# Vorlesung 7a

# Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

## Teil 5

## Warum gerade $e^{-cx^2}$?

Am Ende von Teil 4 hatten wir (für $n = 100$) betrachtet:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \ ,$$

mit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$,

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[-0.5, 0.5]$.

Die Verteilung von $Z_n$ war glockenförmig.

Was ist deren genaue Form für $n \to \infty$?

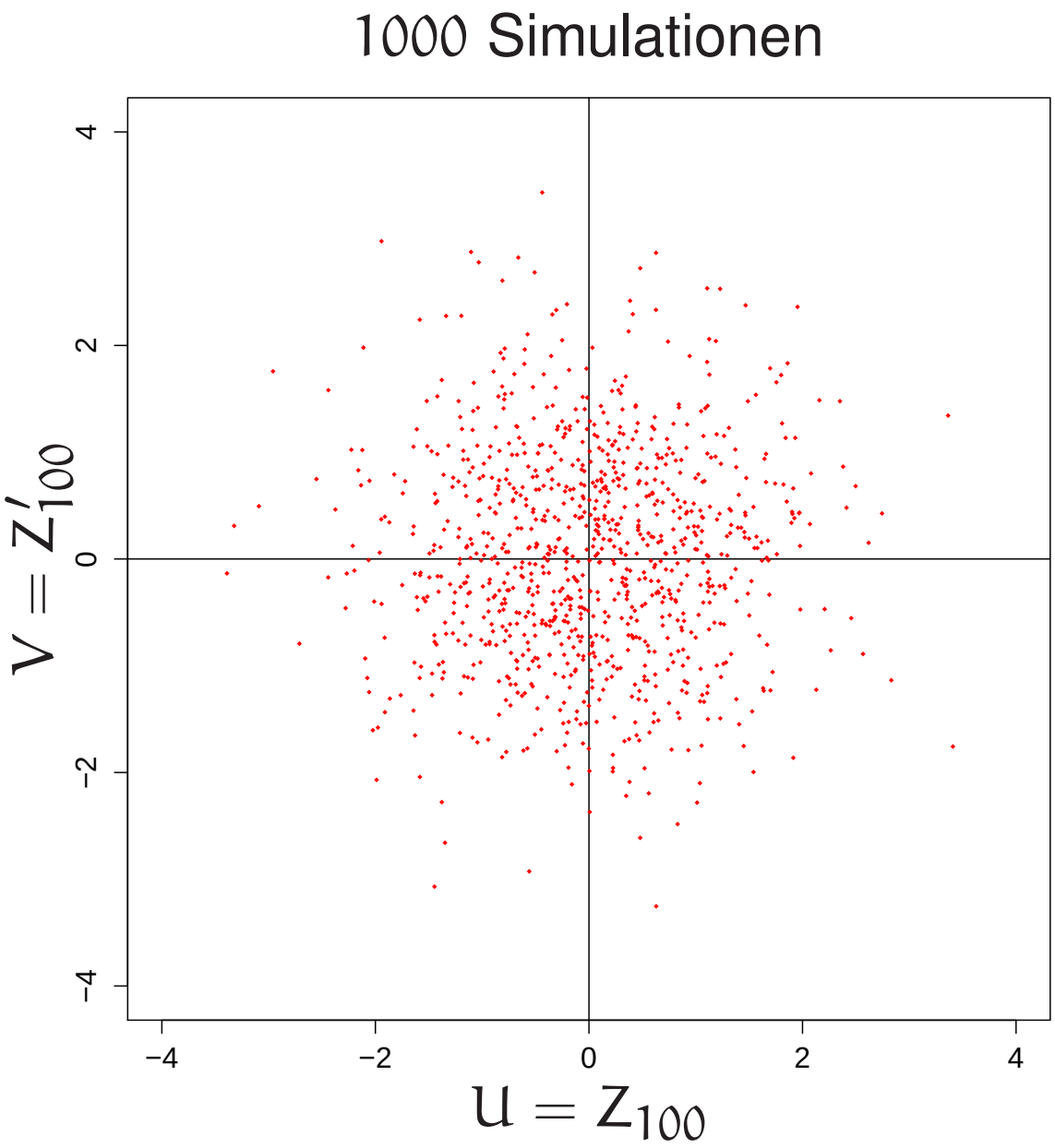
Glücklicher Einfall:

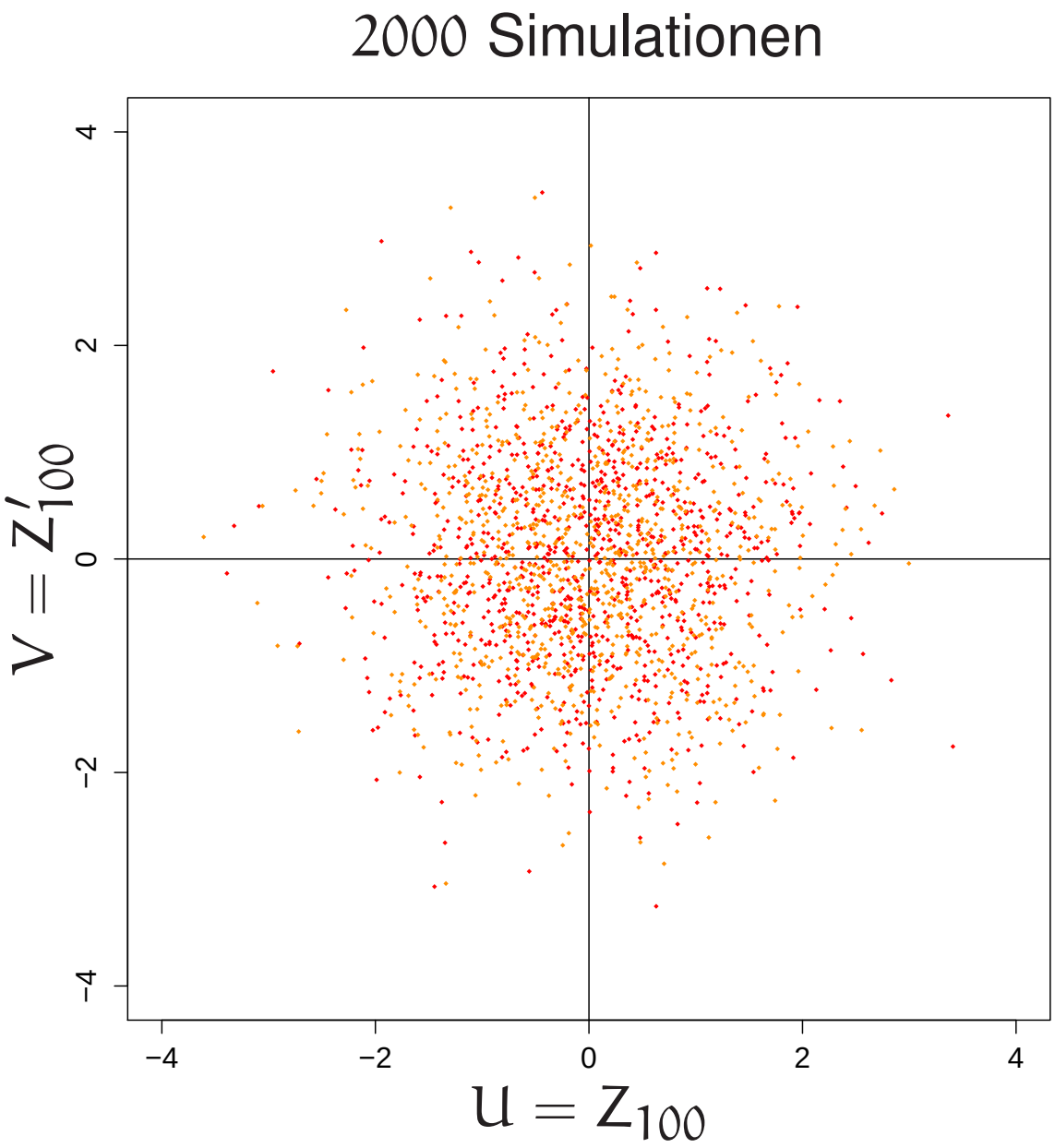
Nimm zwei unabhängige Kopien

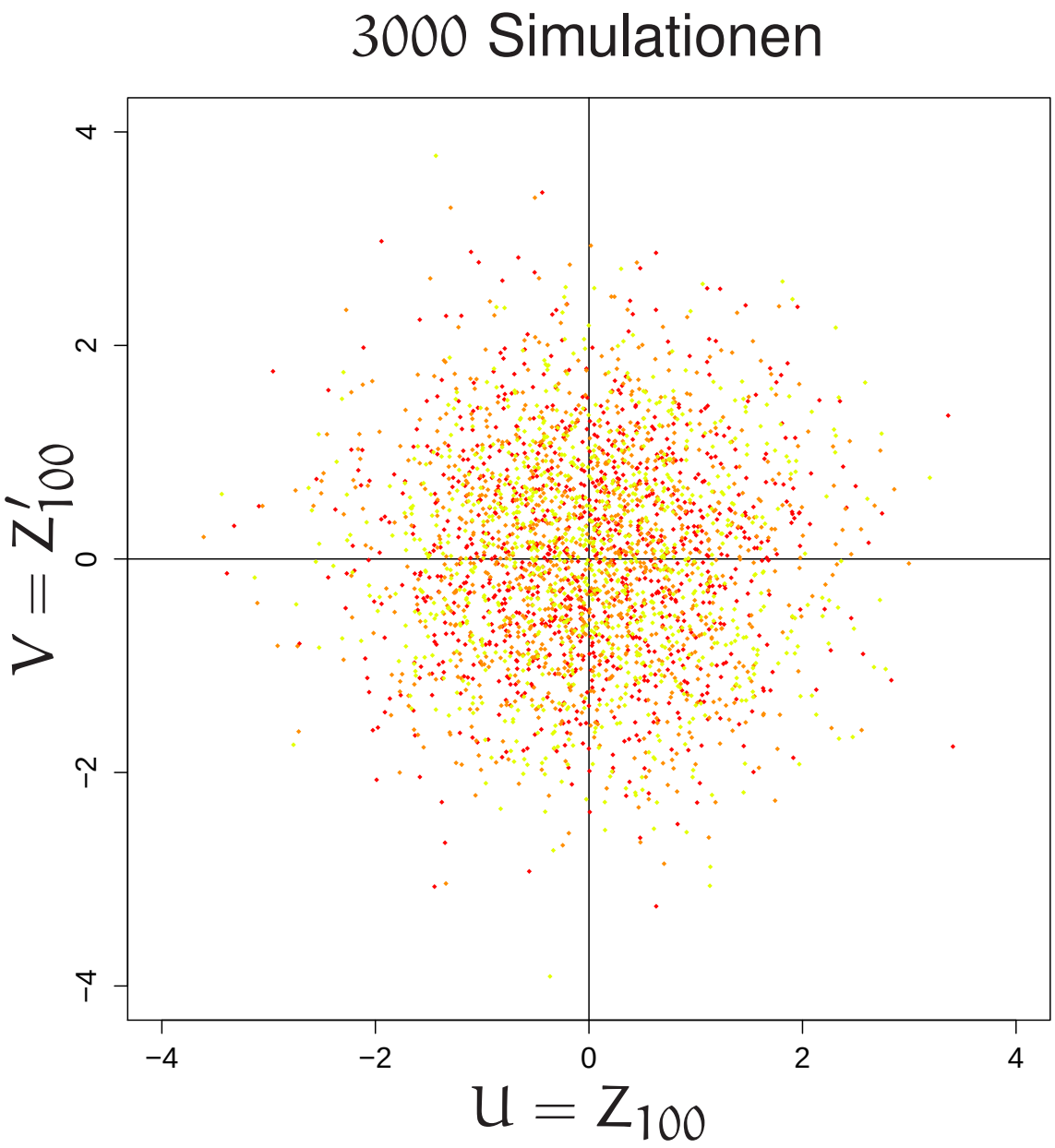
$$(U, V) := (Z_{100}, Z'_{100})$$

