Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 1:

Von den Binomialgewichten

zur Gauß'schen Glockenkurve

$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Binomialverteilungen

mit großem Erwartungswert und großer Varianz

Wir wissen schon aus V4b4:

Für großes n und kleines p,

so dass $np \approx npq \approx \lambda$,

ist die Binomialverteilung Bin(n, p)

approximativ gleich Pois(λ).

Wir wissen schon aus V4b4:

Für großes n und kleines p,

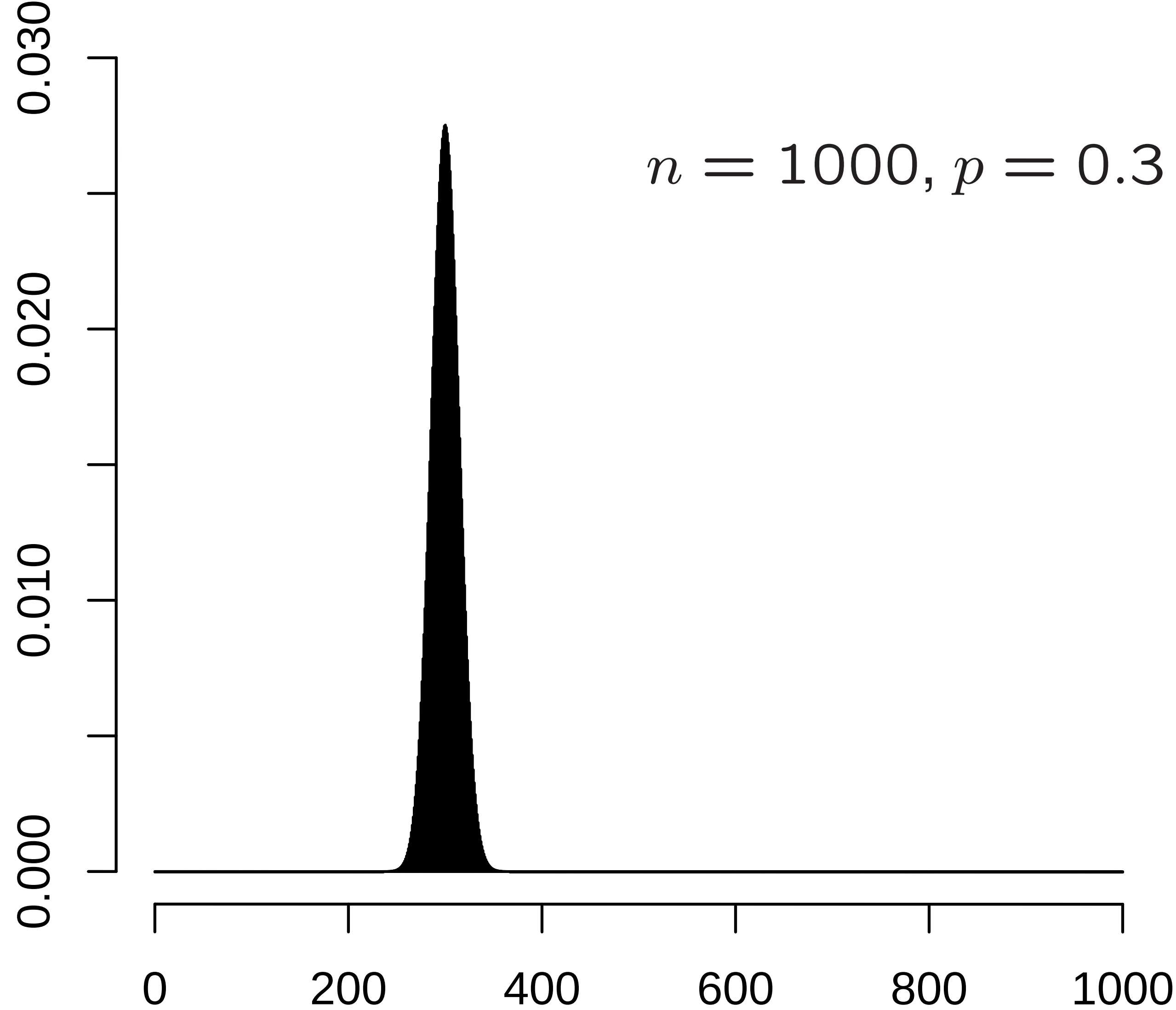
so dass $np \approx npq \approx \lambda$,

ist die Binomialverteilung Bin(n, p)

