

Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 2:

Die Standardnormalverteilung auf \mathbb{R}
und ihre Schwestern $N(\mu, \sigma^2)$

Wir hatten in V5a4 definiert:

Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

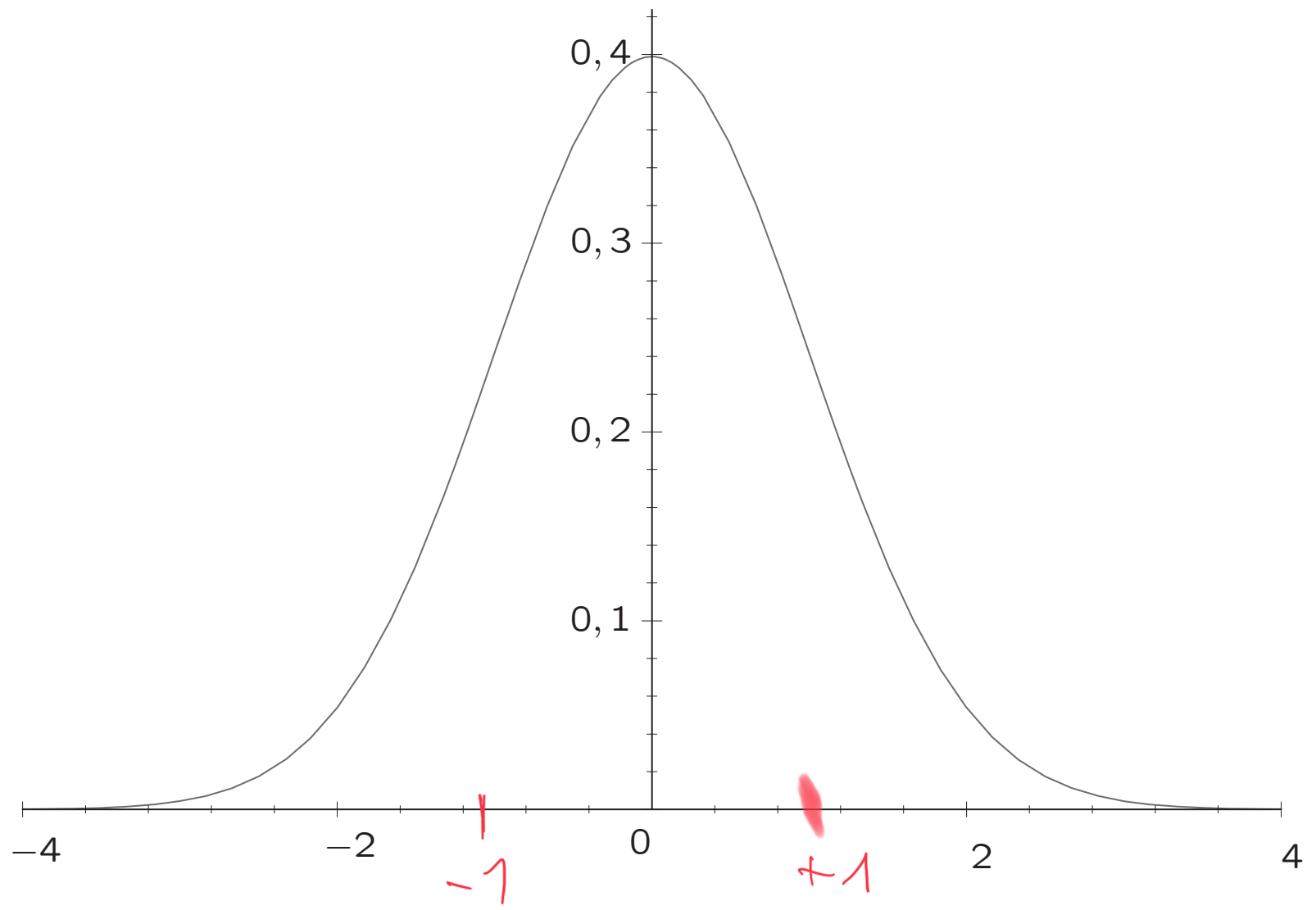
$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.

Es gilt (vgl. Teil 4 der heutigen VL):

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) da = 1.$$



Für ein standard-normalverteiltes Z
hatten wir in V5a4 festgestellt:

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z] &= \mathbf{E}[Z^2] - (\mathbf{E}[Z])^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für ein standard-normalverteiltes Z
hatten wir in V5a4 festgestellt:

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Also:

$$\mathbf{Var} [Z] = 1.$$

Für ein standard-normalverteiltes Z
hatten wir in V5a4 festgestellt:

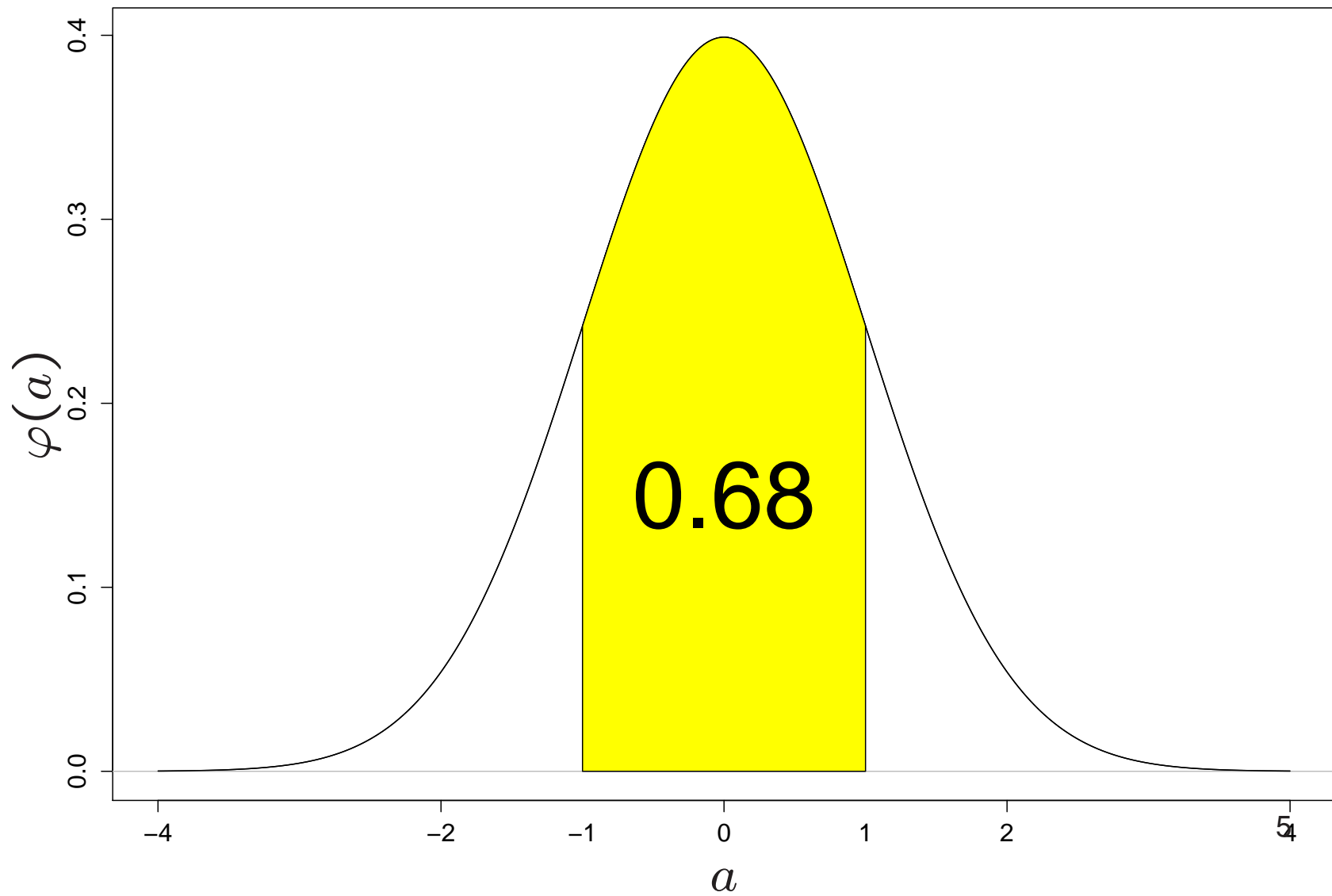
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Also:

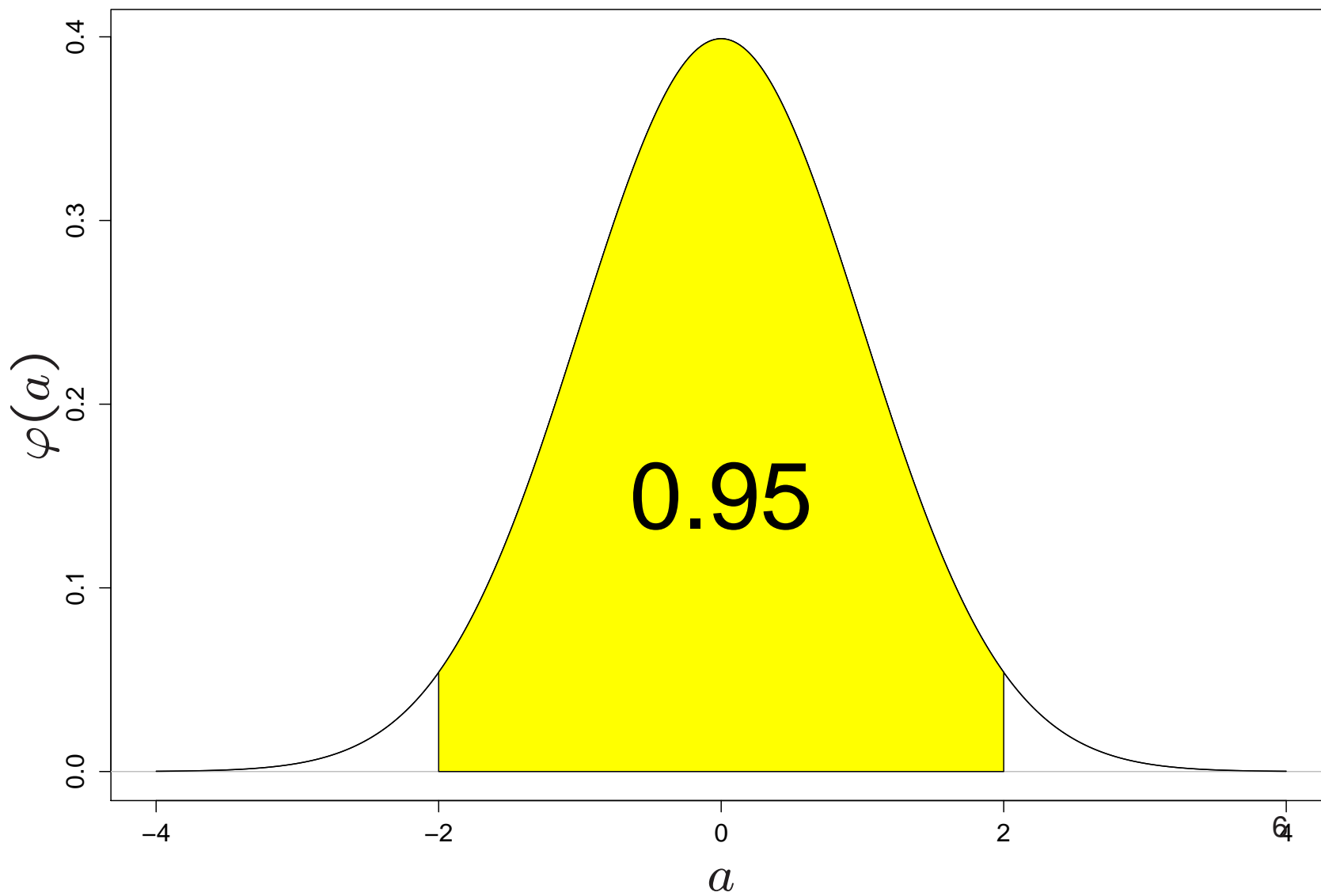
$$\mathbf{Var}[Z] = 1.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:

$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



$$P(|Z| < 2) \approx 0.95$$



Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$ mit

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$ mit

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$
heißt **normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ,**
kurz
 $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$
heißt **normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ,**

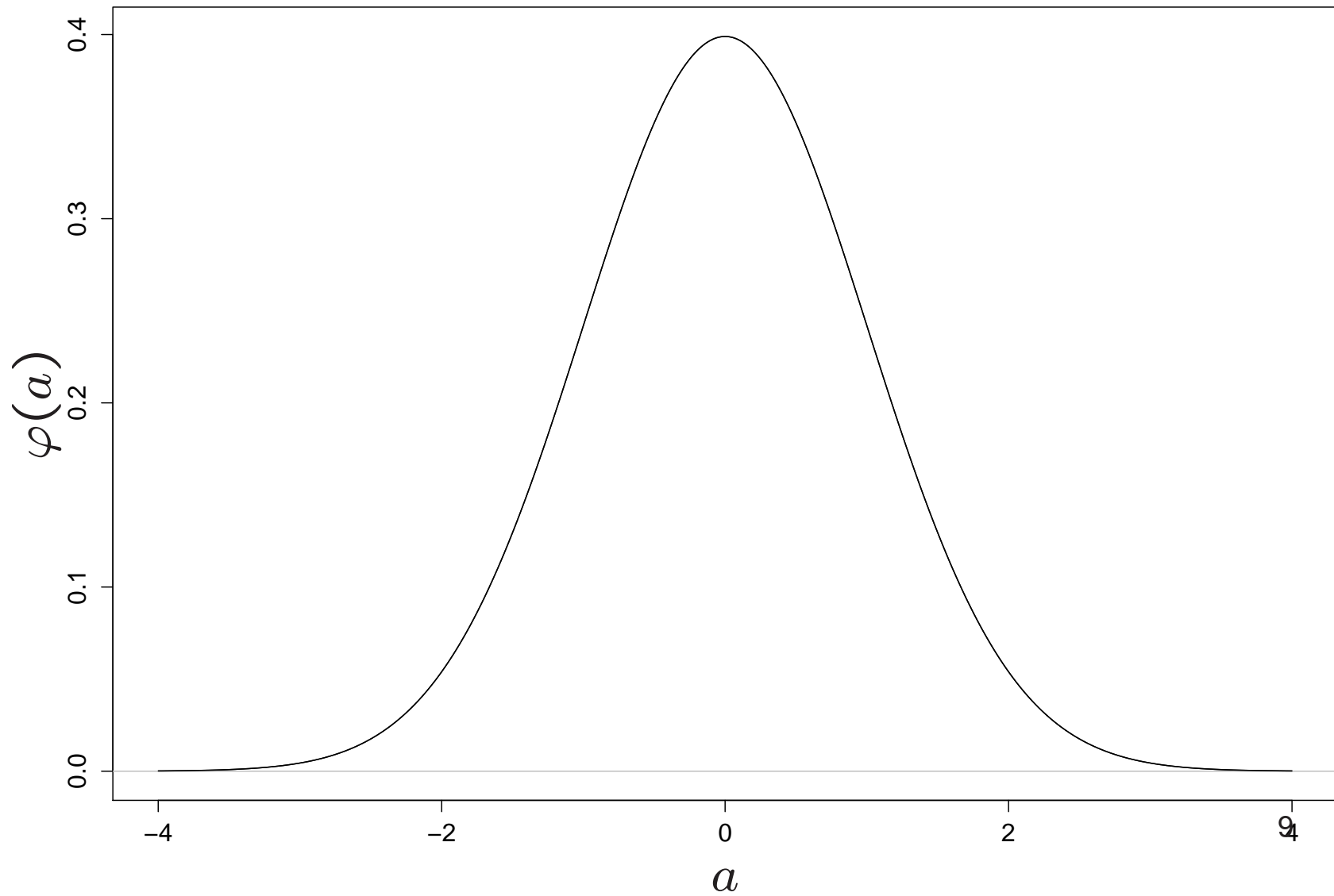
kurz

$N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

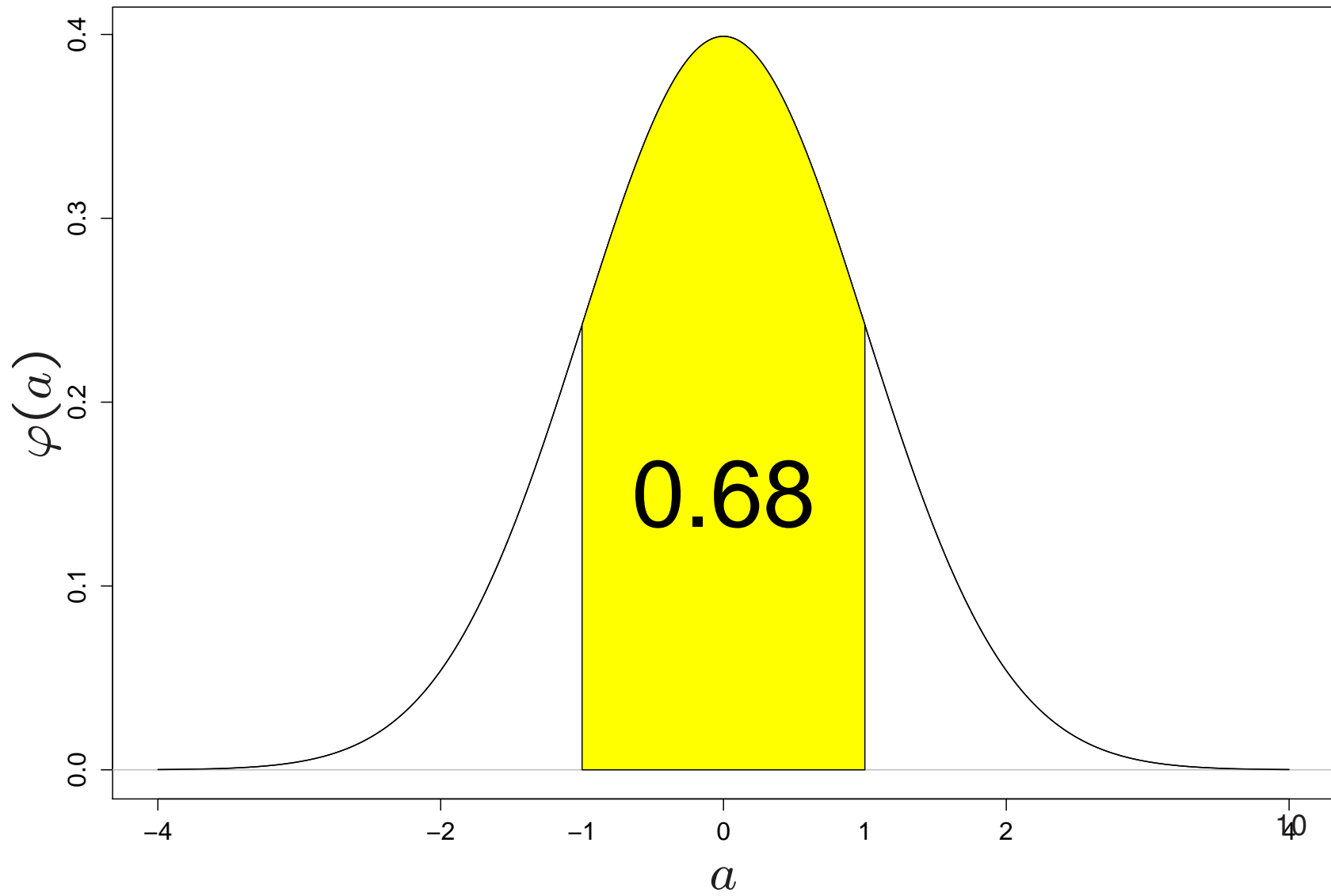
Ist Y $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt,

dann ist $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

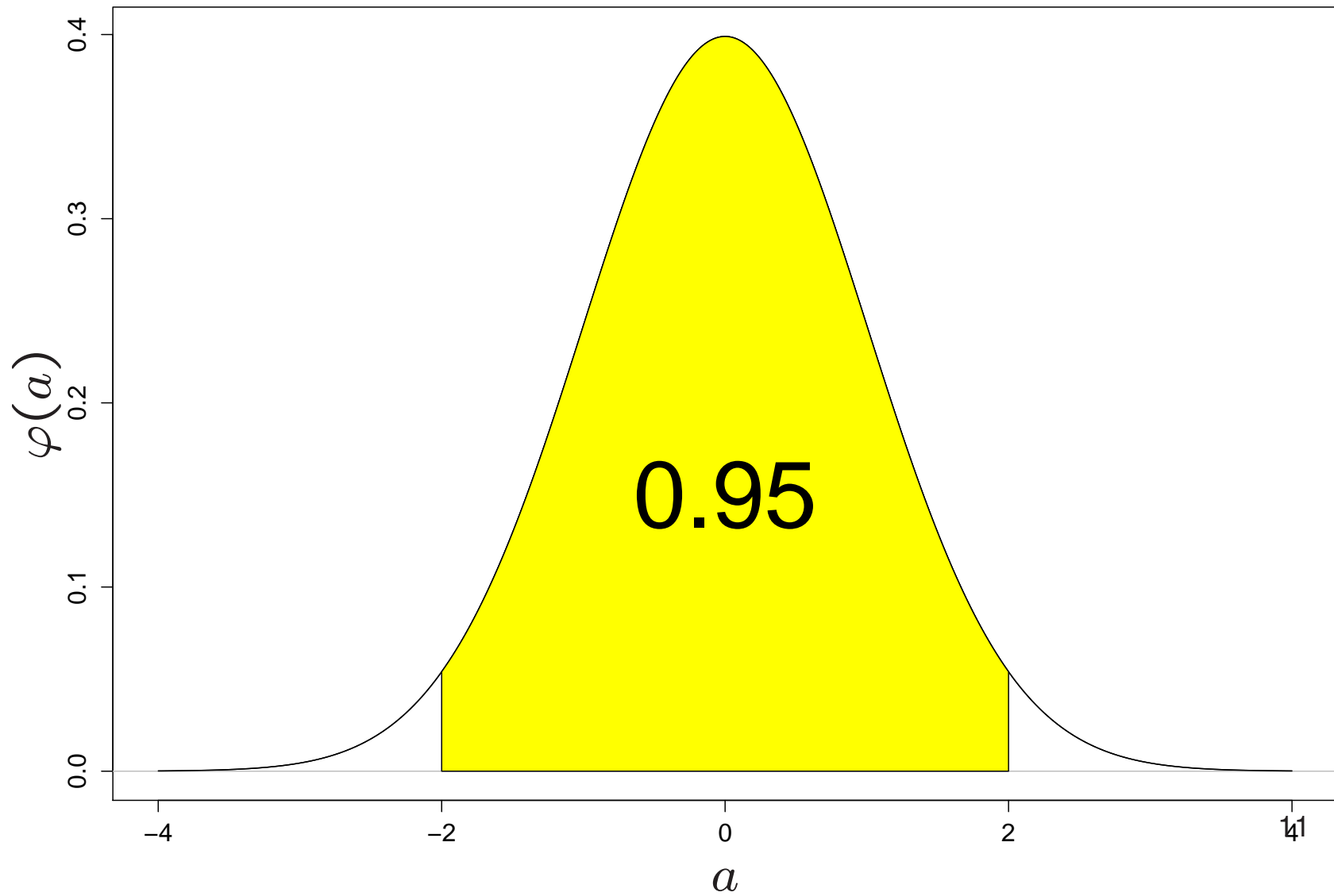
Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung



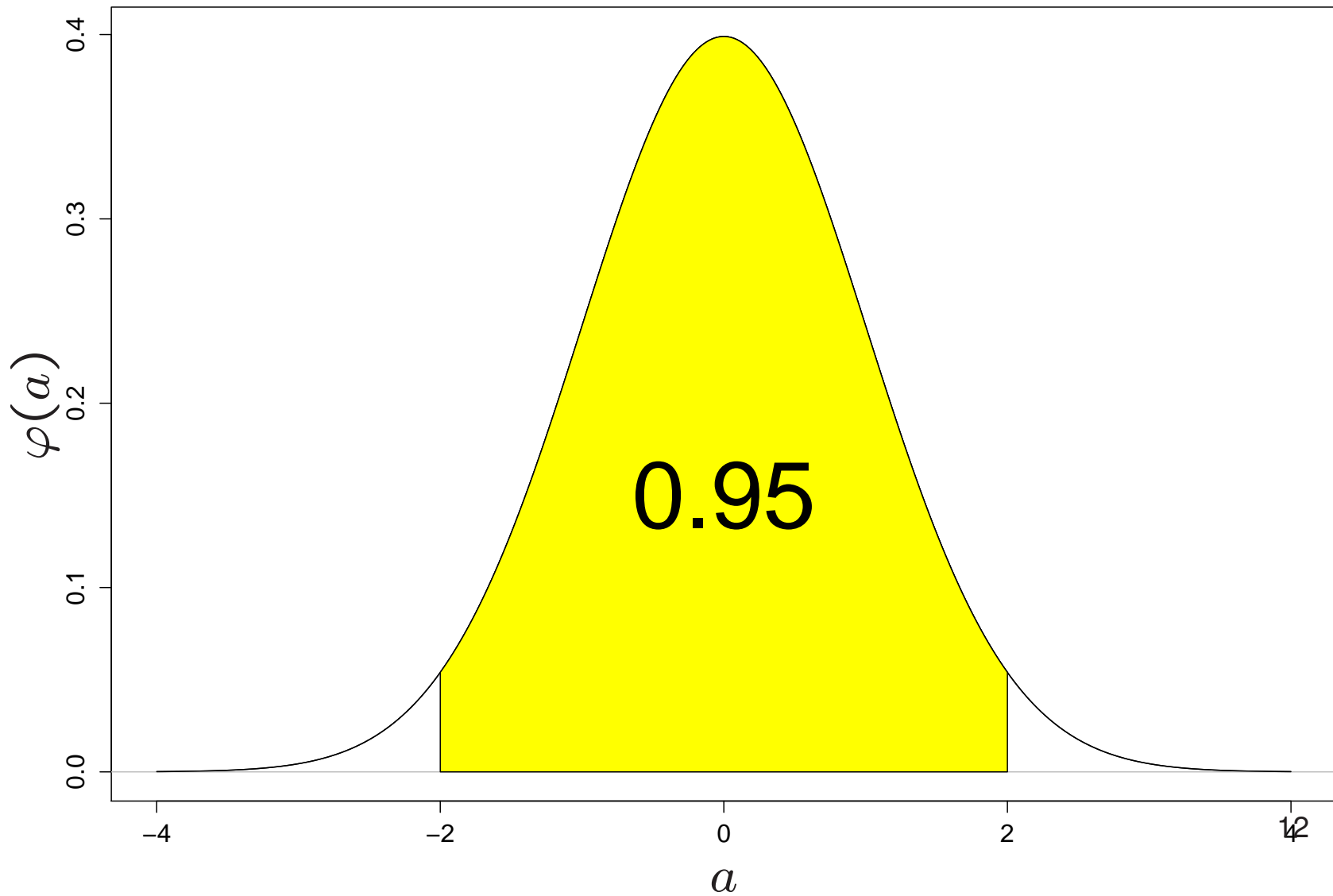
$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