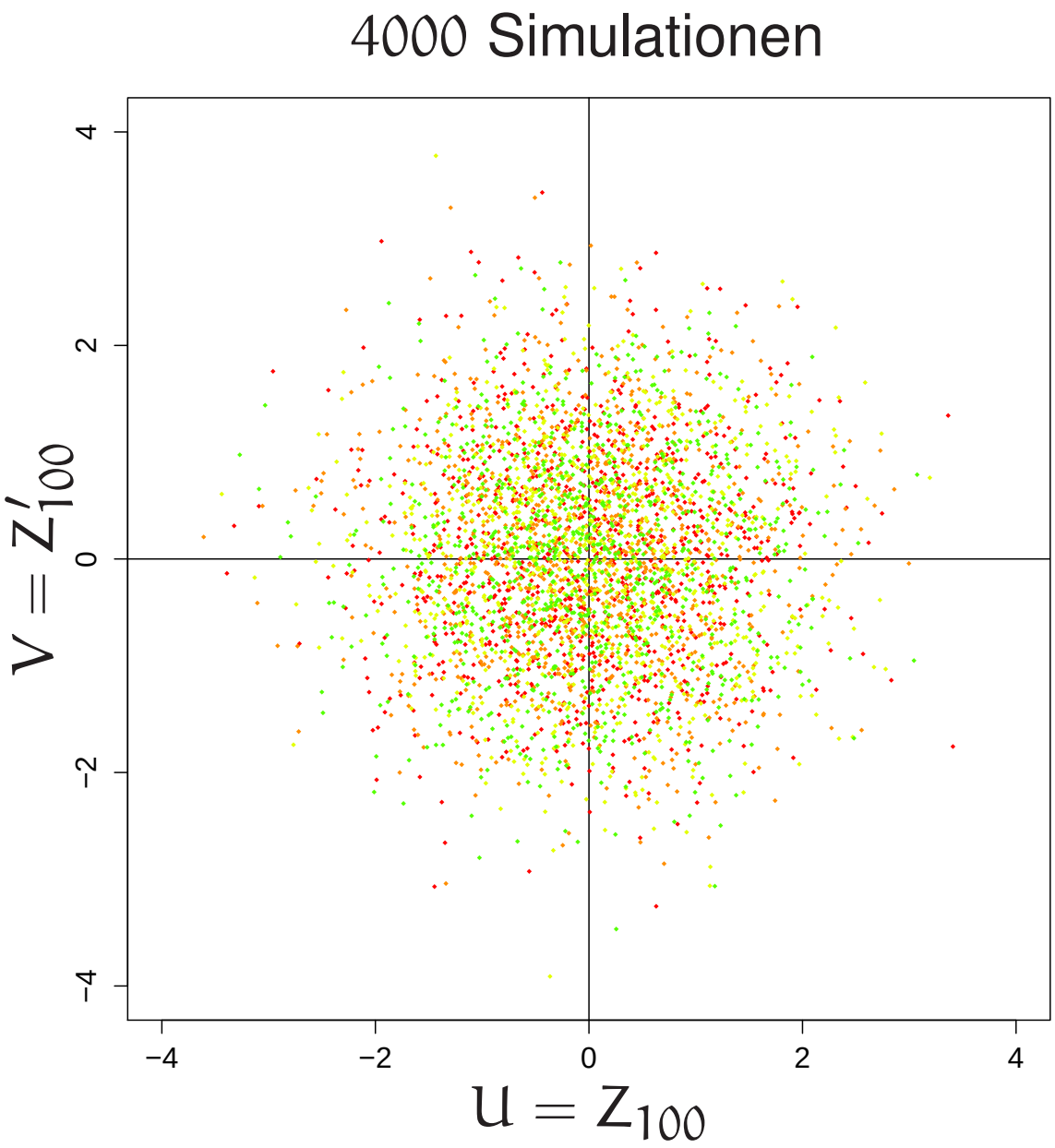
Wie sieht die gemeinsame Verteilung

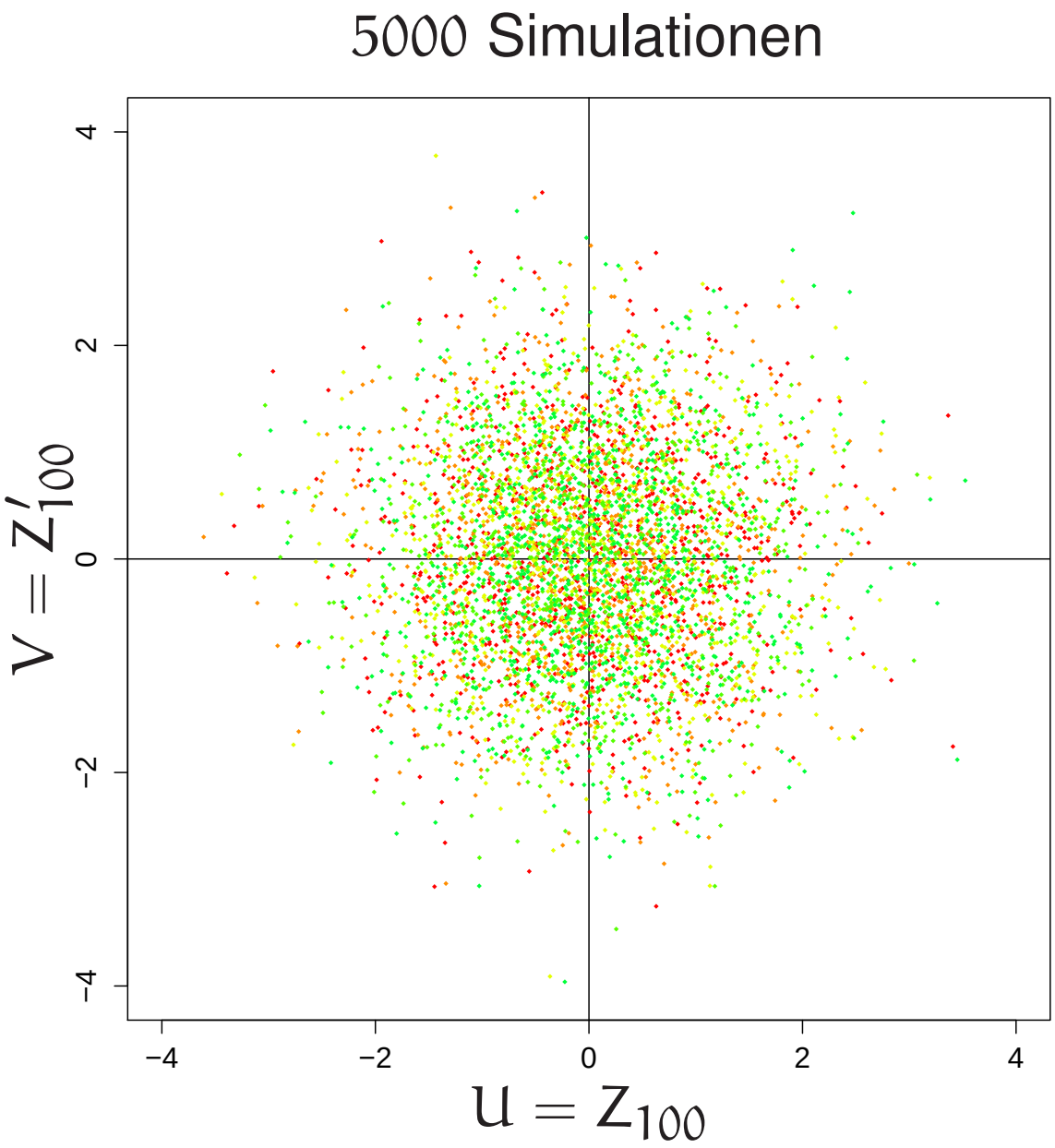
von $U$ und $V$ aus?

