

# Vorlesung 7a

## Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

### Teil 3

### Die Botschaft des Zentralen Grenzwertsatzes

(Buch S. 77)

Zur Erinnerung:

$(Z_1, \dots, Z_n)$  heißt standard-normalverteilt im  $\mathbb{R}^n$

$:\Leftrightarrow$

$Z_1, \dots, Z_n$  sind unabhängig und  $N(0,1)$ -verteilt

Auch  $\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}$  ist dann  $N(0,1)$ -verteilt!

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert

eine gewaltige Weiterung der vorigen Aussage

(asymptotisch für große  $n$ ):



# Zentraler Grenzwertsatz (Version (0,1)) salopp formuliert:

“Die durch  $\sqrt{n}$  geteilte Summe von  
 $n$  unabhängigen, identisch verteilten  
nicht notwendig normalverteilten  
 $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariablen  
mit Erwartungswert 0 und Varianz 1  
ist für große  $n$  annähernd standard-normalverteilt”



# Satz (ZGWS, "Version (0,1)")

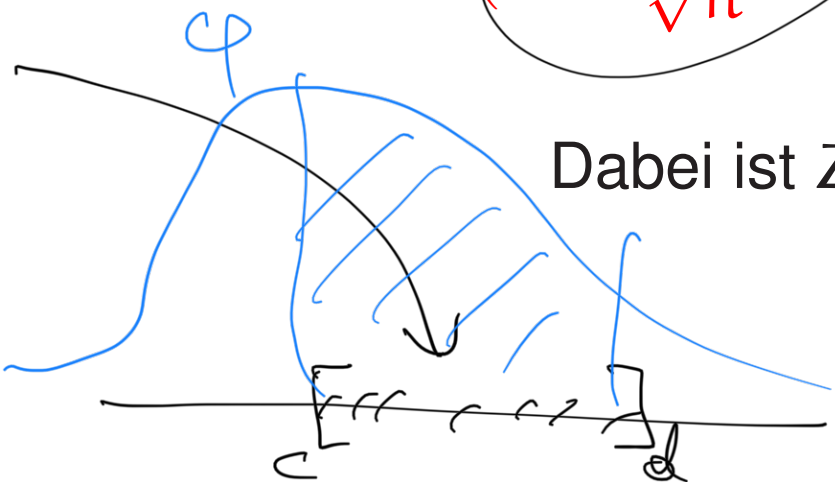
Seien  $X_1, X_2, \dots$   
unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable  
mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Dann gilt für alle  $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \in [c, d]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist  $Z$  standard-normalverteilt.

$$= \int_c^d \varphi(a) da$$



Jetzt:  $(\mu, \sigma^2)$  statt  $(0, 1)$ :

Hat  $X$  den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ ,  
dann hat  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Man nennt  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  auch die *Standardisierung* von  $X$ .

Jetzt:  $(\mu, \sigma^2)$  statt  $(0, 1)$ :

Hat  $X$  den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ ,  
dann hat  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Man nennt  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  auch die *Standardisierung* von  $X$ .

Sind  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige Kopien von  $X$ ,  
dann ergibt der ZGWS (Version  $(0,1)$ )  
angewandt auf die Standardisierungen der  $X_i$ :



## Zentraler Grenzwertsatz (Klassische Version)

Seien  $X_1, X_2, \dots$

unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert  $\mu$  und endlicher Varianz  $\sigma^2 > 0$ .

Dann gilt für alle  $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist  $Z$  standard-normalverteilt.



Der Münzwurf passt in den Rahmen des klassischen ZGWS:

$(X_i)$  sei eine Bernoulli-Folge zum Parameter  $p$ ,  
also insbesondere:

$X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{Var}[X_i] = pq$$

Dann gilt für alle  $c < d \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{P} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{npq}} \in [c, d] \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-a^2/2} da.$$

Das ist der Satz von de Moivre (1733, für  $p = 1/2$ )  
und Laplace (1812, für allgemeines  $p$ ).

# Der klassische Zentrale Grenzwertsatz in anschaulichen Worten:

“Die standardisierte Summe von **VIELEN**  
unabhängigen, identisch verteilten  
nicht notwendig normalverteilten  
 $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariablen  
mit endlicher Varianz  
ist annähernd standard-normalverteilt”

Manchmal noch praktischer so:

“Die standardisierte Summe von VIELEN  
unabhängigen, identisch verteilten  
nicht notwendig normalverteilten  
 $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariablen  
mit endlicher Varianz  
ist annähernd standard-normalverteilt”

## Beispiel:

$X_1, X_2, \dots$  seien unabhängig und identisch verteilt  
mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$

Dann ist für großes  $n$  die Zufallsvariable

$$M_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

approximativ  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ -verteilt.

Spezialfall des vorigen Beispiels:

## Ziehen mit Zurücklegen

$S$  sei eine endliche Menge mit  $g := \#S$ ,

$h : S \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Abbildung (ein “individuelles Merkmal”)

$$\mu := \frac{1}{g} \sum_{a \in S} h(a) \quad \dots \text{ Populationsmittelwert}$$

$$\sigma^2 := \frac{1}{g} \sum_{a \in S} (h(a) - \mu)^2 \quad \dots \text{ Populationsvarianz}$$

$J_1, J_2, \dots$  seien unabhängig und uniform auf  $S$  verteilt

Die Zufallsvariablen  $X_i := h(J_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

passen dann in den Rahmen des vorigen Beispiels.

“Die standardisierte Summe von VIELEN  
unabhängigen, identisch verteilten  
nicht notwendig normalverteilten  
 $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariablen  
mit endlicher Varianz  
ist annähernd standard-normalverteilt”

Diese Aussage bleibt auch  
unter schwächeren Bedingungen bestehen,  
sowohl was die Unabhängigkeit,  
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.



Eine Botschaft zum Mitnehmen ins Leben  
(salopp formuliert):

“ Die Summe von vielen  
annähernd unabhängigen Zufallsvariablen,  
die nicht notwendig identisch verteilt, aber  
ungefähr von derselben Größenordnung sind,  
ist annähernd normalverteilt.”

Beispiel: **Ziehen ohne Zurücklegen.**

$S$  sei eine endliche Menge mit  $g := \#S$ ,

$h : S \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Abbildung (ein “individuelles Merkmal”)

$J_1, J_2, \dots$  rein zufälliges Ziehen **ohne** Zurücklegen aus  $S$ .

Dann ist für großes  $n$  und großes  $g - n$

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(J_i)$$

annähernd normalverteilt.

Beispiel: **Ziehen ohne Zurücklegen.**

$S$  sei eine endliche Menge mit  $g := \#S$ ,

$h : S \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Abbildung (ein “individuelles Merkmal”)

$J_1, J_2, \dots$  rein zufälliges Ziehen **ohne** Zurücklegen aus  $S$ .

Dann ist für großes  $n$  und großes  $g - n$

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(J_i)$$

annähernd normalverteilt.

(Zur Berechnung von  $\mathbf{Var}[M_n]$  aus der Populationsvarianz siehe ÜA 24 + ein Übungsbeispiel auf dem Weihnachtsblatt.)

# Zentraler Grenzwertsatz: Meilensteine in seiner Geschichte

Abraham **de Moivre**:

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon **Laplace**:

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich **Chebyshev**:

Skizze eines Beweises für den allgemeinen Fall (1887)

Aleksandr Mikhailovich **Lyapunov**:

“Klassischer” zentraler Grenzwertsatz (1901)

Noch allgemeiner (1906)

Andrei Andreyevich **Markov**:

weitere Verallgemeinerungen (~ 1910)