

Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 1:

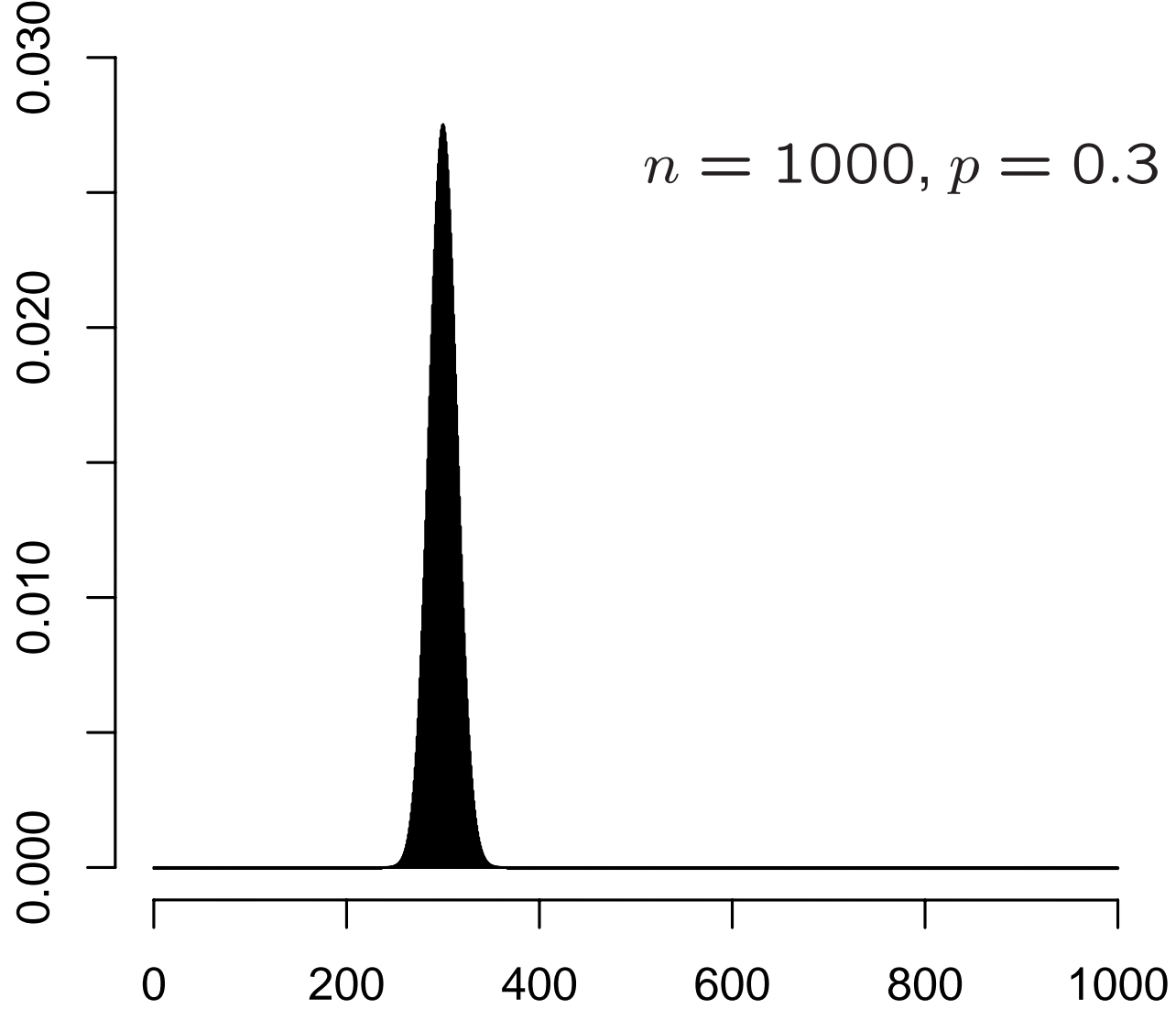
Von den Binomialgewichten
zur Gauß'schen Glockenkurve