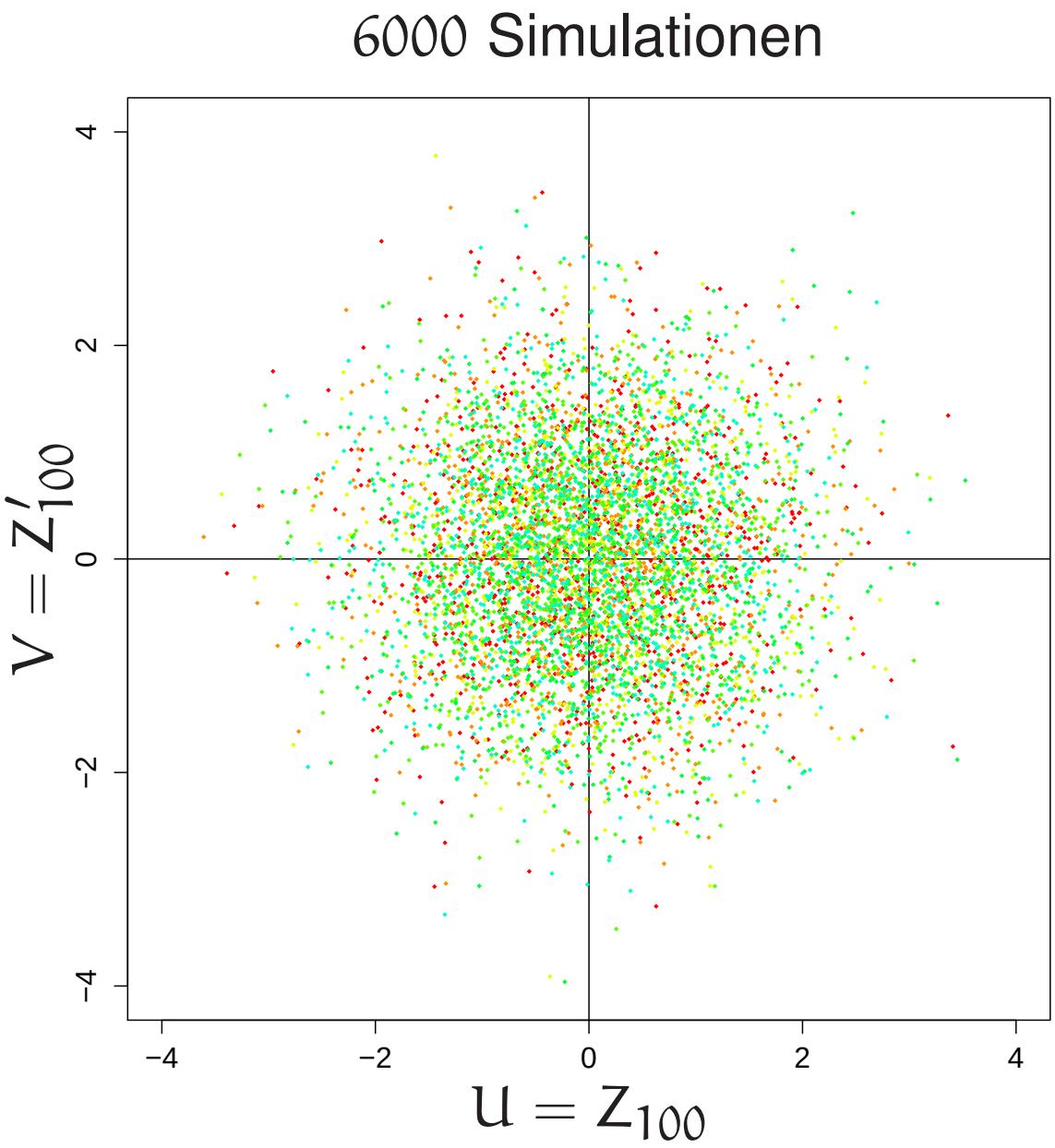

1000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

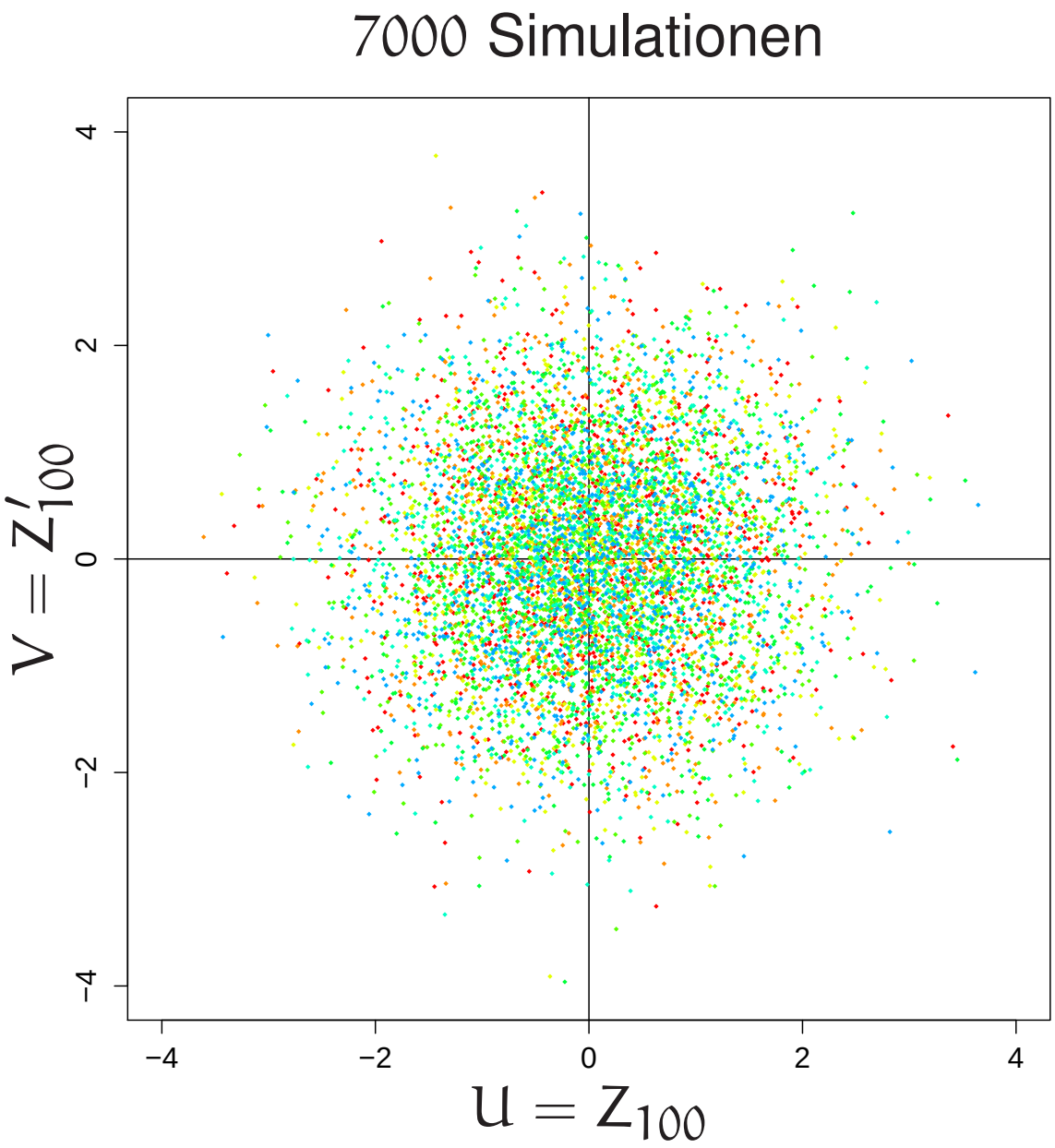

