichung

(Buch S. 56)



Wir erinnern an die

Definition der Kovarianz:

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y

mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$ ist

$$\mathbf{Cov}[X,Y] := \mathbf{E}\Big[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])\Big].$$

Insbesondere ist also

„ $\mathbf{E}[(X-\mu_X)(X-\mu_X)]$

$$\mathbf{Cov}[X,X] = \mathbf{Var}[X].$$

Wichtige Eigenschaften der Kovarianz:

Die Kovarianz ist

- im Fall von zwei gleichen Einträgen *nichtnegativ*:

$$\mathbf{Cov}[X, X] \geq 0$$

- in den beiden Einträgen *symmetrisch*:

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \mathbf{Cov}[Y, X]$$

- *bilinear*, d.h. in jedem einzelnen Eintrag linear:

$$\mathbf{Cov}[c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 \mathbf{Cov}[X_1, Y] + c_2 \mathbf{Cov}[X_2, Y]$$

$$\mathbf{Cov}[X,Y] = \mathbf{E}\Big[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])\Big].$$

Die Kovarianz ist *bilinear*:

$$\underbrace{\mathbf{Cov}[c_1X_1 + c_2X_2, Y]} = c_1\mathbf{Cov}[X_1,Y] + c_2\mathbf{Cov}[X_2,Y]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\big(c_1X_1 + c_2X_2 - \underbrace{\mathbb{E}[c_1X_1 + c_2X_2]}_{= c_1\mathbb{E}[X_1] + c_2\mathbb{E}[X_2]}\big)(Y - \mathbb{E}[Y])\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\big((c_1X_1 - c_1\mathbb{E}X_1) + (c_2X_2 - c_2\mathbb{E}[X_2])\big)(Y - \mathbb{E}[Y])\Big]$$

$$= c_1\mathbb{E}\big[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(Y - \mathbb{E}Y)\big] + c_2\mathbb{E}\big[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])(Y - \mathbb{E}$$

↑ Lin. des EW

=

Wir beweisen jetzt die

Kovarianz-Varianz-Ungleichung:

$$|\mathbf{Cov}[X,Y]| \le \underbrace{\sqrt{\mathbf{Var}\,X}}_{=\sigma_X}\ \underbrace{\sqrt{\mathbf{Var}\,Y}}_{\sigma_Y}$$

$|\mathrm{Cov}[X,Y]|$

$$\boxed{|\cancel{\kappa_{XY}}| \le \sigma_X \sigma_Y}$$

Zu zeigen:

$$\Big|\mathbb{E}\big[\underbrace{(X-\mu_X)}_{=:G}\underbrace{(Y-\mu_Y)}_{=:H}\big]\Big| \le \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]}\ \sqrt{\mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2]}$$

$$\iff |\mathbb{E}[G\,H]| \le \sqrt{\mathbb{E}[G^2]}\ \sqrt{\mathbb{E}[H^2]}$$

Wir beweisen jetzt die

Kovarianz-Varianz-Ungleichung:

$$|\mathbf{Cov}[X,Y]| \le \sqrt{\mathbf{Var}X}\,\sqrt{\mathbf{Var}Y}$$

Mit $G := X - \mu_X, \;\; H := Y - \mu_Y$

folgt die Behauptung aus der

Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Für reellwertige Zufallsvariable G, H mit $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] < \infty$

ist

$$\Big|\mathbf{E}[GH]\Big| \le \sqrt{\mathbf{E}[G^2]}\,\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}\,.$$

Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2] > 0$ und $\mathbf{E}[H^2] > 0$.

$$\mathbb{E}[G]\cancel{\mathbb{E}}[H] \leq \sqrt{\mathbb{E}[G^2]}\sqrt{\mathbb{E}[H^2]}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\Big[\underbrace{\frac{G}{\sqrt{\mathbb{E}[G^2]}}}_{=:U}\cancel{]\cdot\mathbb{E}[}\underbrace{\frac{H}{\sqrt{\mathbb{E}[H^2]}}}_{=:V}\Big] \leq 1 \quad \checkmark$$

$$|2ab| \leq a^2+b^2$$

$$|2UV| \leq U^2+V^2$$

$$2|\mathbb{E}[UV]| \leq \mathbb{E}[U^2]+\mathbb{E}[V^2] = 2$$

Merke:

$$\underbrace{\mathbb{E}[U^2]}= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}[G^2]}}G\Big)^2\Big] = \frac{1}{\mathbb{E}[G^2]}\mathbb{E}[G^2] = 1$$

Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2] > 0$ und $\mathbf{E}[H^2] > 0$.

Zu zeigen ist $\left| E\left[\frac{G}{\sqrt{E[G^2]}}\frac{H}{\sqrt{E[H^2]}}\right]\right| \leq 1.$

Für $U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}$, $V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$
ist also zu zeigen: $|\mathbf{E}[UV]| \leq 1.$

Aus $\pm 2UV \leq U^2 + V^2$ folgt (mit Monotonie des EW)

$$\pm\mathbf{E}[UV] \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}[U^2] + \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Dann folgt

mit dem Satz von der Positivität des Erwartungswertes:

$$\mathbf{P}(G^2 = 0) = 1,$$

also

$$\mathbf{P}(GH = 0) = 1$$

und

$$\mathbf{E}[GH] = 0,$$

und damit

$$\pm\mathbf{E}[GH] = 0 \leq 0 \ = \sqrt{\mathbf{E}[G^2]}\,\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}. \ \square$$