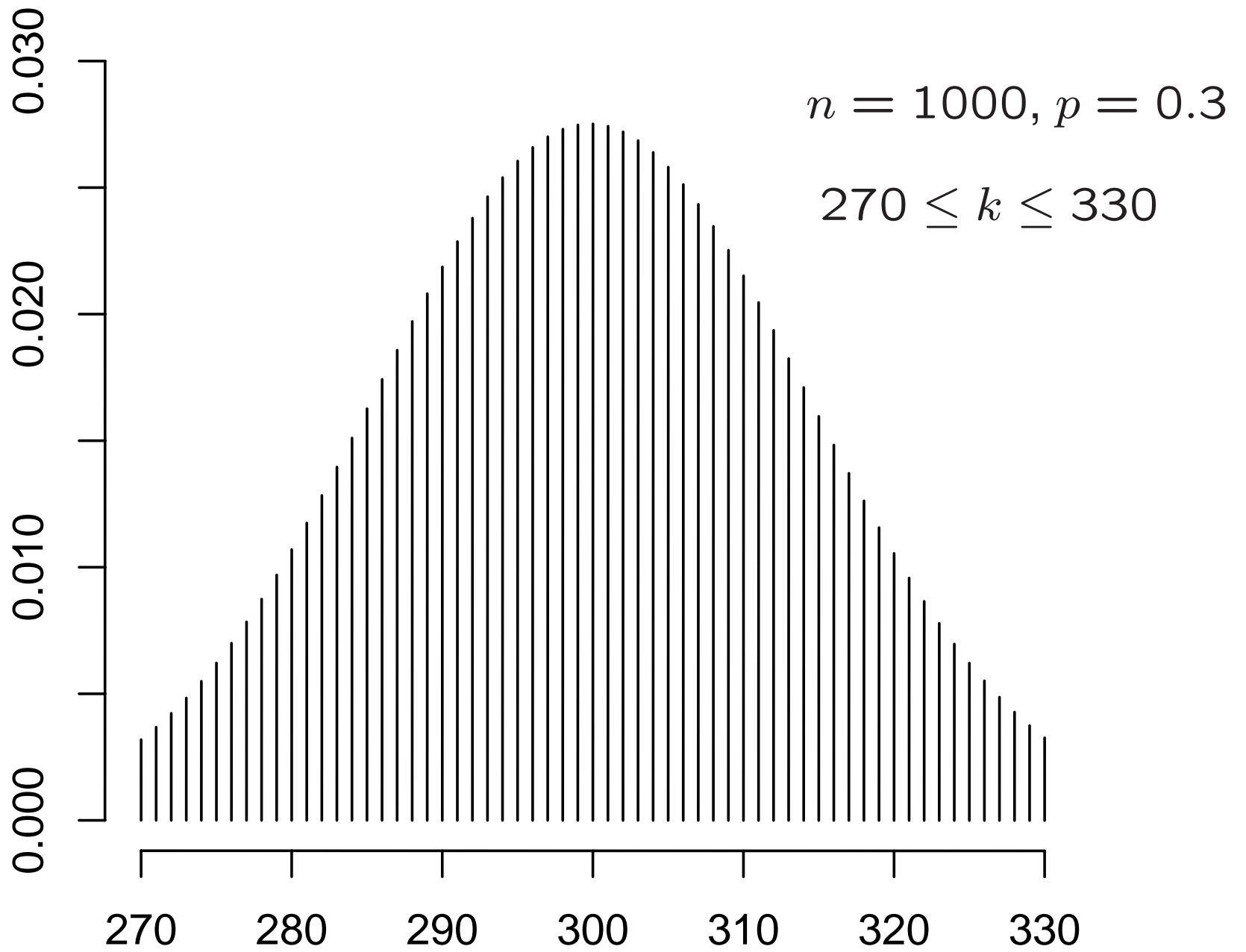
Binomialverteilungen