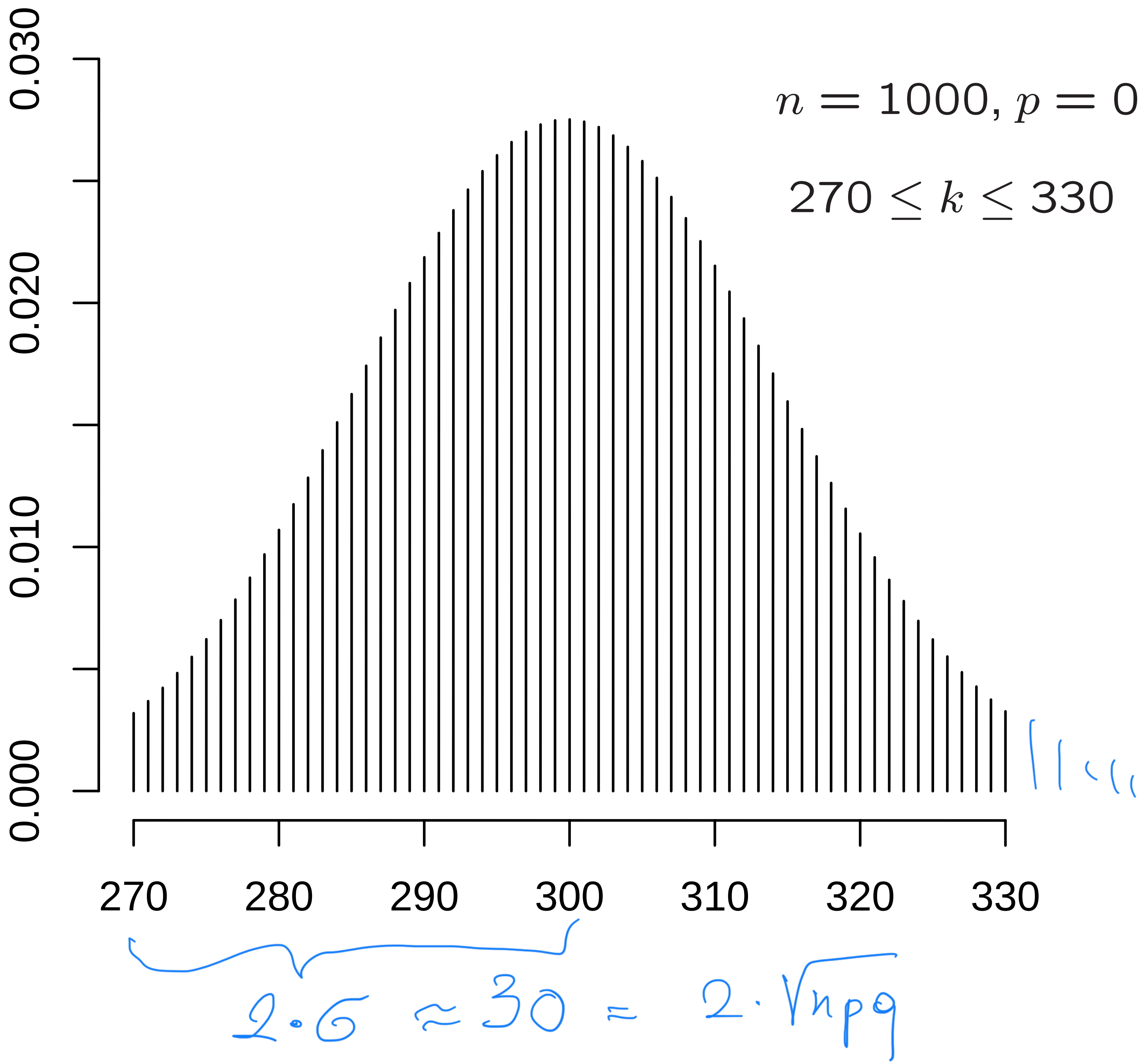
approximativ gleich Pois(λ).

