Vorlesung 7a

Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

Teil 3

Die Botschaft des Zentralen Grenzwertsatzes

(Buch S. 77)

Zur Erinnerung:

$(Z_1, \ldots, Z_n)$ heißt standard-normalverteilt im $\mathbb{R}^n$

$$:\Longleftrightarrow$$

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0,1)-verteilt

Auch $\dfrac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$ ist dann N(0,1)-verteilt!

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert

eine gewaltige Weiterung der vorigen Aussage

(asymptotisch für große n):

Zentraler Grenzwertsatz (Version (0,1)) salopp formuliert:

“Die durch $\sqrt{n}$ geteilte Summe von
n unabhängigen, identisch verteilten
nicht notwendig normalverteilten
$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen
mit Erwartungswert 0 und Varianz 1
ist für große n annähernd standard-normalverteilt”

Satz (ZGWS, “Version (0,1)”)

Seien $X_1, X_2, \ldots$

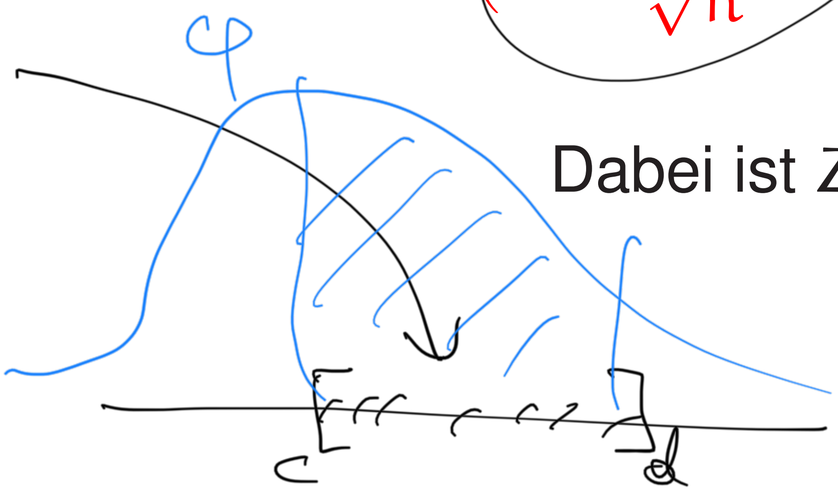
unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable

mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \in [c, d]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{P}(Z \in [c, d]). \quad = \int_c^d \varphi(a)\,da$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.



Jetzt: (μ, σ^2) statt $(0, 1)$:

Hat X den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2,
dann hat $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Man nennt $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ auch die *Standardisierung* von X.

Jetzt: (μ, σ^2) statt $(0, 1)$:

Hat X den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2,
dann hat $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Man nennt $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ auch die *Standardisierung* von X.

Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X,
dann ergibt der ZGWS (Version (0,1))
angewandt auf die Standardisierungen der X_i:

Zentraler Grenzwertsatz (Klassische Version)

Seien $X_1, X_2, \dots$

unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit

endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$.

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{(X_1 - \mu)}{\sigma} + \dots + \frac{(X_n - \mu)}{\sigma}\right)$$

Der Münzwurf passt in den Rahmen des klassischen ZGWS:

(X_i) sei eine Bernoulli-Folge zum Parameter p,

also insbesondere:

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{Var}[X_i] = pq$$

ist Binom (n,p)-verteilt

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{npq}} \in [c, d]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-a^2/2}\, da.$$

Das ist der Satz von de Moivre (1733, für $p = 1/2$))

und Laplace (1812, für allgemeines p).