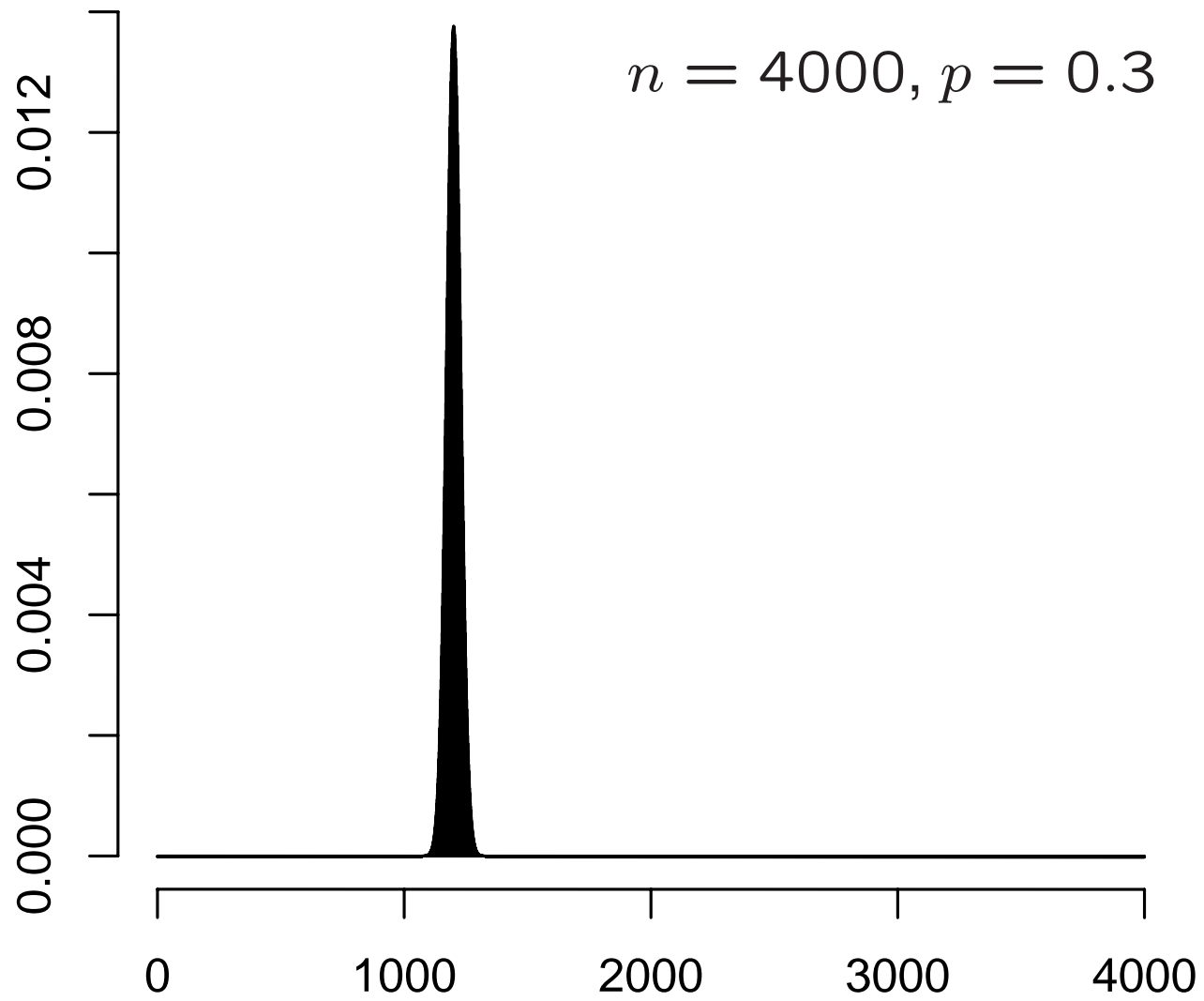
mit großem Erwartungswert und großer Varianz

