Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 2:

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$ und ihre Schwestern $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Wir hatten in V5a4 definiert:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

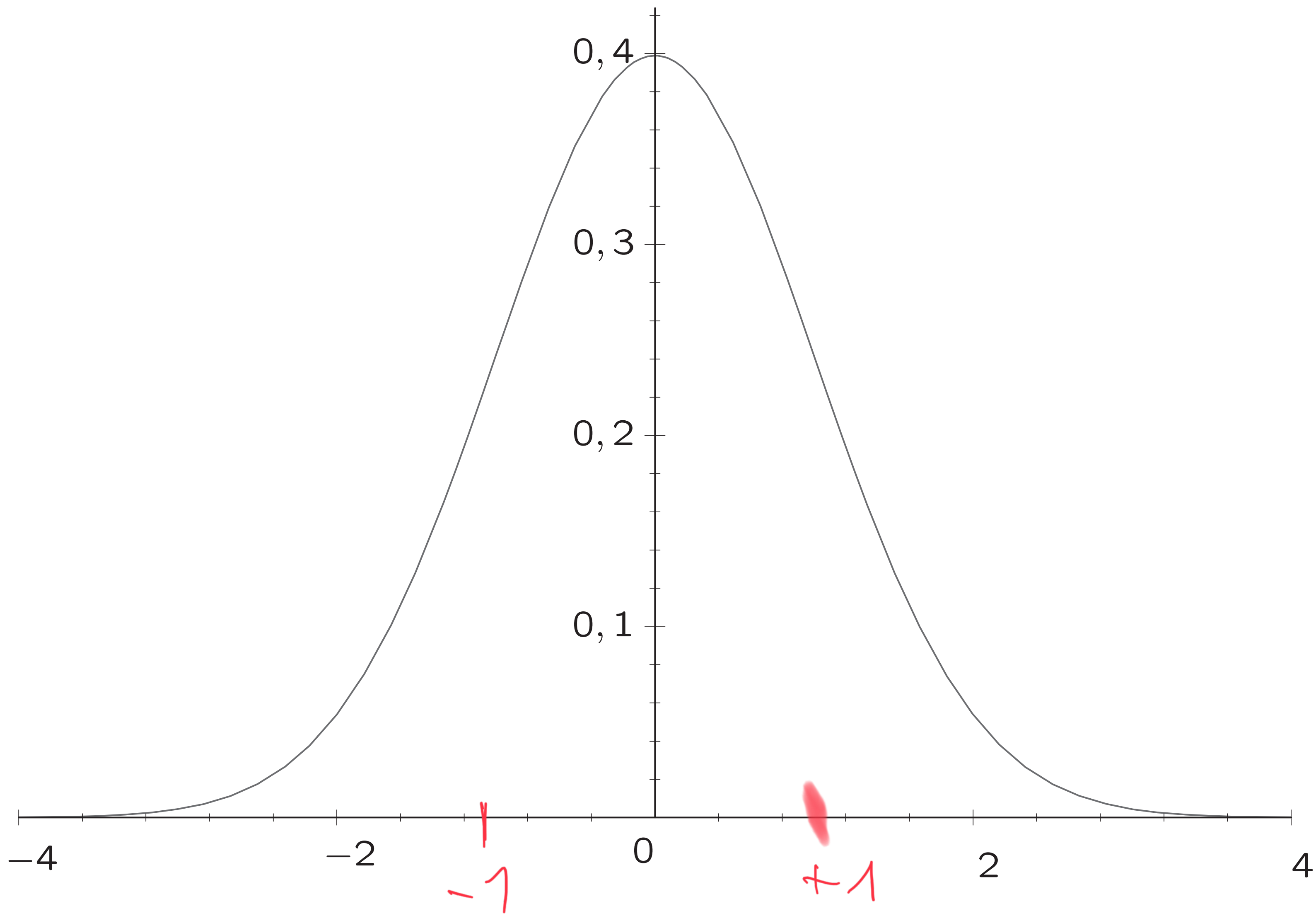
$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.

Es gilt (vgl. Teil 4 der heutigen VL):

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a)\,da = 1.$$



0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4
-1
+1

Für ein standard-normalverteiltes Z

hatten wir in V5a4 festgestellt:

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathbf{E}[Z^2] - (\mathbf{E}[Z])^2 =$$

$$= 1$$

Für ein standard-normalverteiltes Z

hatten wir in V5a4 festgestellt:

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Also:

$$\mathbf{Var}\,[Z] = 1.$$

Für ein standard-normalverteiltes Z

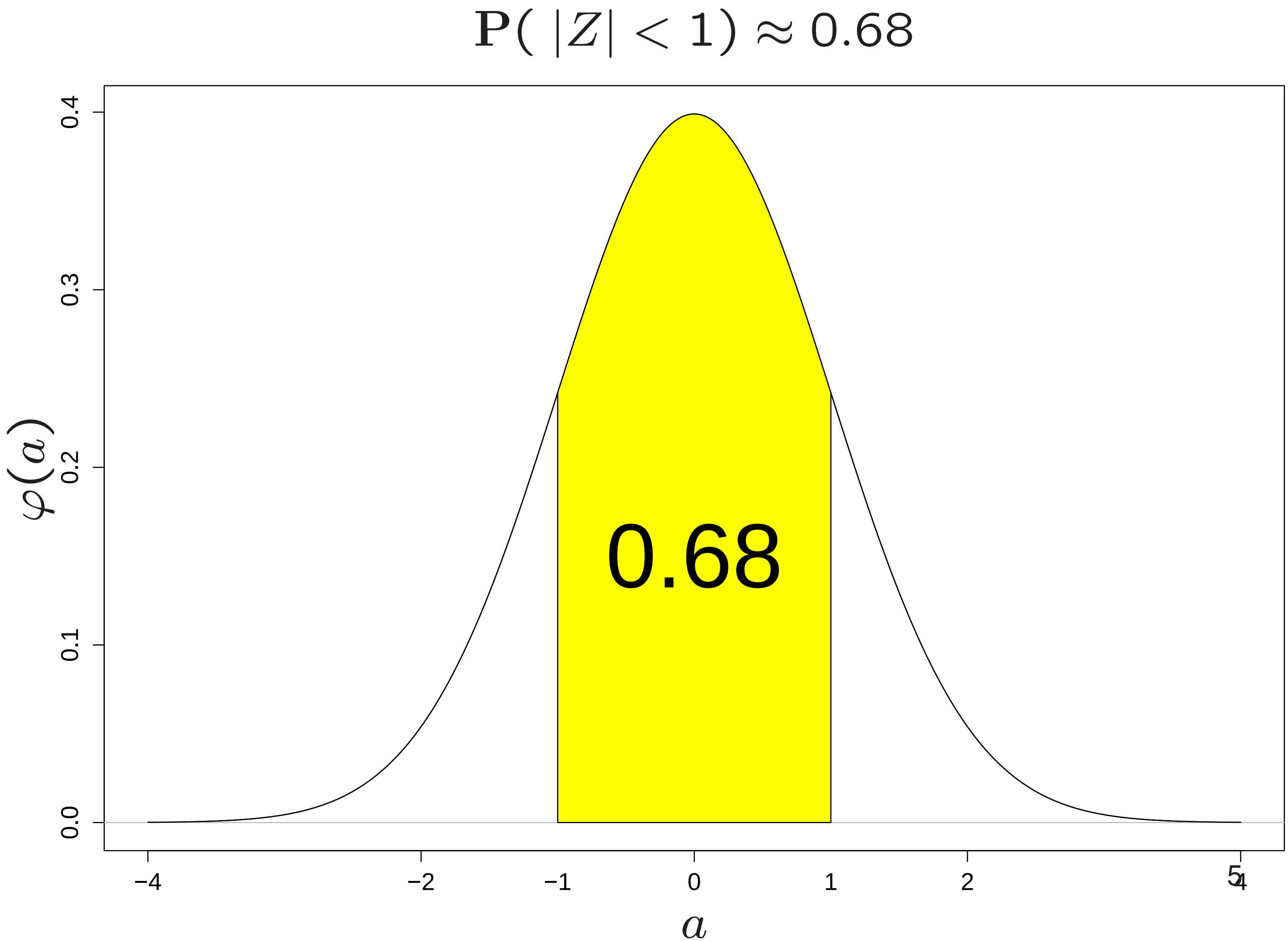
hatten wir in V5a4 festgestellt:

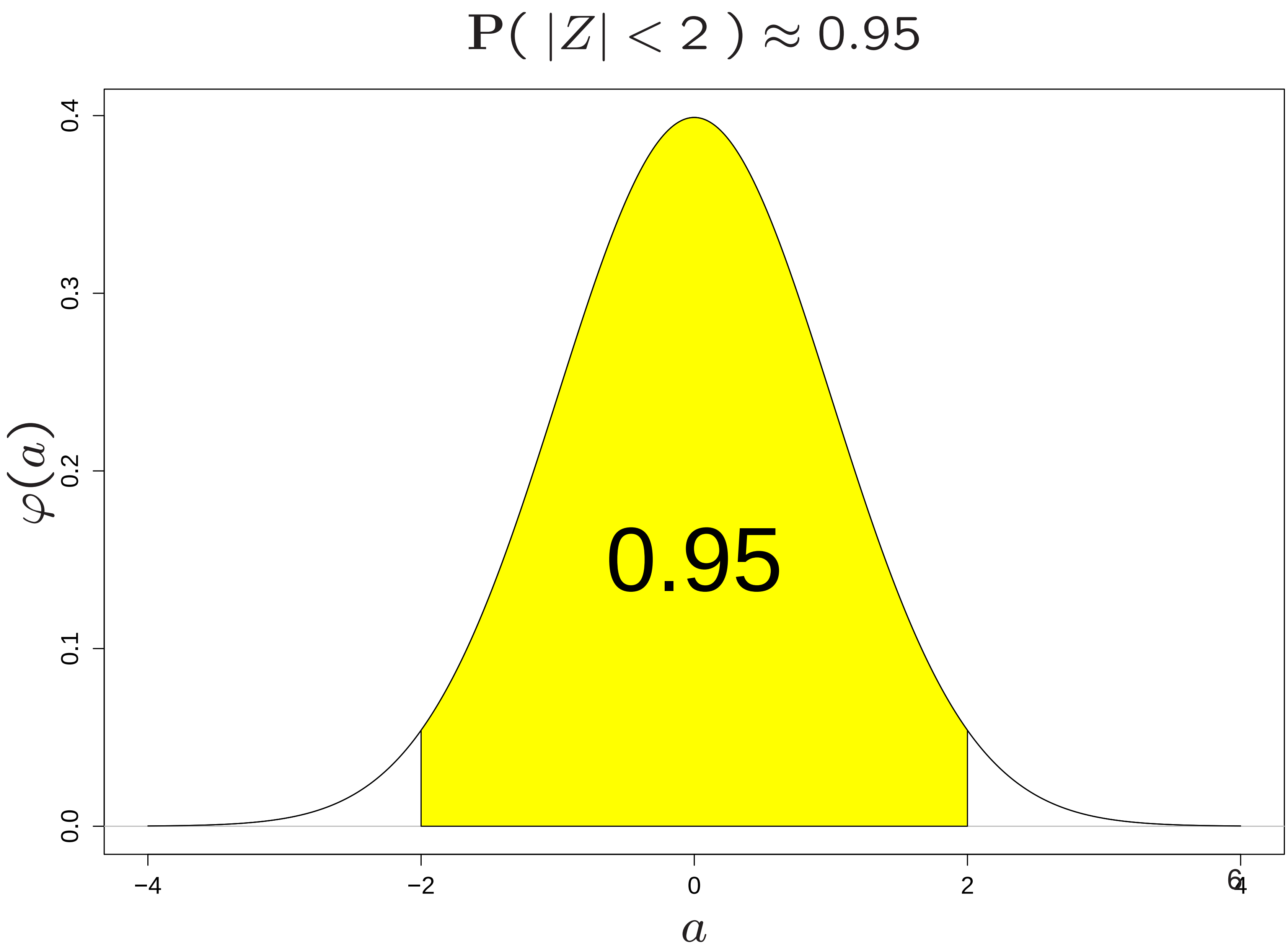
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Also:

$$\mathbf{Var}\,[Z] = 1.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:


P(|Z| < 1) ≈ 0.68
0.68
φ(a)
a
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4



$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$
0.95
$\varphi(a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
a

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \; :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\,[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$ mit

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\,[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2,

kurz

N(μ, σ^2)-verteilt.

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2,

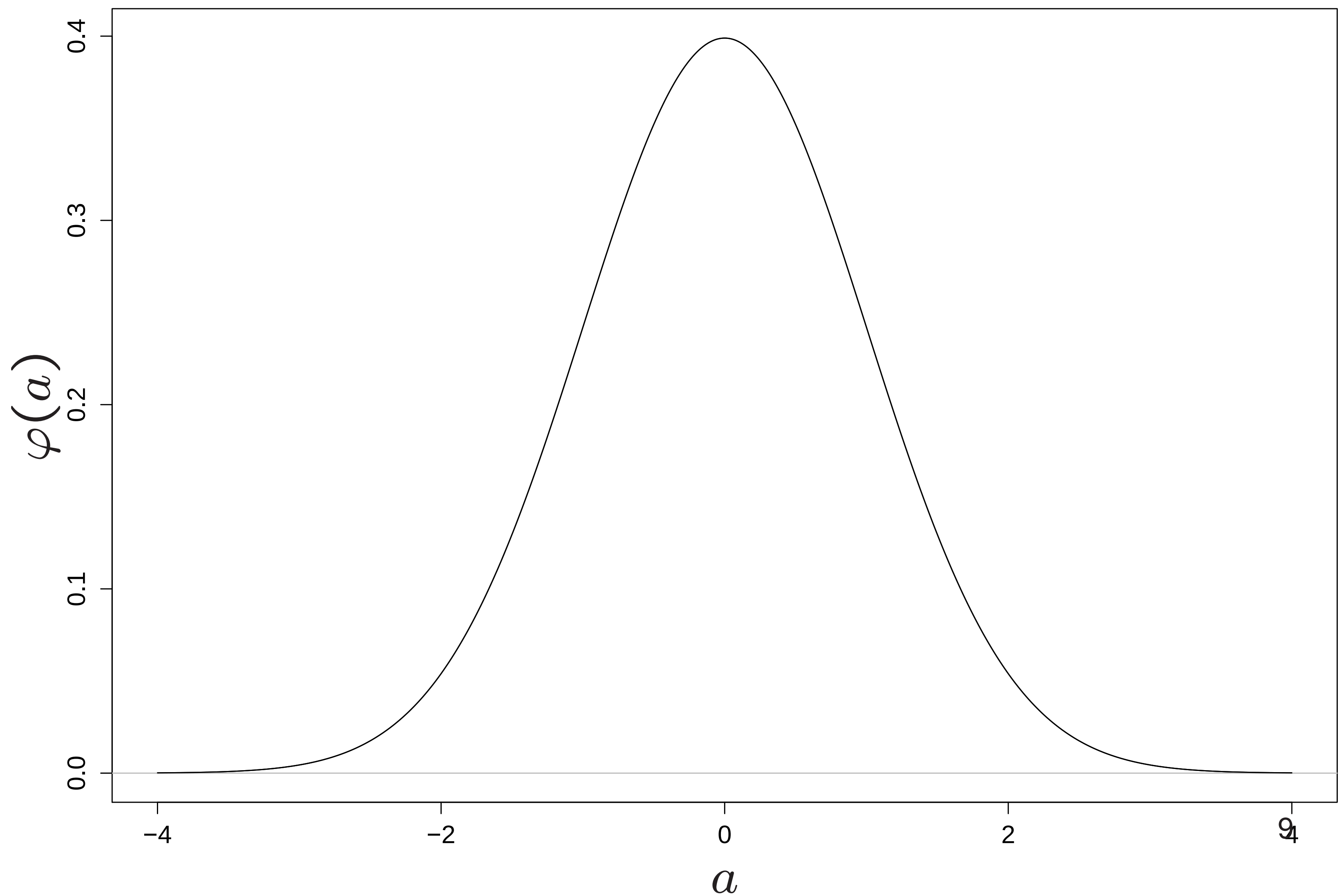
kurz

$N(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

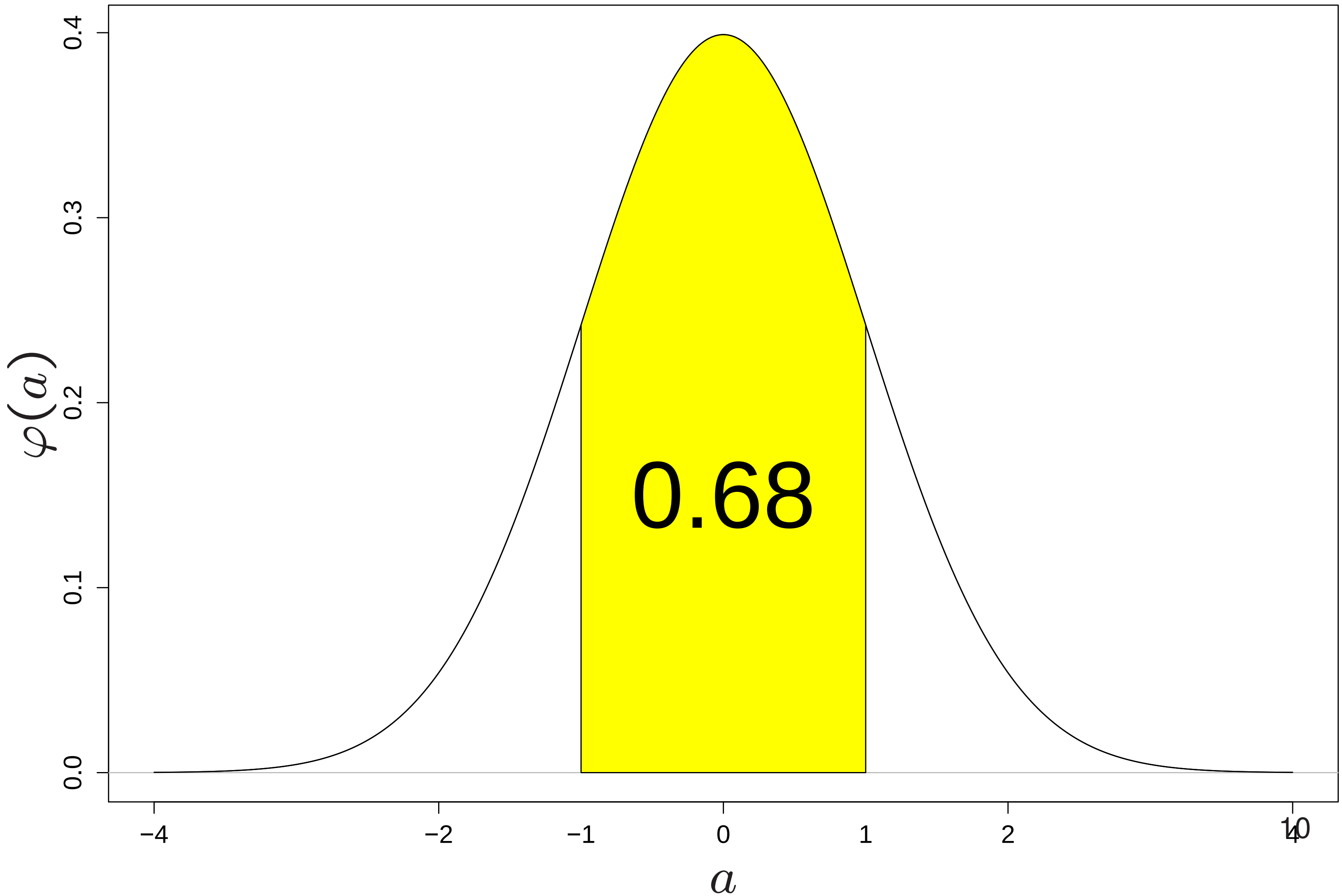
Ist Y $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

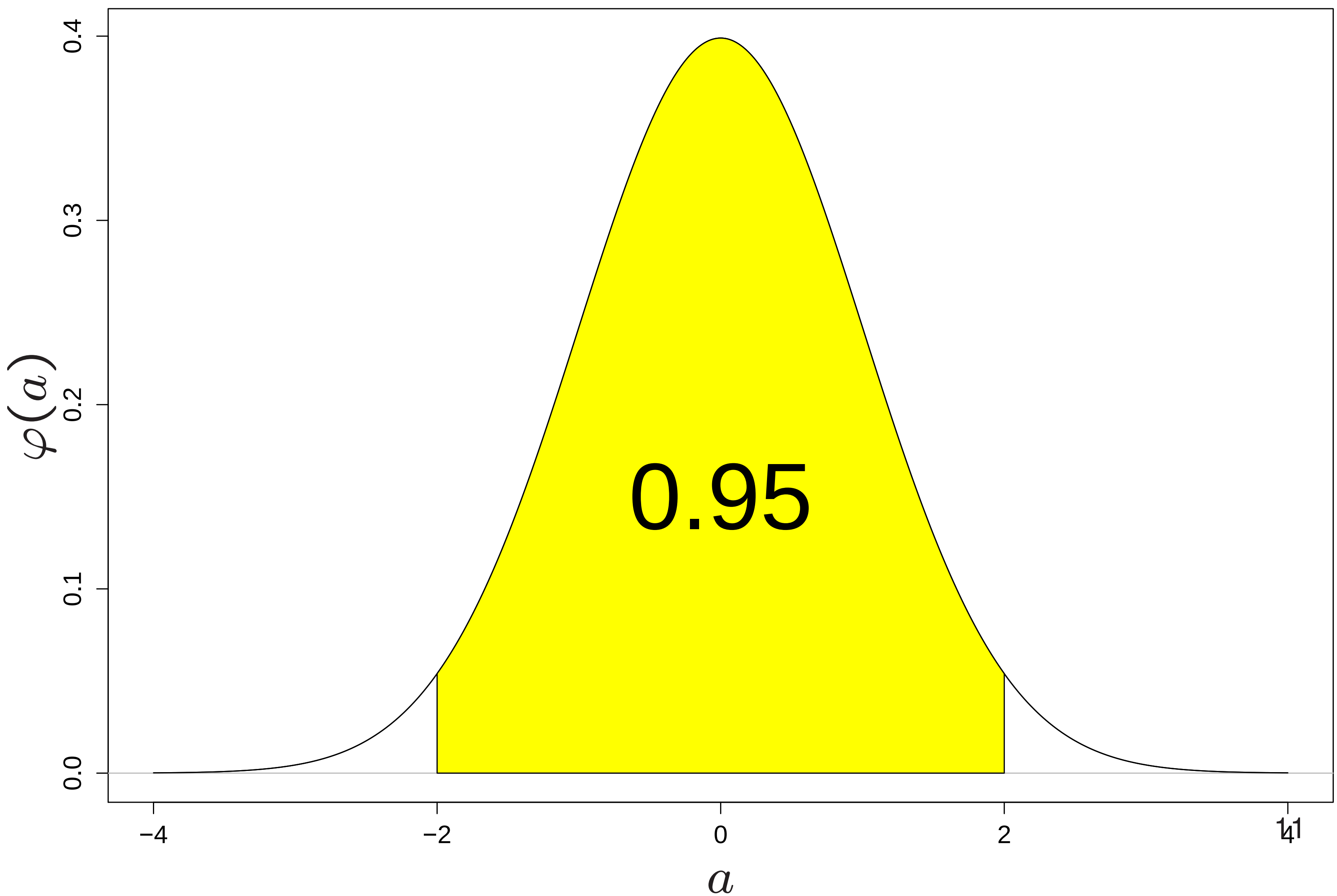
Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung



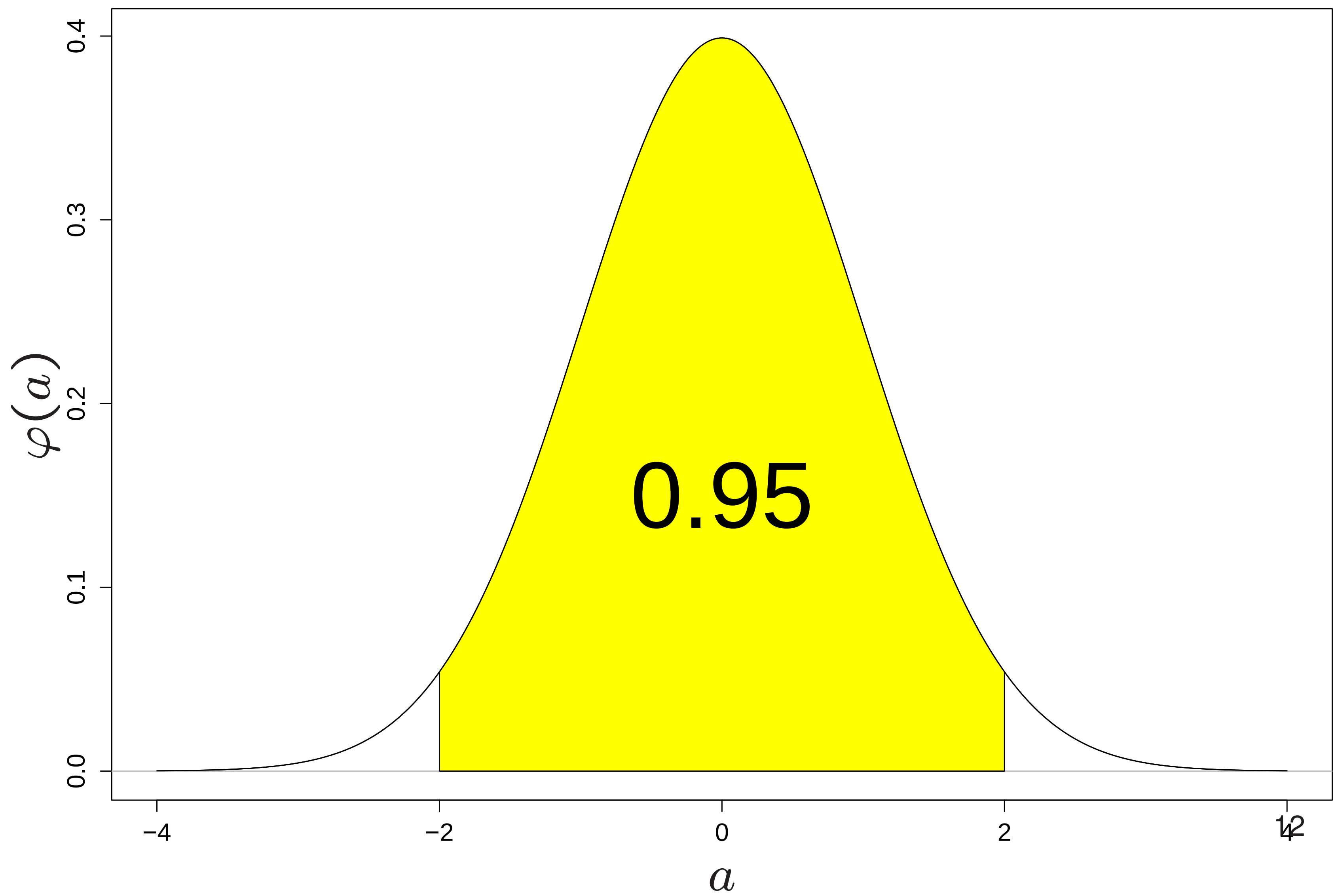
$\mathbf{P}(\,|Z| < 1) \approx 0.68$



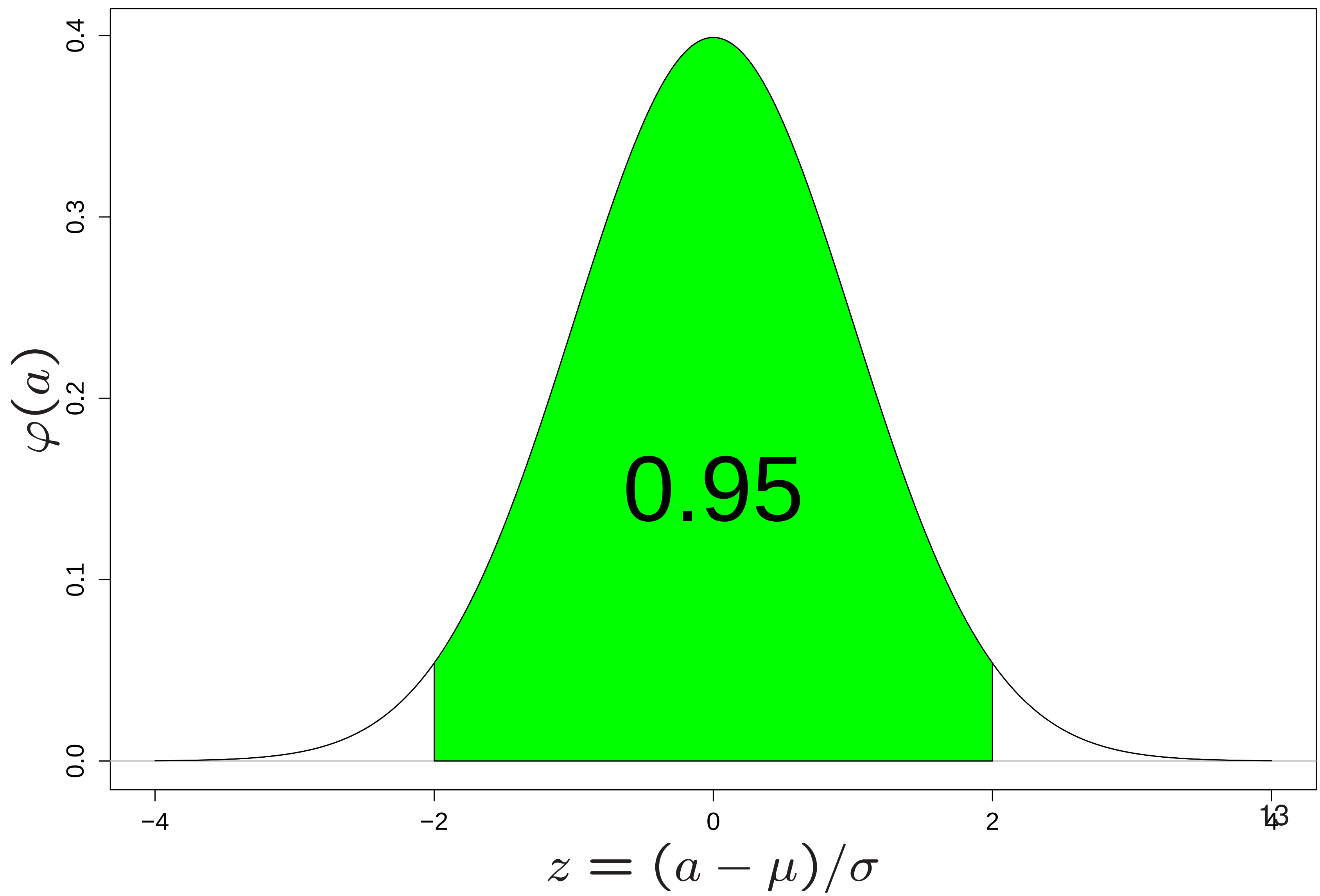
$