2000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

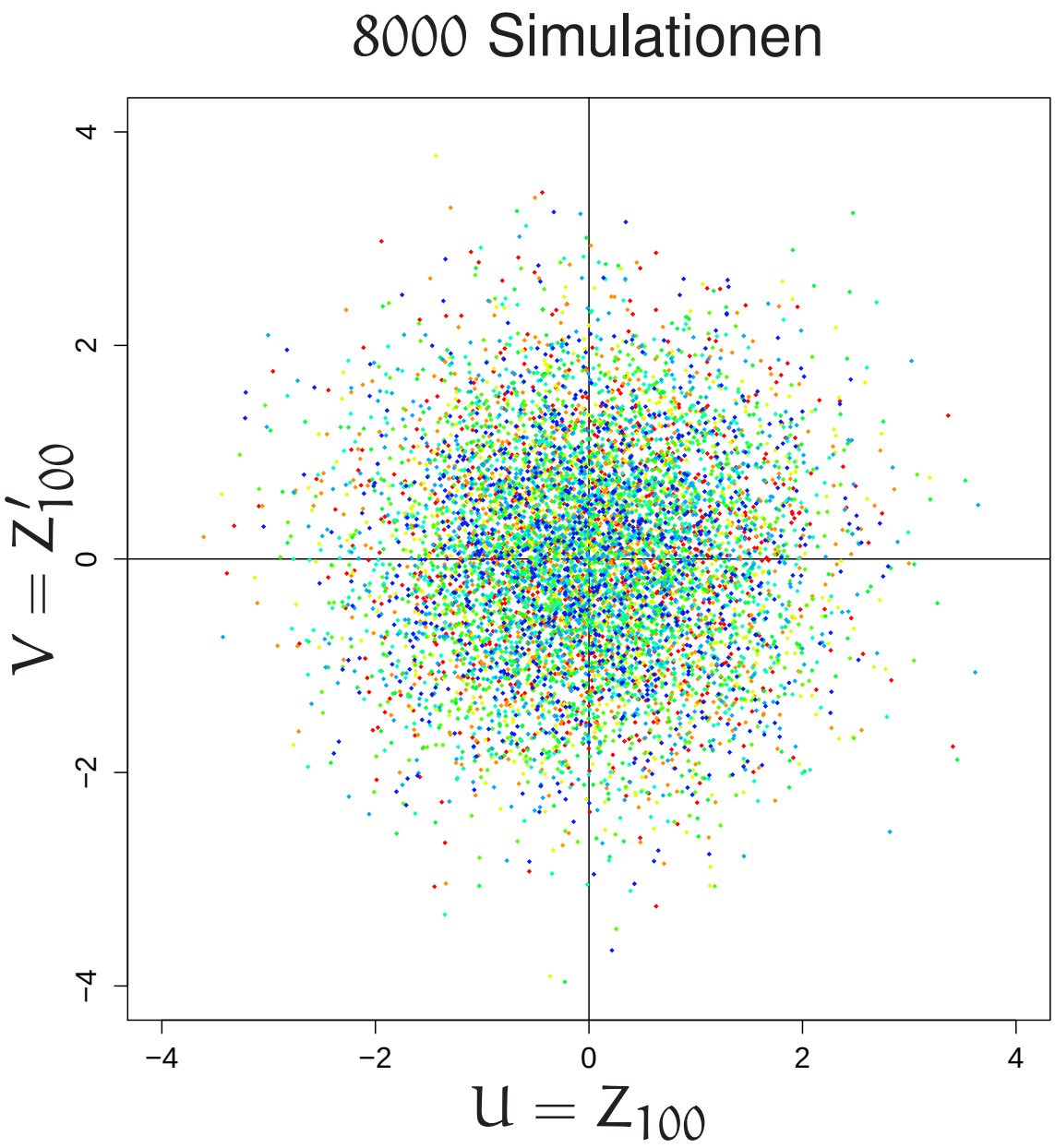

3000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
$V = Z'_{100}$
−4
−2