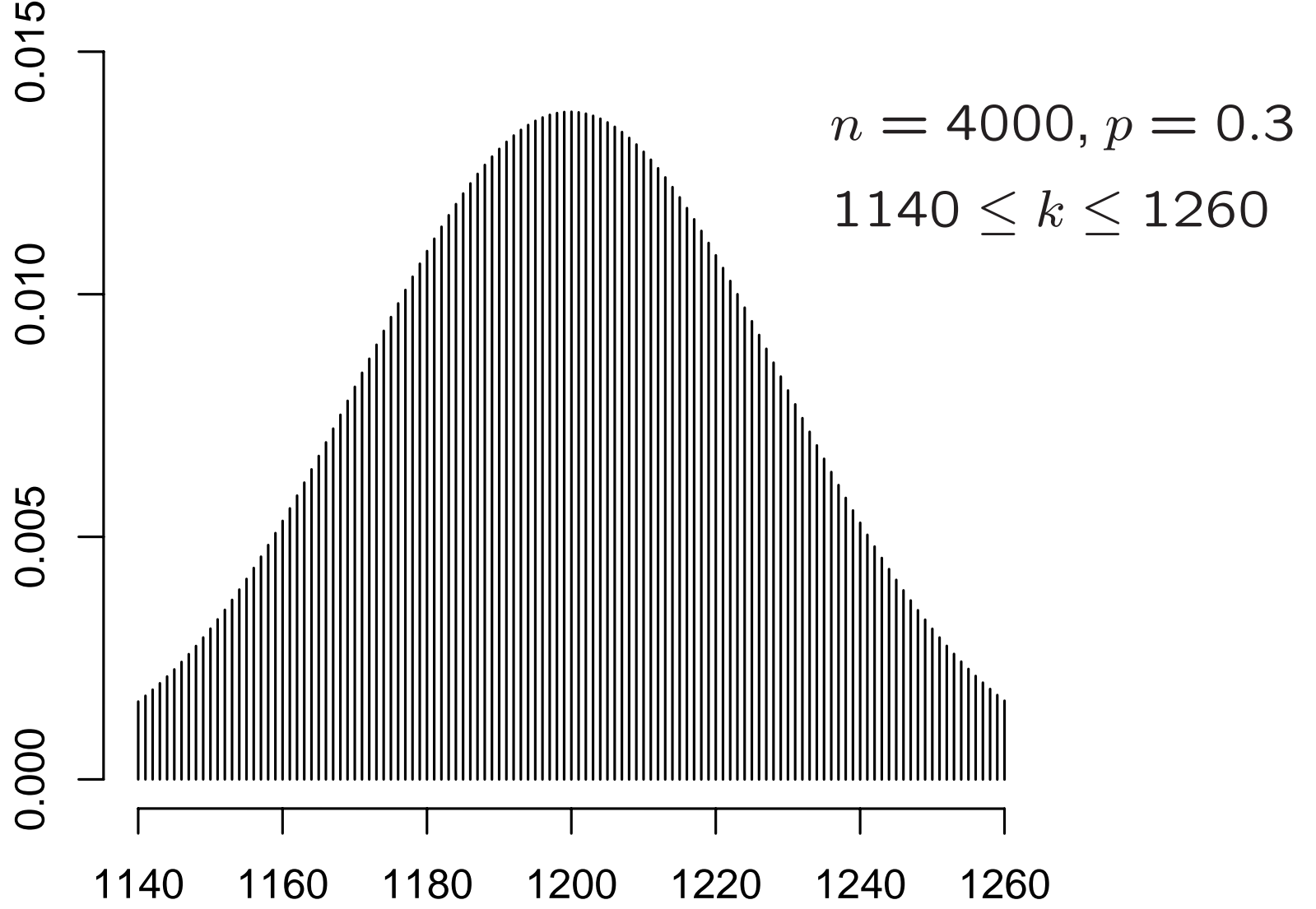
Wir wissen schon aus V4b4:
Für großes n und kleines p ,
so dass $np \approx npq \approx \lambda$,
ist die Binomialverteilung $\text{Bin}(n, p)$
approximativ gleich $\text{Pois}(\lambda)$.