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$



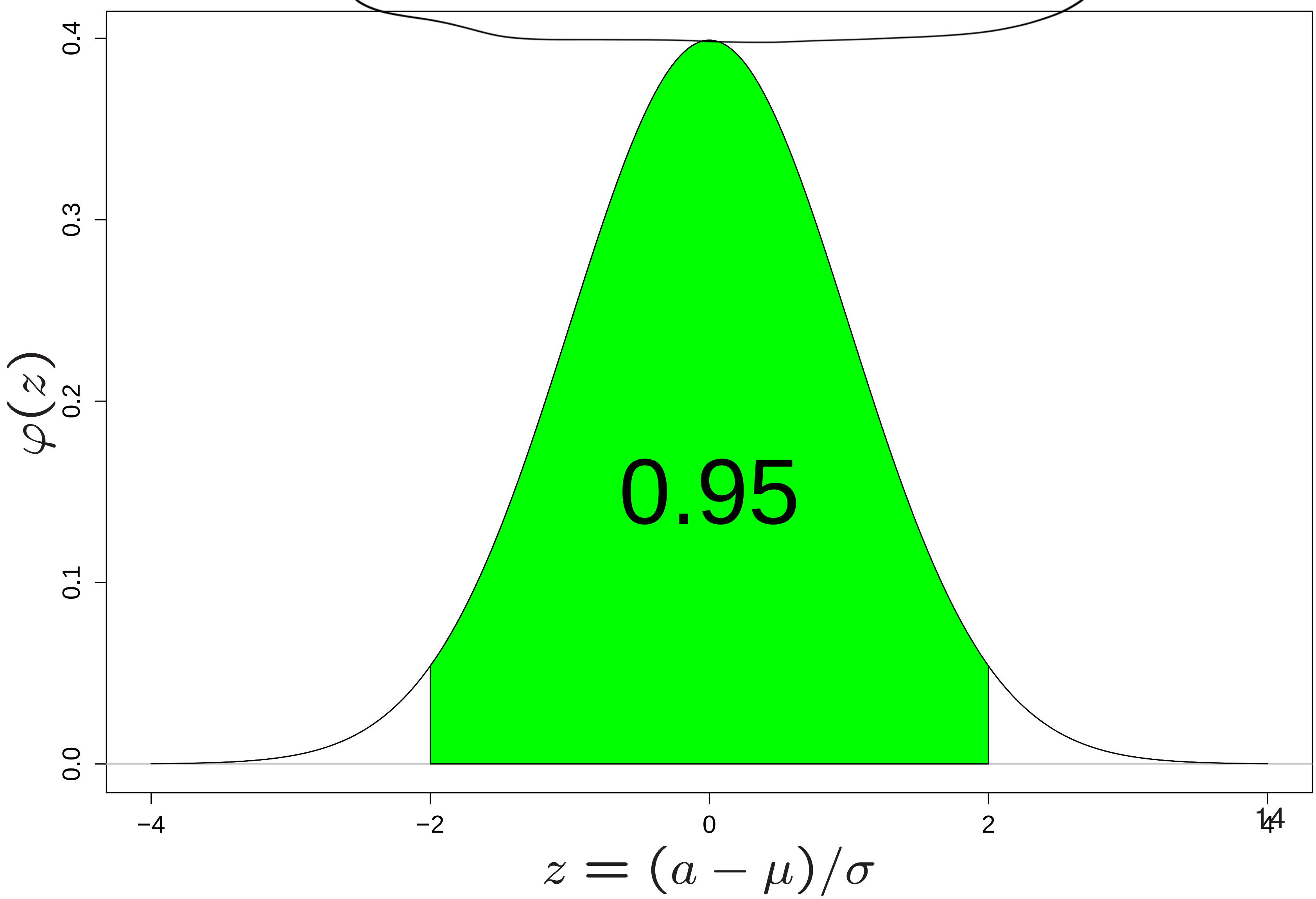
Und für N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsgrößen X?