0
2
4
$U = Z_{100}$

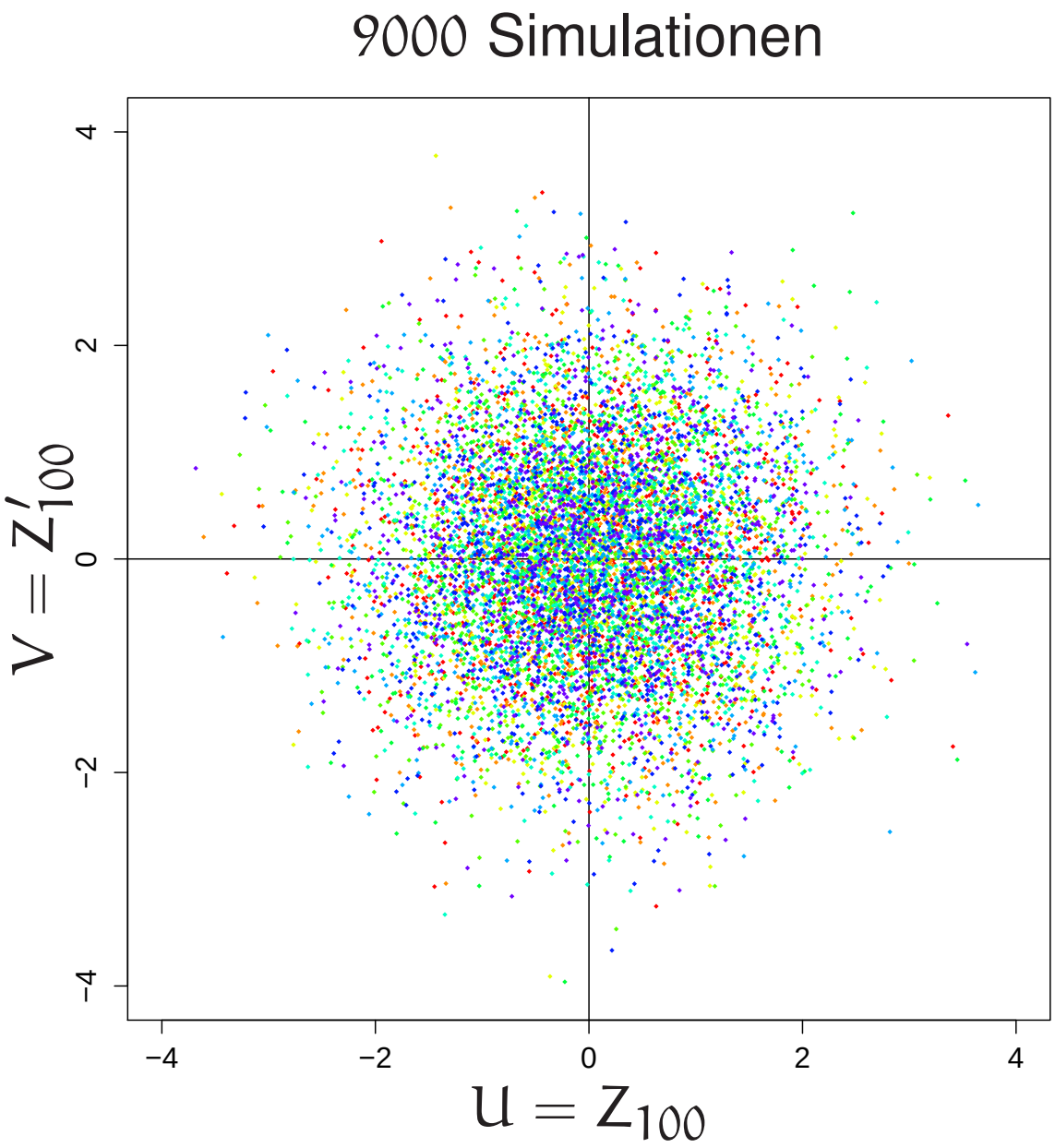

4000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
$V = Z'_{100}$
−4
−2
0
2
4
$U = Z_{100}$