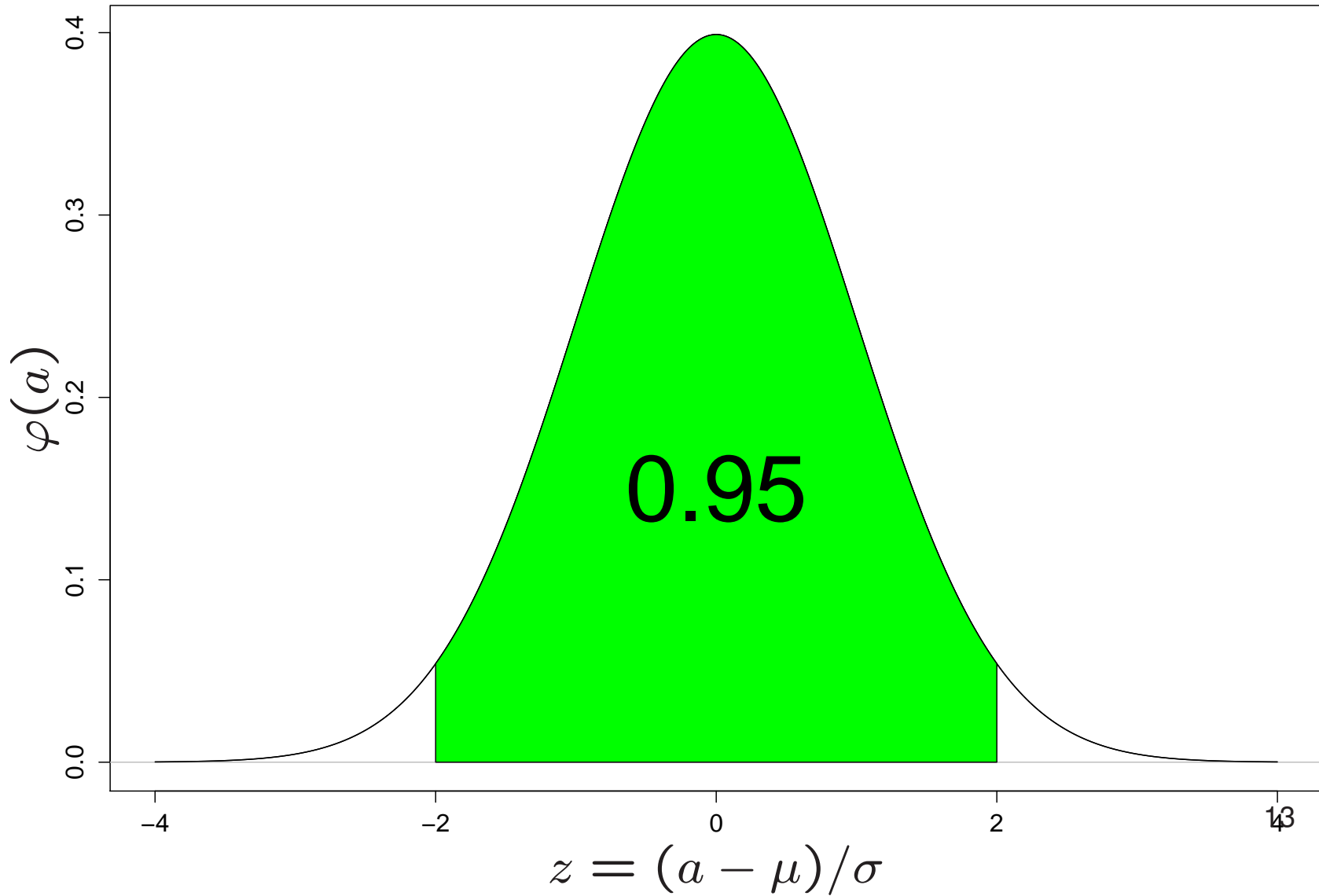
$$P(|Z| < 2) \approx 0.95$$



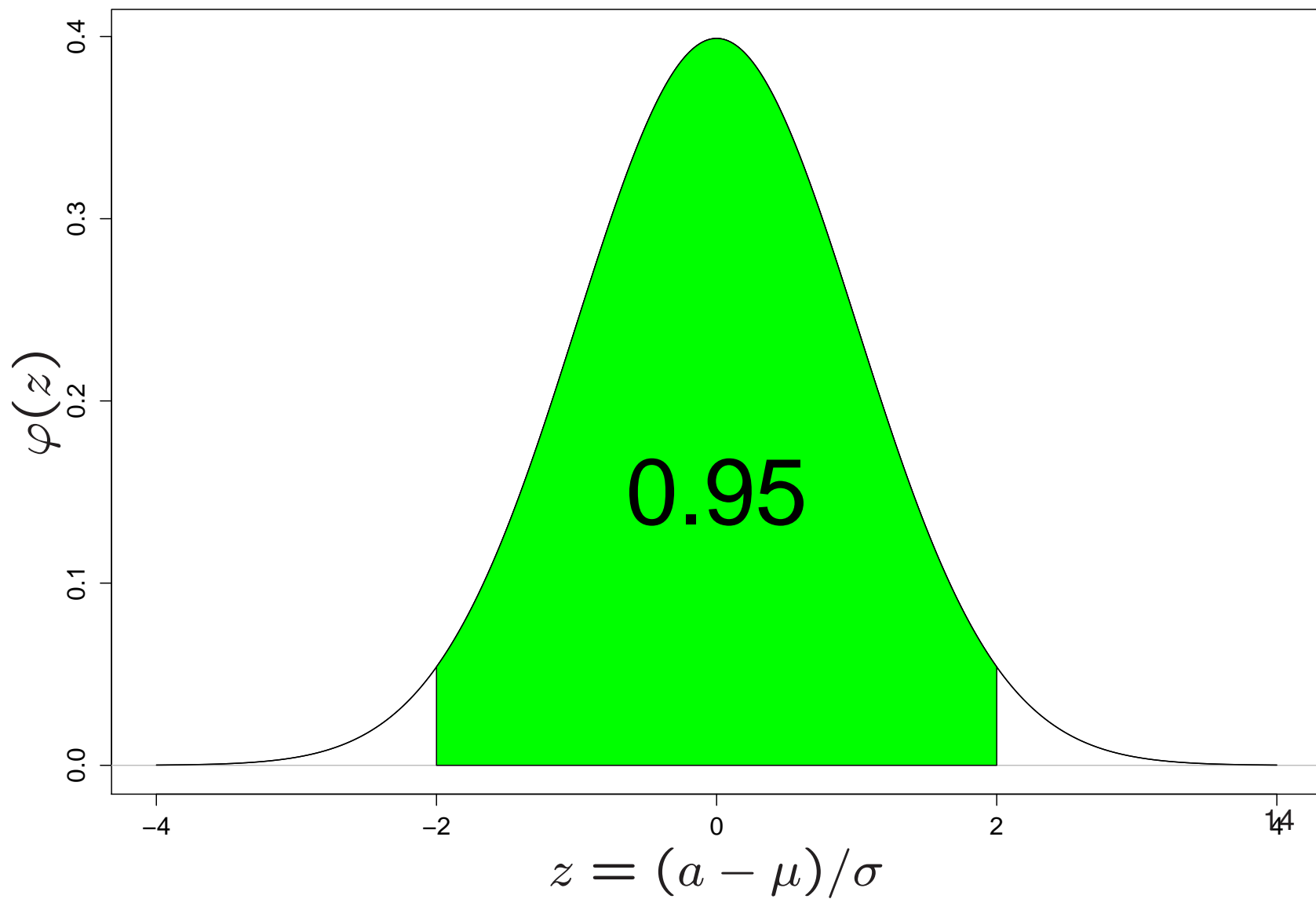
Und für $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsgrößen X ?