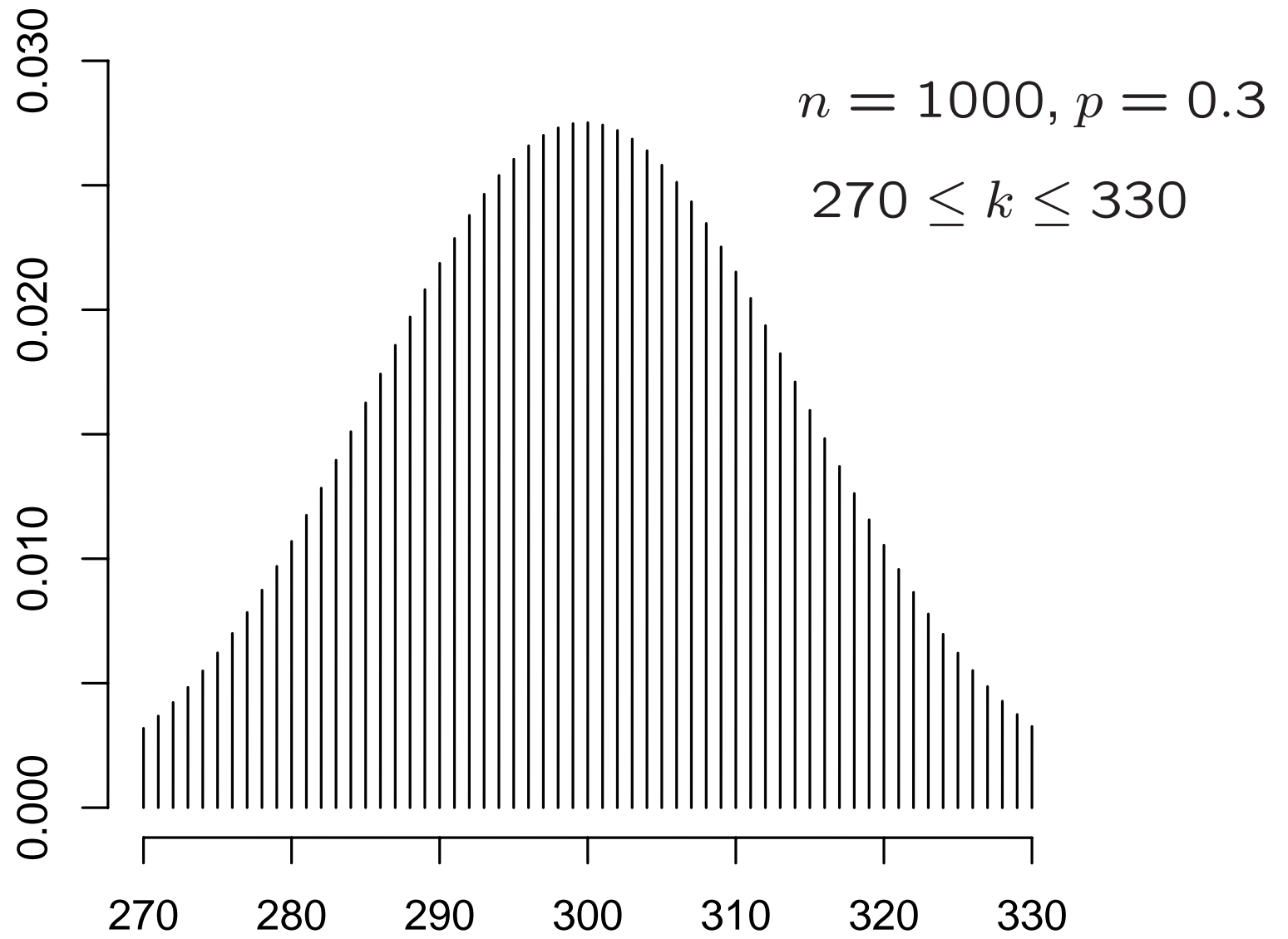
Wie aber sieht die $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung
mit großem n und großem npq aus? ?











Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq
sehen “glockenförmig” aus,
wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Approximation der Binomialgewichte
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)^2 \right) .$$

Approximation der Binomialgewichte
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right)$$

$$\mu := np, \quad \sigma := \sqrt{npq}$$

Approximation der Binomialgewichte
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\mu := np, \quad \sigma := \sqrt{npq}$$

Approximation der Binomialgewichte
mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) \quad (*)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

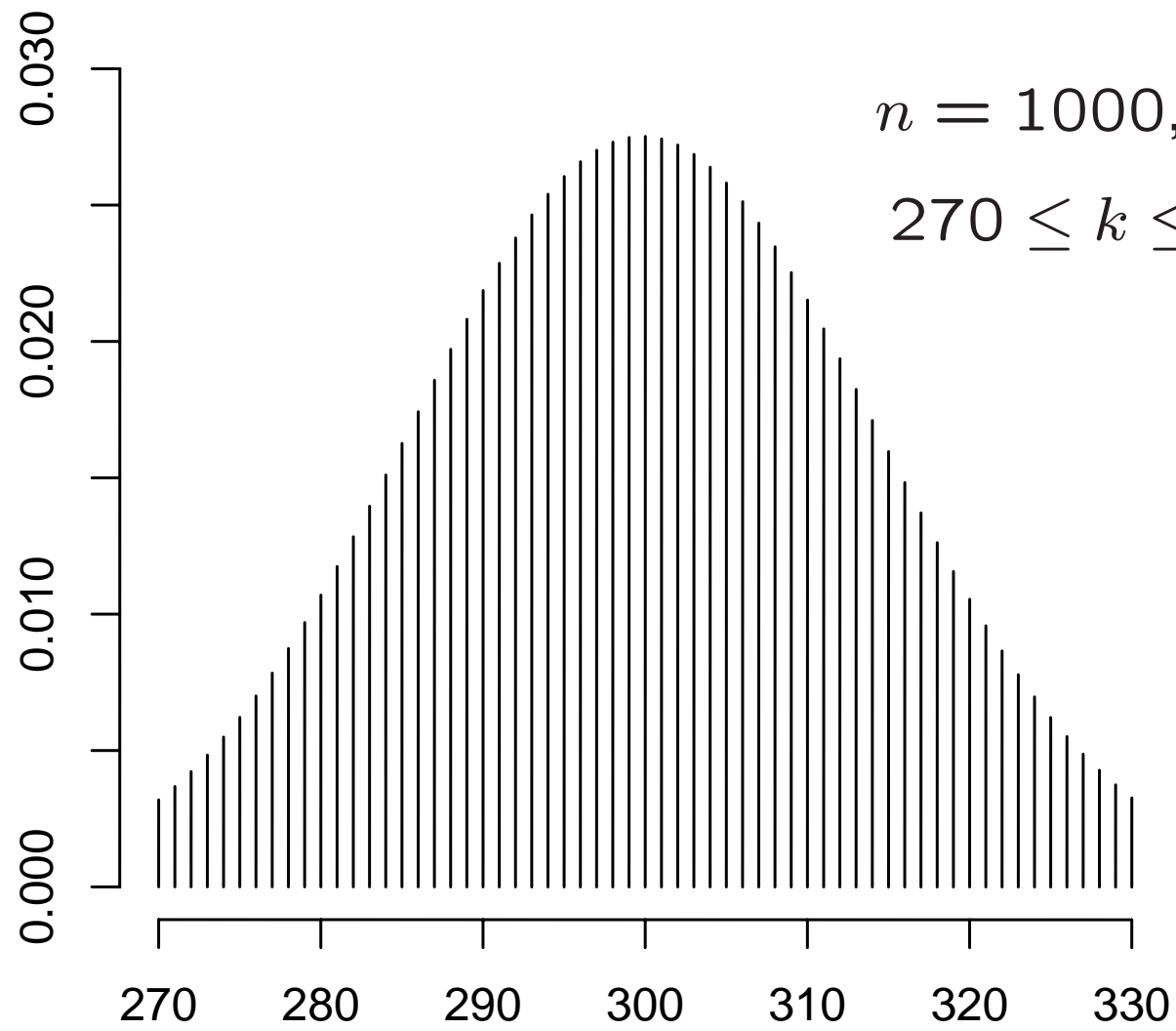
$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