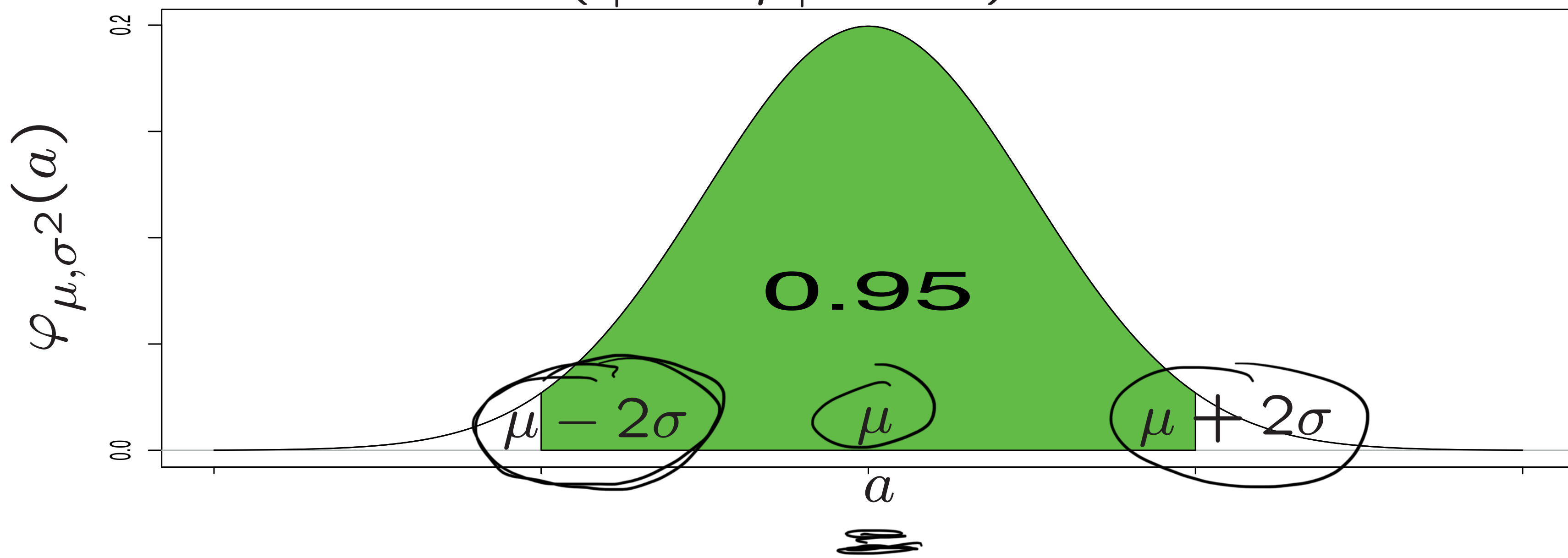
Dasselbe in grün.