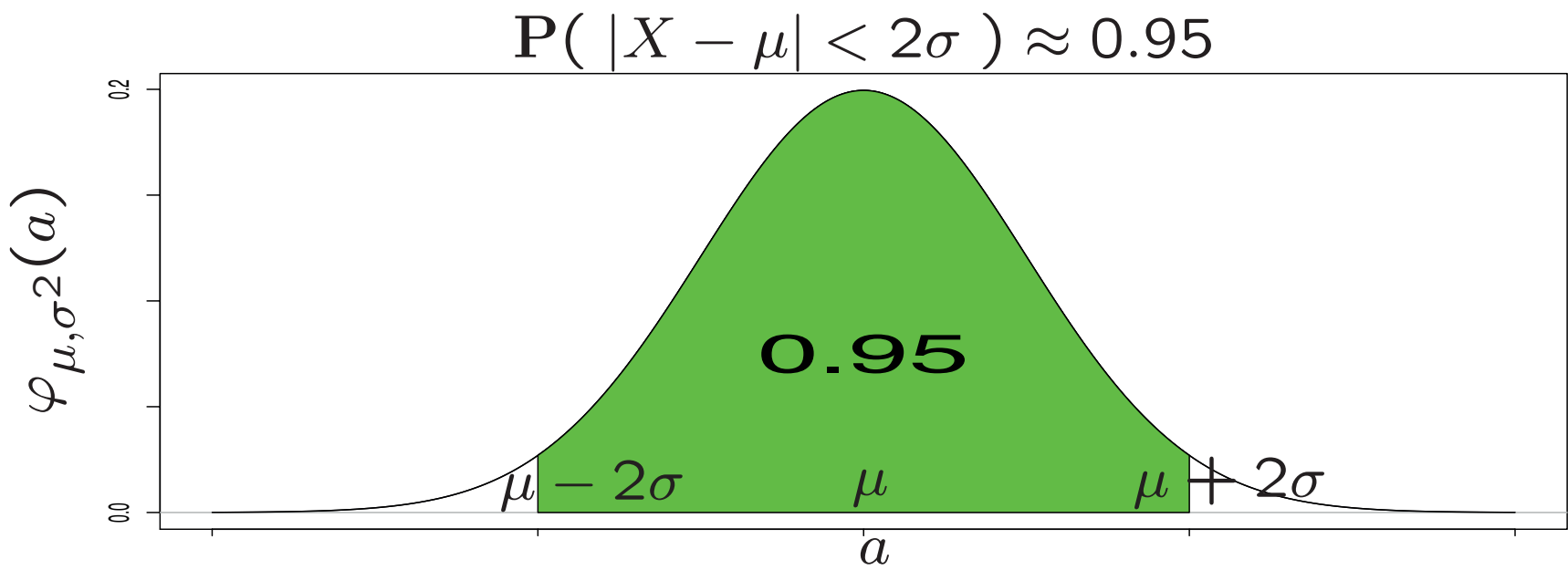


Dasselbe in grün.