Wie aber sieht die Bin(n, p)-Verteilung

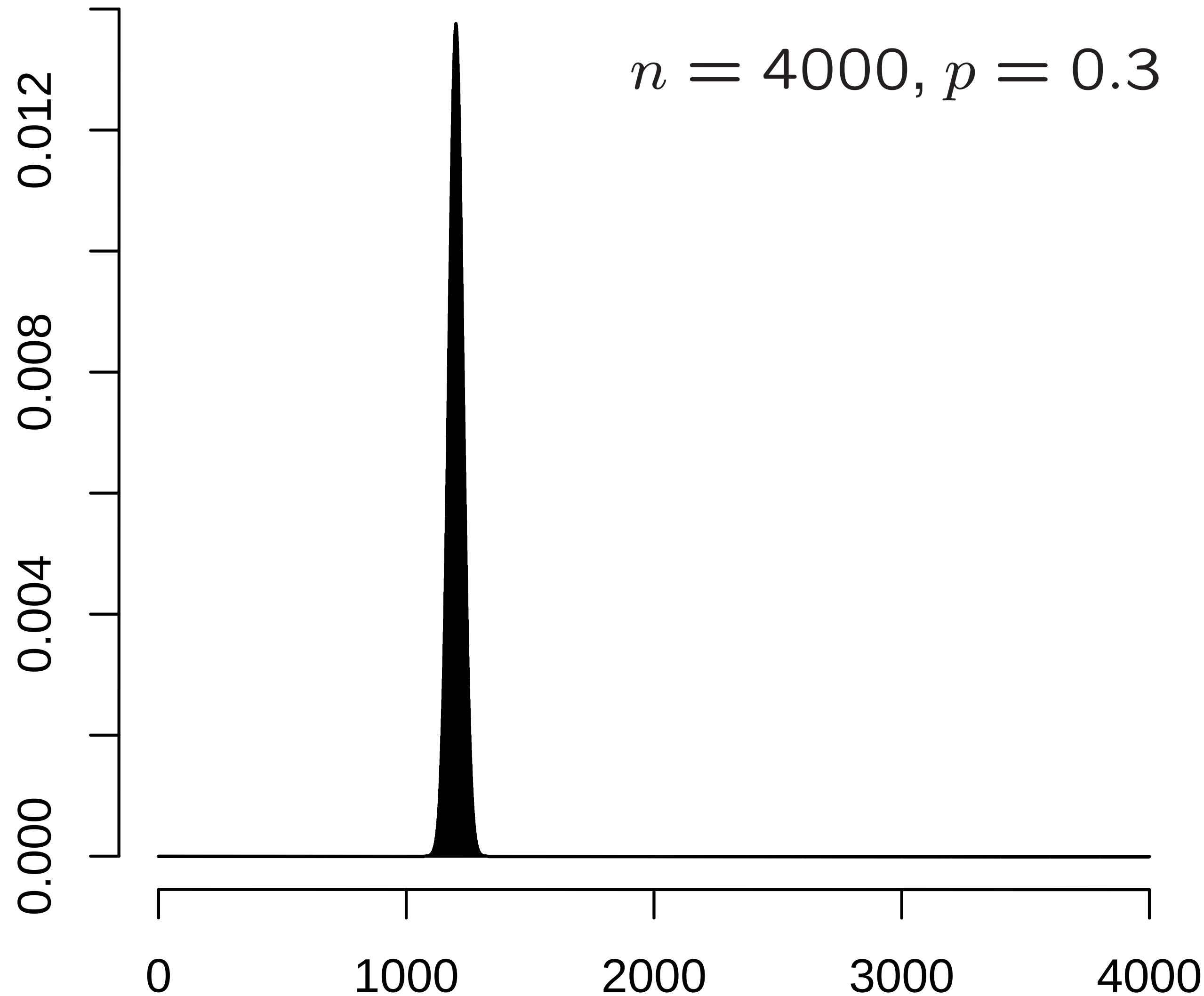
mit großem n und großem npq aus? ?