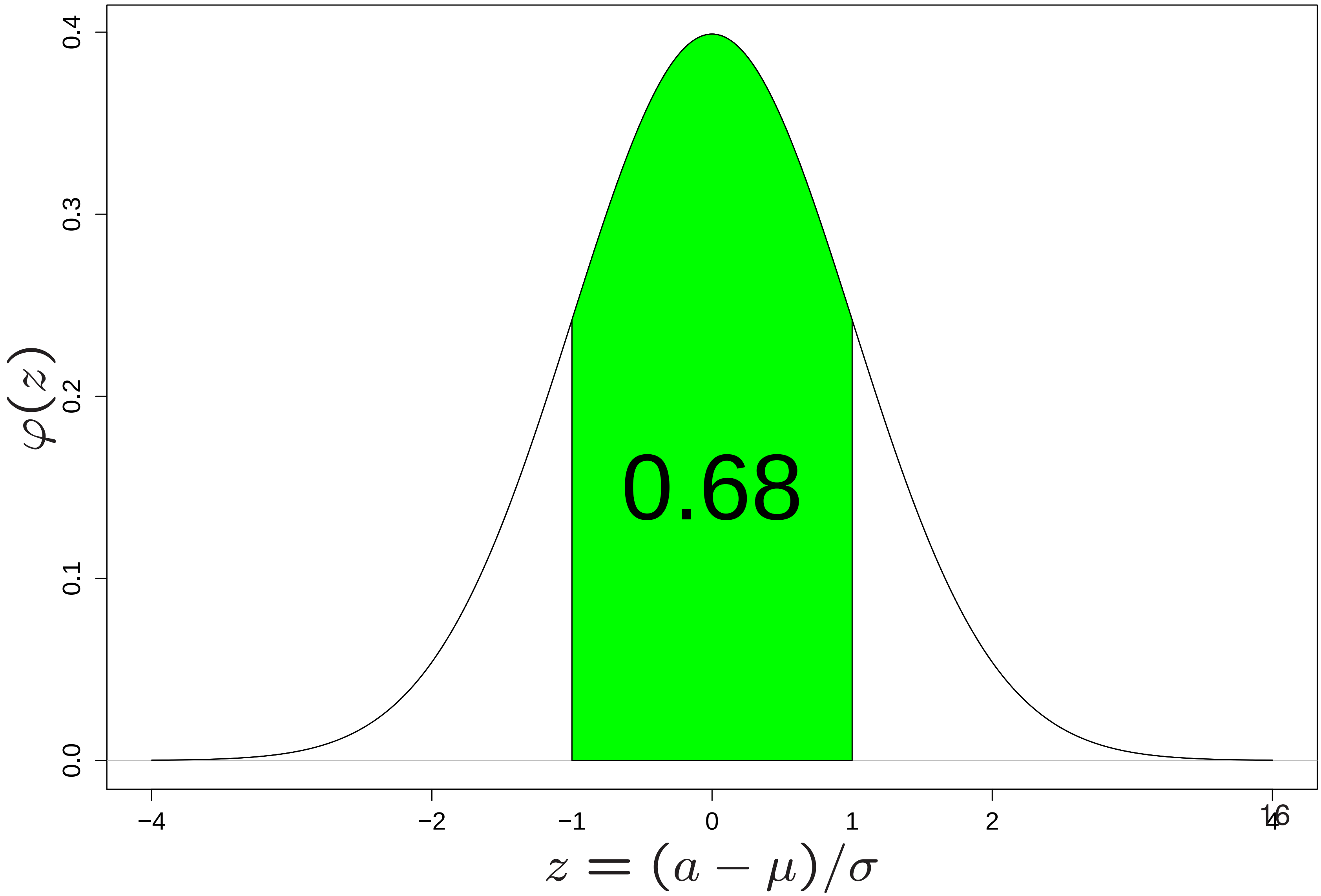
$$\mathbf{P}(\ |X-\mu|/\sigma < 2\ ) \approx 0.95$$



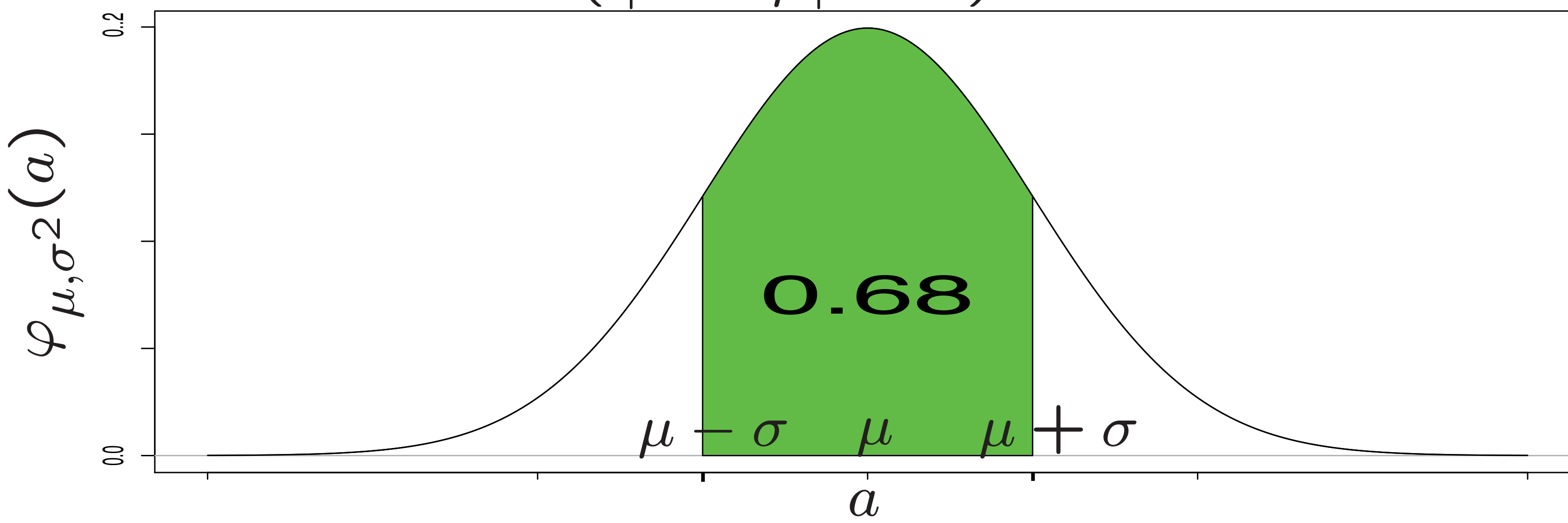
$$\mathbf{P}(\ |X-\mu| < 2\sigma\ ) \approx 0.95$$



$\mathbf{P}(\ |X-\mu|/\sigma < 1\ ) \approx 0.68$



$\mathbf{P}(\ |X-\mu|<\sigma\ )\approx 0.68$



Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n,p)-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) \approx \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\, da$$

$$\approx \mathbf{P}(k - \tfrac{1}{2} \le X \le k + \tfrac{1}{2})$$

für eine N(μ, σ^2)-verteilte ZV'e X.