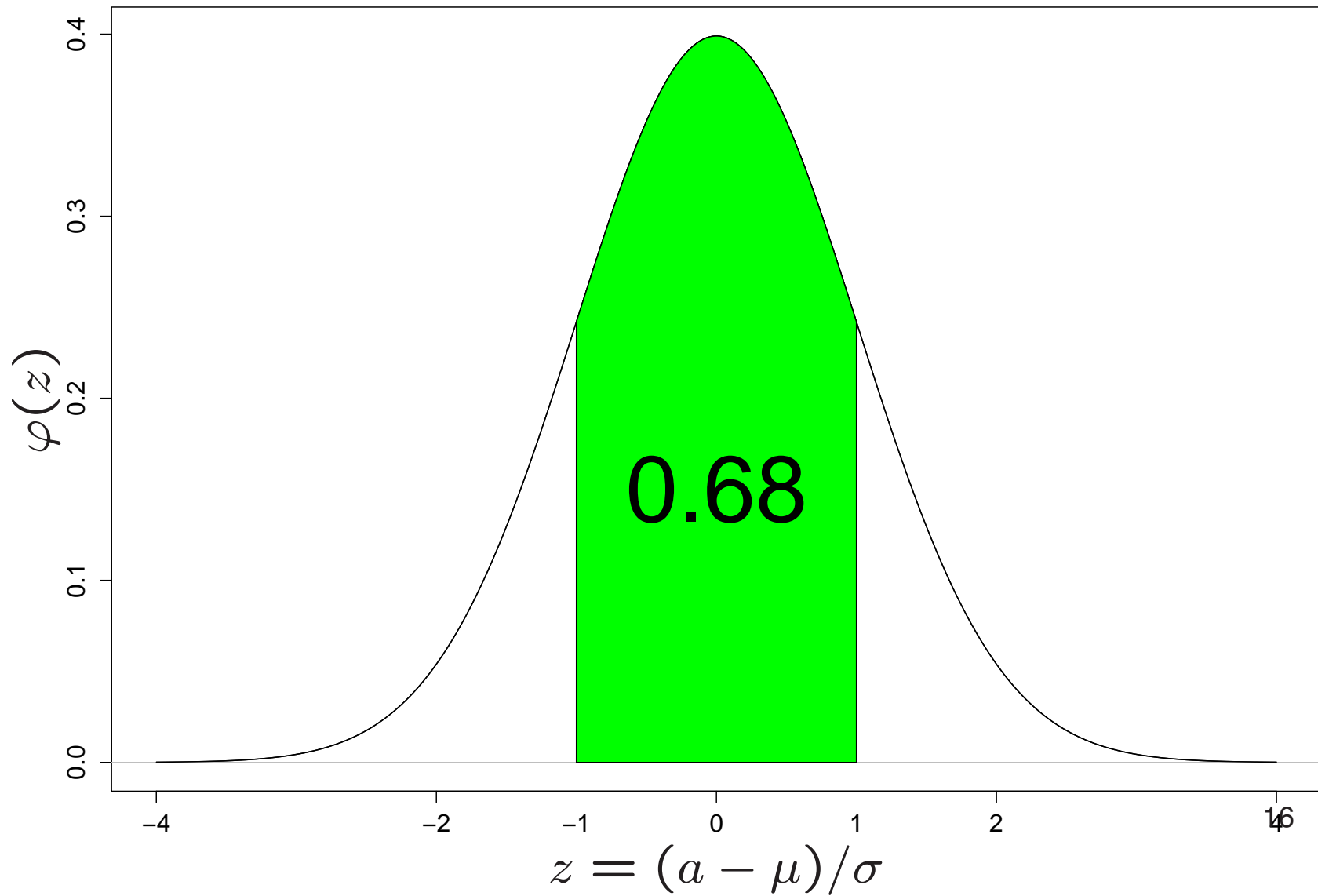


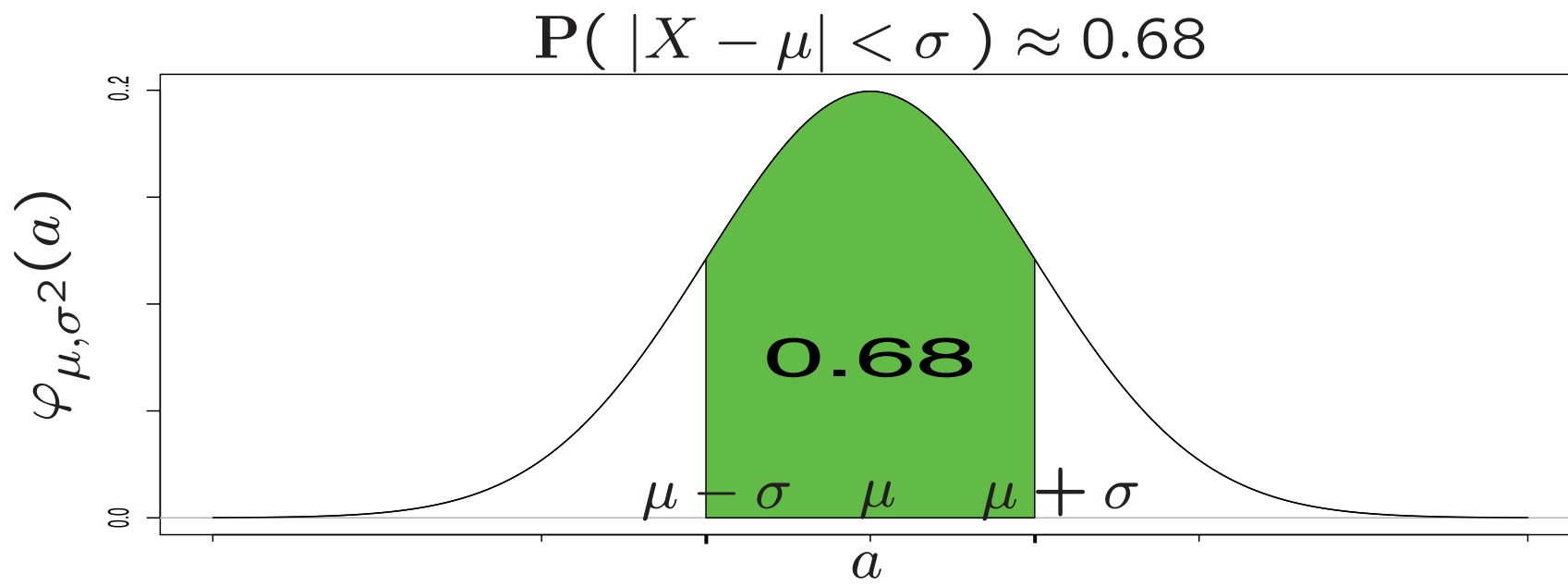
$$\mathbf{P}(|X - \mu|/\sigma < 2) \approx 0.95$$





$$\mathbf{P}(|X - \mu|/\sigma < 1) \approx 0.68$$





Approximation der Gewichte der Binomialverteilung
durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{k - \mu}{\sigma} \right)$$

Approximation der Gewichte der Binomialverteilung
durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu, \sigma^2}(k) \approx \int_{k - \frac{1}{2}}^{k + \frac{1}{2}} \varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$$
$$\approx \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$$

für eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte ZV'e X .