Der klassische Zentrale Grenzwertsatz
in anschaulichen Worten:

"Die standardisierte Summe von VIELEN
unabhängigen, identisch verteilten
nicht notwendig normalverteilten
$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen
mit endlicher Varianz
ist annähernd standard-normalverteilt"

Manchmal noch praktischer so:

“Die standardisierte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

ist annähernd standard-normalverteilt”

Beispiel:

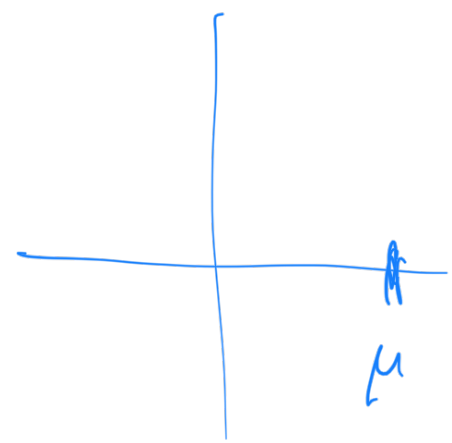
$X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt

mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

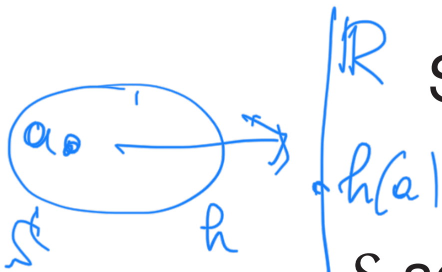
Dann ist für großes n die Zufallsvariable

$$M_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

$\mathrm{Var}[M_n] = \frac{1}{n}\sigma^2$



approximativ $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.



Spezialfall des vorigen Beispiels:

Ziehen mit Zurücklegen

S sei eine endliche Menge mit $g := \#S$,

$h : S \to \mathbb{R}$ sei eine Abbildung (ein “individuelles Merkmal”)

$$\mu := \frac{1}{g} \sum_{a \in S} h(a) \qquad \ldots \text{ Populationsmittelwert}$$

$$\sigma^2 := \frac{1}{g} \sum_{a \in S} (h(a) - \mu)^2 \qquad \ldots \text{ Populationsvarianz}$$

$J_1, J_2, \ldots$ seien unabhängig und uniform auf S verteilt

Die Zufallsvariablen $X_i := h(J_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

passen dann in den Rahmen des vorigen Beispiels.

“Die standardisierte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

ist annähernd standard-normalverteilt”

Diese Aussage bleibt auch

unter schwächeren Bedingungen bestehen,

sowohl was die Unabhängigkeit,

als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Eine Botschaft zum Mitnehmen ins Leben

(salopp formuliert):

“ Die Summe von vielen

annähernd unabhängigen Zufallsvariablen,

die nicht notwendig identisch verteilt, aber

ungefähr von derselben Größenordnung sind,

ist annähernd normalverteilt.”

Beispiel: **Ziehen ohne Zurücklegen.**

S sei eine endliche Menge mit $g := \#S$,

$h : S \to \mathbb{R}$ sei eine Abbildung (ein “individuelles Merkmal”)

$J_1, J_2, \ldots$ rein zufälliges Ziehen **ohne** Zurücklegen aus S.

Dann ist für großes n und großes $g - n$

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(J_i)$$

annähernd normalverteilt.

Beispiel: **Ziehen ohne Zurücklegen.**

S sei eine endliche Menge mit $g := \#S$,

$h : S \to \mathbb{R}$ sei eine Abbildung (ein "individuelles Merkmal")

$J_1, J_2, \ldots$ rein zufälliges Ziehen **ohne** Zurücklegen aus S.

Dann ist für großes n und großes $g - n$

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(J_i)$$

annähernd normalverteilt.

(Zur Berechnung von $\mathbf{Var}[M_n]$ aus der Populationsvarianz siehe ÜA 24 + ein Übungsbeispiel auf dem Weihnachtsblatt.)

Zentraler Grenzwertsatz:

Meilensteine in seiner Geschichte

Abraham de Moivre:

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace:

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev:

Skizze eines Beweises für den allgemeinen Fall (1887)

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov:

"Klassischer" zentraler Grenzwertsatz (1901)

Noch allgemeiner (1906)

Andrei Andreyevich Markov:

weitere Verallgemeinerungen (~ 1910)