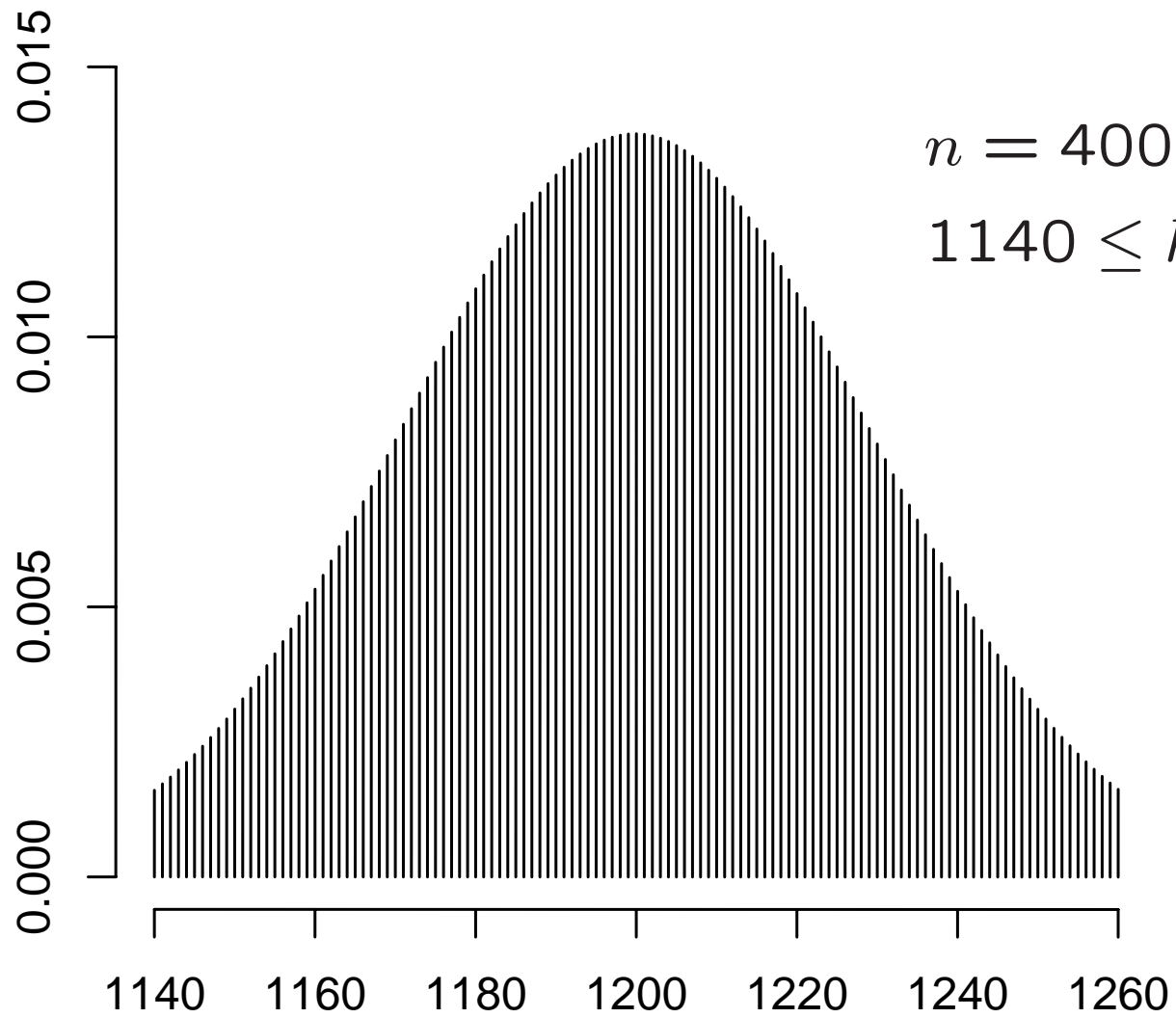
Wenn man n vervierfacht, verdoppelt sich σ .

Approximativ gilt dann in der Darstellung (*):

Im Bereich von einer Standardabweichung um das Zentrum μ
bringt man doppelt so viele k unter.

Das Gewicht jedes einzelnen k halbiert sich.





Die Ähnlichkeit ist unverkennbar:



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)