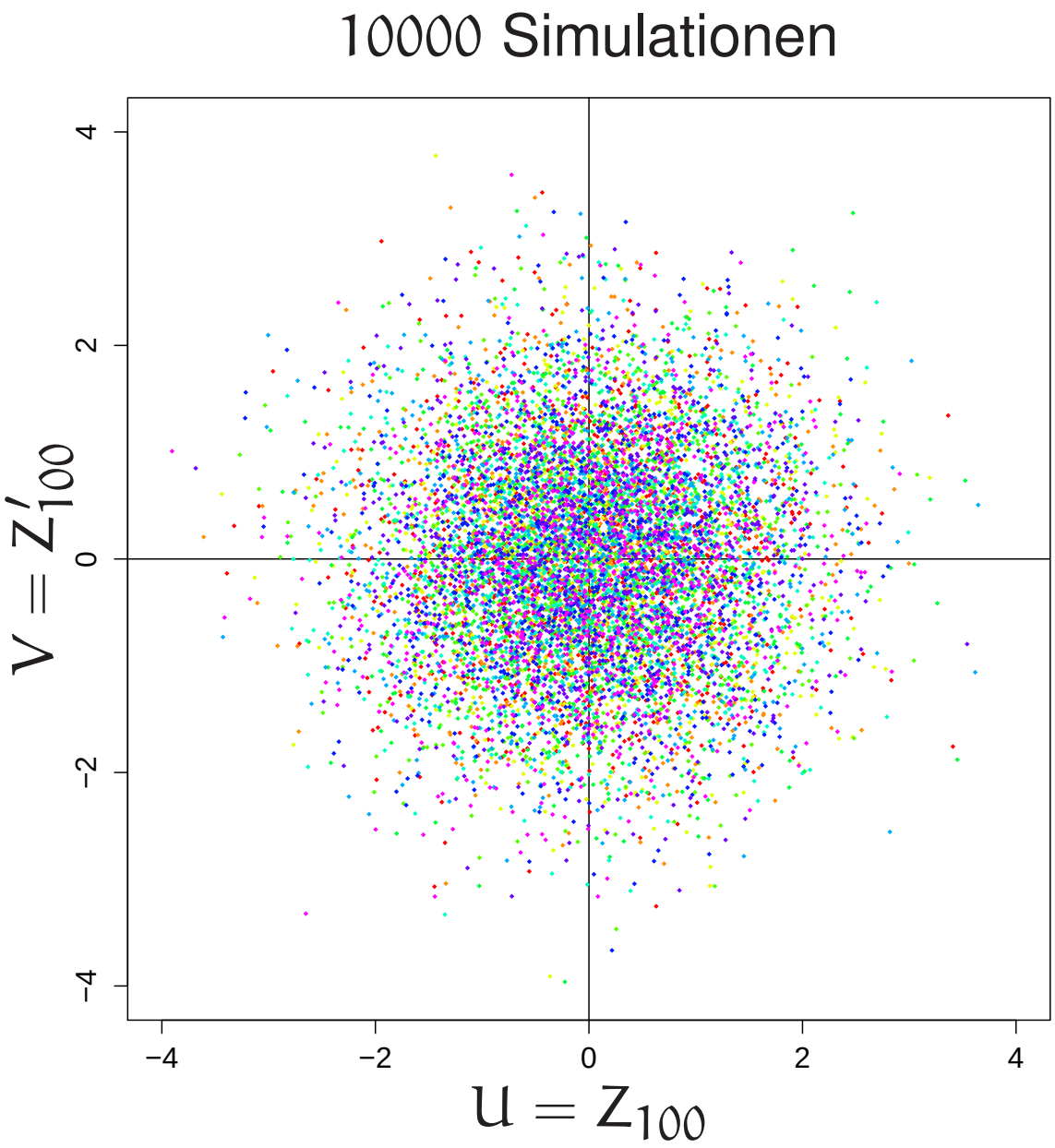

5000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

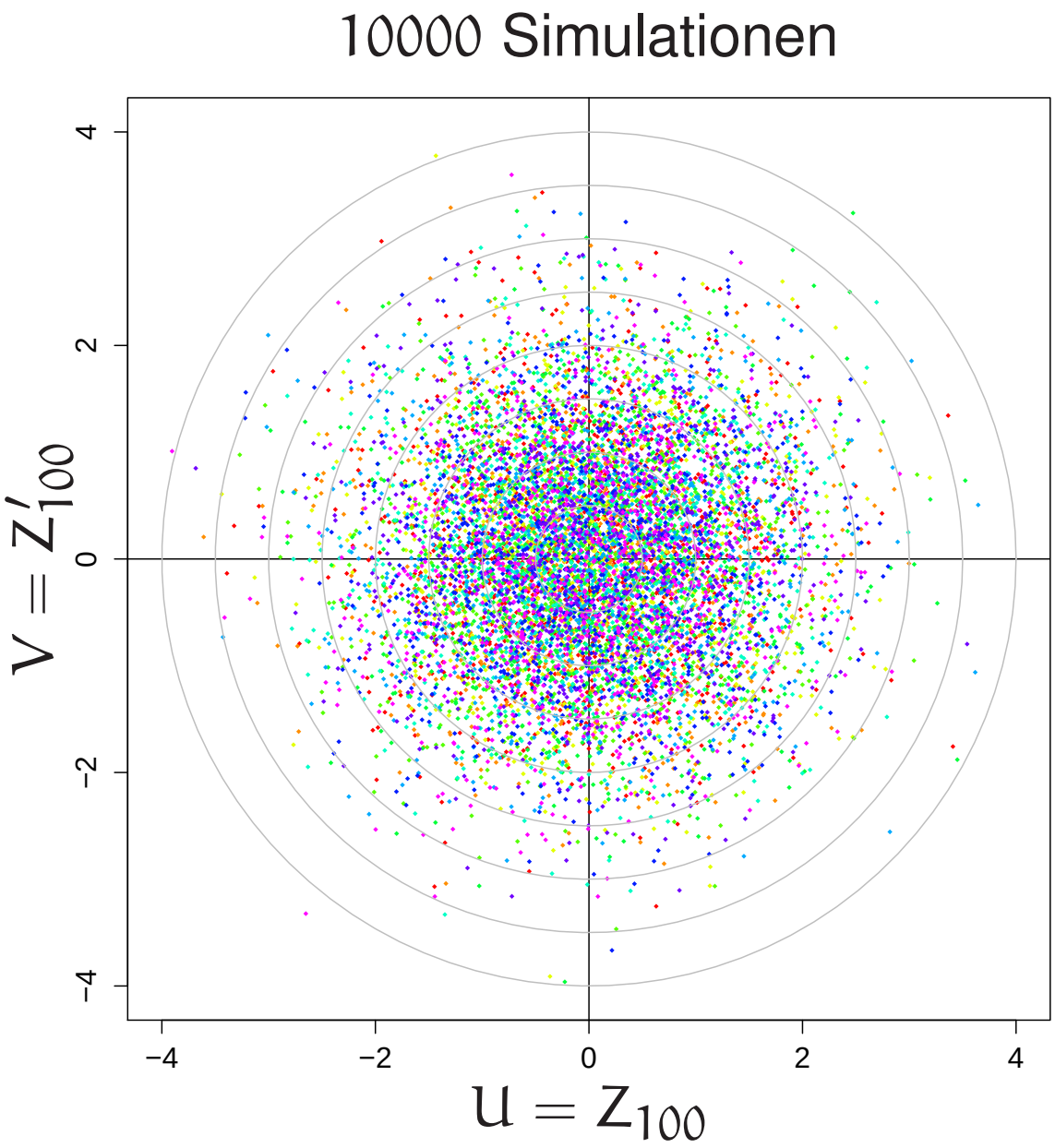

6000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


7000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

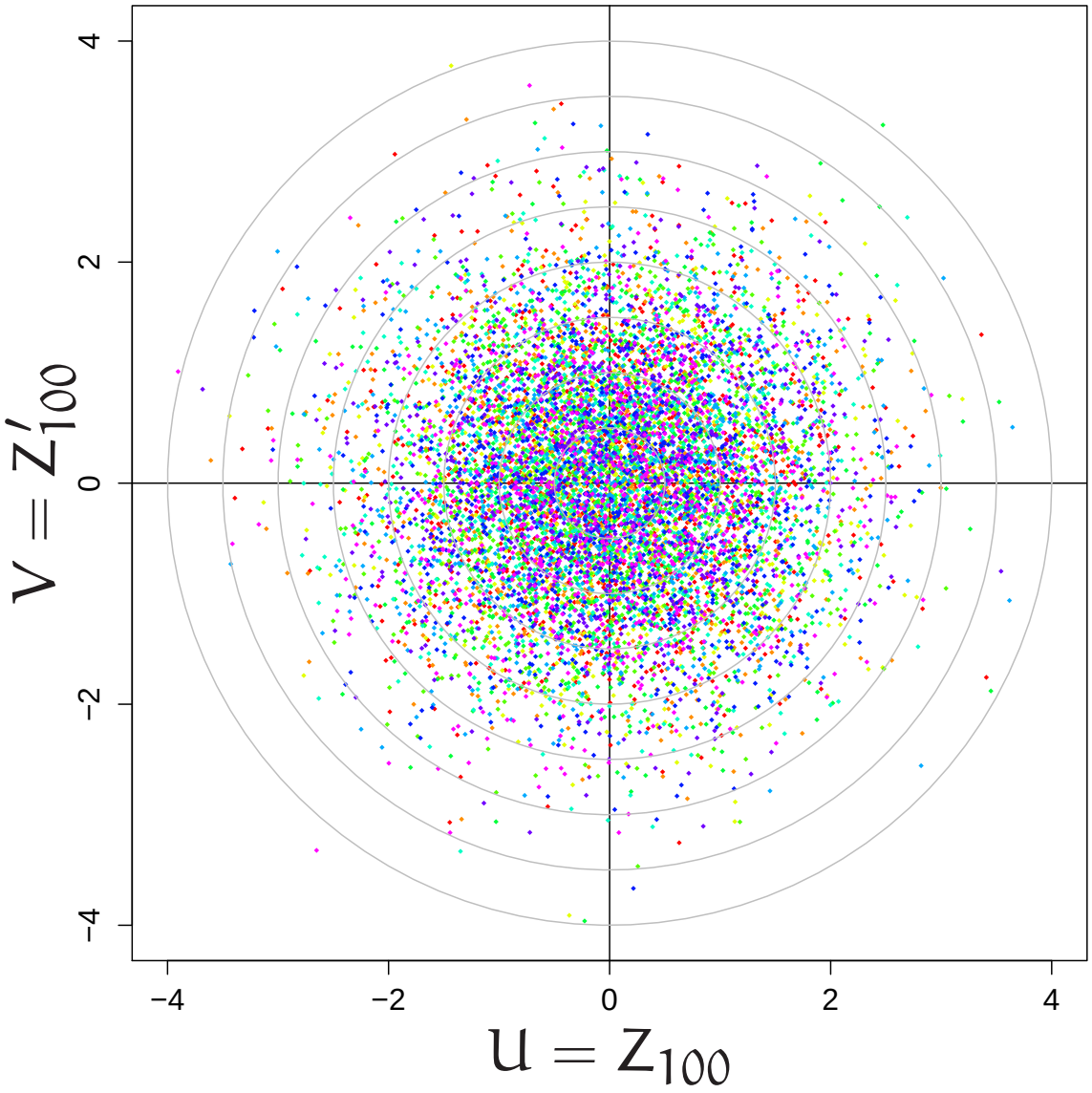

8000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


9000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$v = z'_{100}$
$u = z_{100}$


10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$


10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

Die Verteilung von $(U, V)$ ist annähernd rotationssymmetrisch!



# Eine Charakterisierieung der zweidimensionalen Standardnormalverteilung

Behauptung:

Aus “$U$ und $V$ unabhängig und identisch verteilt’

und

“Verteilung von $(U, V)$ rotationssymmetrisch”

folgt,

dass $U$ und $V$ normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

$U, V$ *unabhängig* bedeutet:

$$(*) \quad f_{(U,V)}(a,b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein $g$ mit

$$(**) \quad f_{(U,V)}(a,b) = g(r), \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt aus $(*)$ und $(**)$:

$$h(a)h(b) = g(r), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$h(a)\,h(b) = g(r), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die zwei Paare $(a, b)$ und $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$ haben dasselbe $r$.

Also:

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Das ist eine Gleichung für $h$. Eine Lösung hiervon ist:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

Denn

$$e^{-a^2} e^{-b^2} = 1 \cdot e^{-(a^2+b^2)}$$

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2+b^2})$$

Wie sehen *alle* die $h$ aus, die diese Beziehung erfüllen?

$$w(u) := h(\sqrt{u}),\ u \geq 0, \text{ erfüllt}$$

$$w(a^2)w(b^2) = w(0)w(a^2+b^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$w(u)\,w(v) \;=\; k_0\,w(u+v), \qquad u, v \geq 0$$

hat als allgemeine Lösung

$$w(u) = k_0 e^{-k_1 u}, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt:

$$h(a) = w(a^2) = k_0\,e^{-k_1 a^2}.$$

## FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).