

Vorlesung ~~6/10~~

Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

Teil 1:

Die Standardnormalverteilung auf \mathbb{R}^2

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt** (auf \mathbb{R}^1).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1) da_1 \varphi(a_2) da_2$$

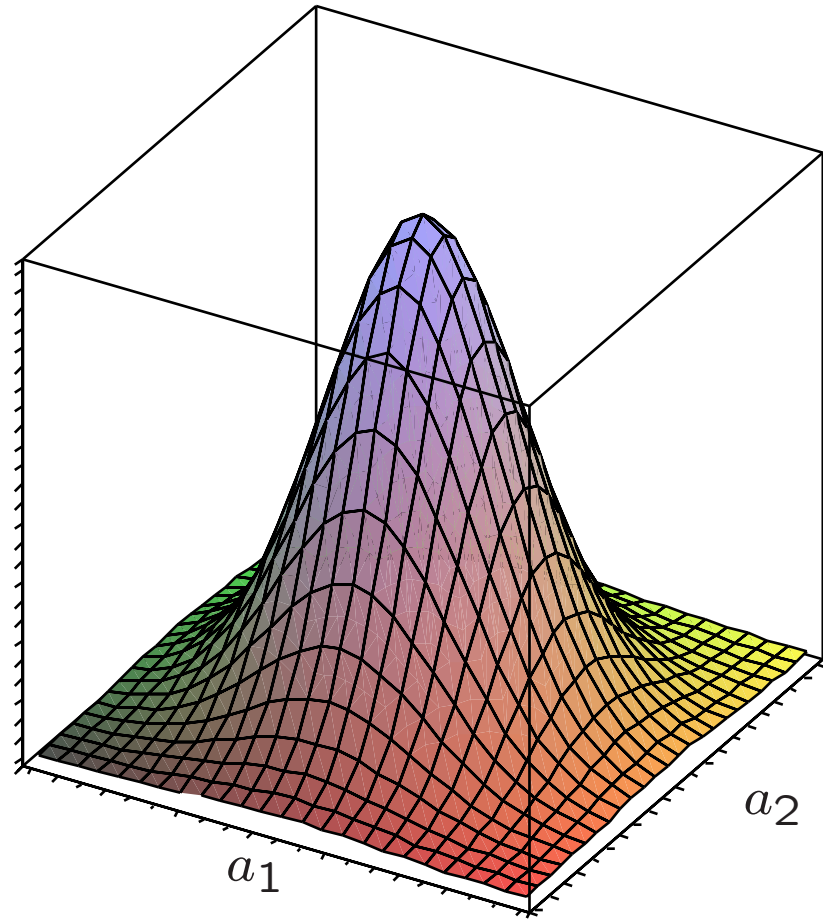
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2} da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |a|^2 := a_1^2 + a_2^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine \mathbb{R}^2 -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a) da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^2** .

Aufgabe:

Berechne $\mathbf{P}(|Z|^2 > b)$

für ein auf \mathbb{R}^2 standard-normalverteiltes Z

und $b > 0$.

Aufgabe:

Berechne $\mathbf{P}(|Z|^2 > b)$

für ein auf \mathbb{R}^2 standard-normalverteiltes Z

und $b > 0$.

Anders formuliert:

Berechne $\mathbf{P}(Z \in A)$

mit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > b\}$

Aufgabe:

Berechne $\mathbf{P}(|Z|^2 > b)$

für ein auf \mathbb{R}^2 standard-normalverteiltes Z

und $b > 0$.

Anders formuliert:

Berechne $\mathbf{P}(Z \in A)$

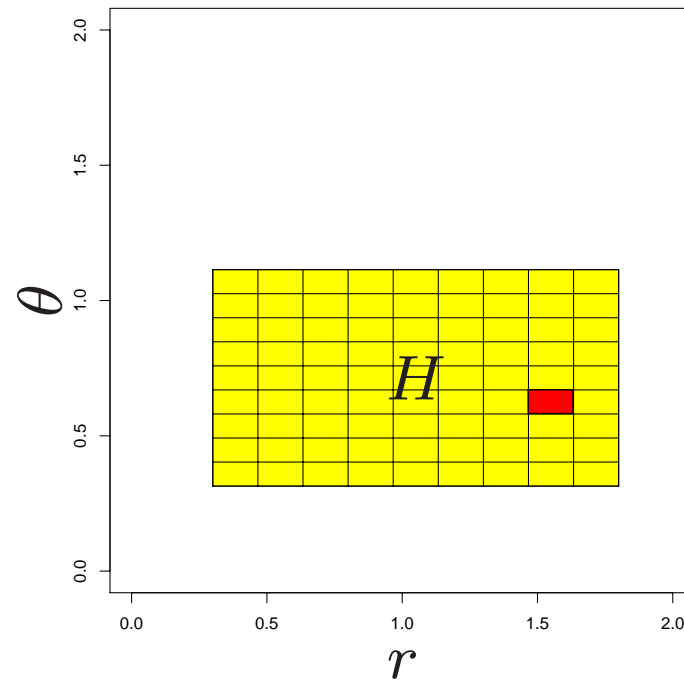
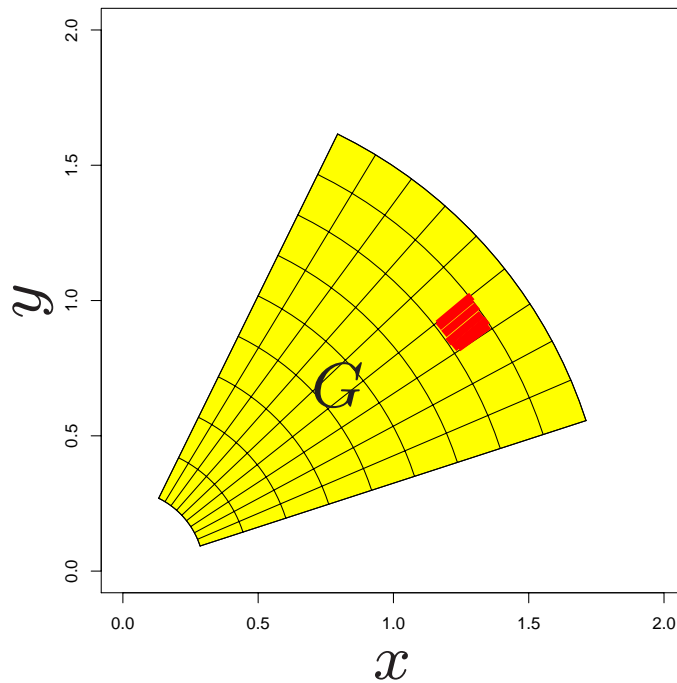
mit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > b\}$

Zu berechnen ist also

$$\frac{1}{2\pi} \iint_A e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_H e^{-r^2/2} r dr d\theta$$



Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\iint_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} \iint_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi(-e^{-r^2/2}) \Big|_{\sqrt{b}}^{\infty} = 2\pi e^{-b/2}. \end{aligned}$$

Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} \iint_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi(-e^{-r^2/2}) \Big|_{\sqrt{b}}^{\infty} = 2\pi e^{-b/2}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(|Z|^2 > b) = \mathbf{P}(Z \in A)$$

Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} \iint_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi(-e^{-r^2/2}) \Big|_{\sqrt{b}}^{\infty} = 2\pi e^{-b/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Z|^2 > b) &= \mathbf{P}(Z \in A) \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_A e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = e^{-b/2}. \end{aligned}$$

Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} \iint_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi(-e^{-r^2/2}) \Big|_{\sqrt{b}}^{\infty} = 2\pi e^{-b/2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Z|^2 > b) &= \mathbf{P}(Z \in A) \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_A e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = e^{-b/2}. \end{aligned}$$

$|Z|^2$ ist $\text{Exp}(\frac{1}{2})$ -verteilt!

Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl Buch S. 71)

Z_1 und Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt.

Wir wollen einsehen, dass dann auch

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$$

standard-normalverteilt ist.

Z_1 und Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt.

Wir wollen einsehen, dass dann auch

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$$

standard-normalverteilt ist.

Dafür gibt es ein schönes geometrisches Argument.

Sei \vec{e}_1, \vec{e}_2 die Standardbasis in \mathbb{R}^2 .

Wir fassen das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die Koordinaten des zufälligen Vektors

$$\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \vec{e}_2$$

und stellen fest:

- Z_1 ist die Koordinate von \vec{Z} bgl. des Einheitsvektors \vec{e}_1 .
- $\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ist die Koordinate von \vec{Z} bgl. des Einheitsvektors

$$\vec{u}_{\text{diag}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2.$$
- Die Verteilung von \vec{Z} ist rotationssymmetrisch

Also ist Z_1 so verteilt wie $\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$.

- Z_1 ist die Koordinate von \vec{Z} bgl. des Einheitsvektors \vec{e}_1 .
- $\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ist die Koordinate von \vec{Z} bgl. des Einheitsvektors

$$\vec{u}_{\text{diag}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2.$$
- Die Verteilung von \vec{Z} ist rotationssymmetrisch

Also ist Z_1 so verteilt wie $\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$.

Und was dem Einheitsvektor \vec{u}_{diag} recht ist,
ist jedem Einheitsvektor $\vec{u} = \tau_1\vec{e}_1 + \tau_2\vec{e}_2$ billig !

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$Y := \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist $N(0, 1)$ -verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \vec{e}_2$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2$.)

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von
unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen
ist wieder normalverteilt.

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von
unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen
ist wieder normalverteilt.

Denn für Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt gilt:

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2 \right)$$

ist $N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ -verteilt.

und

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2).$$