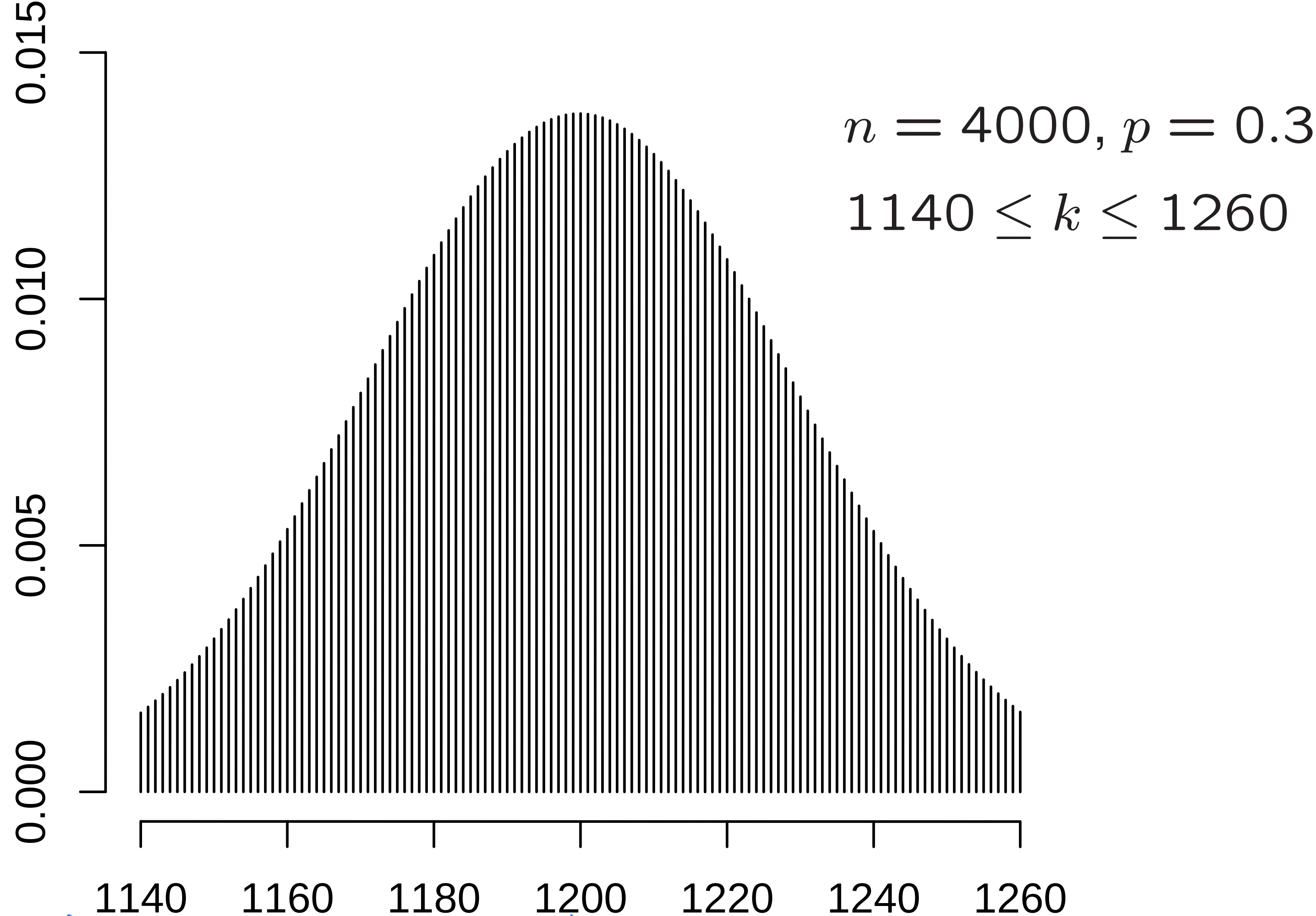


$n = 1000, p = 0.3$
0.000
0.010
0.020
0.030
0
200
400
600
800
1000

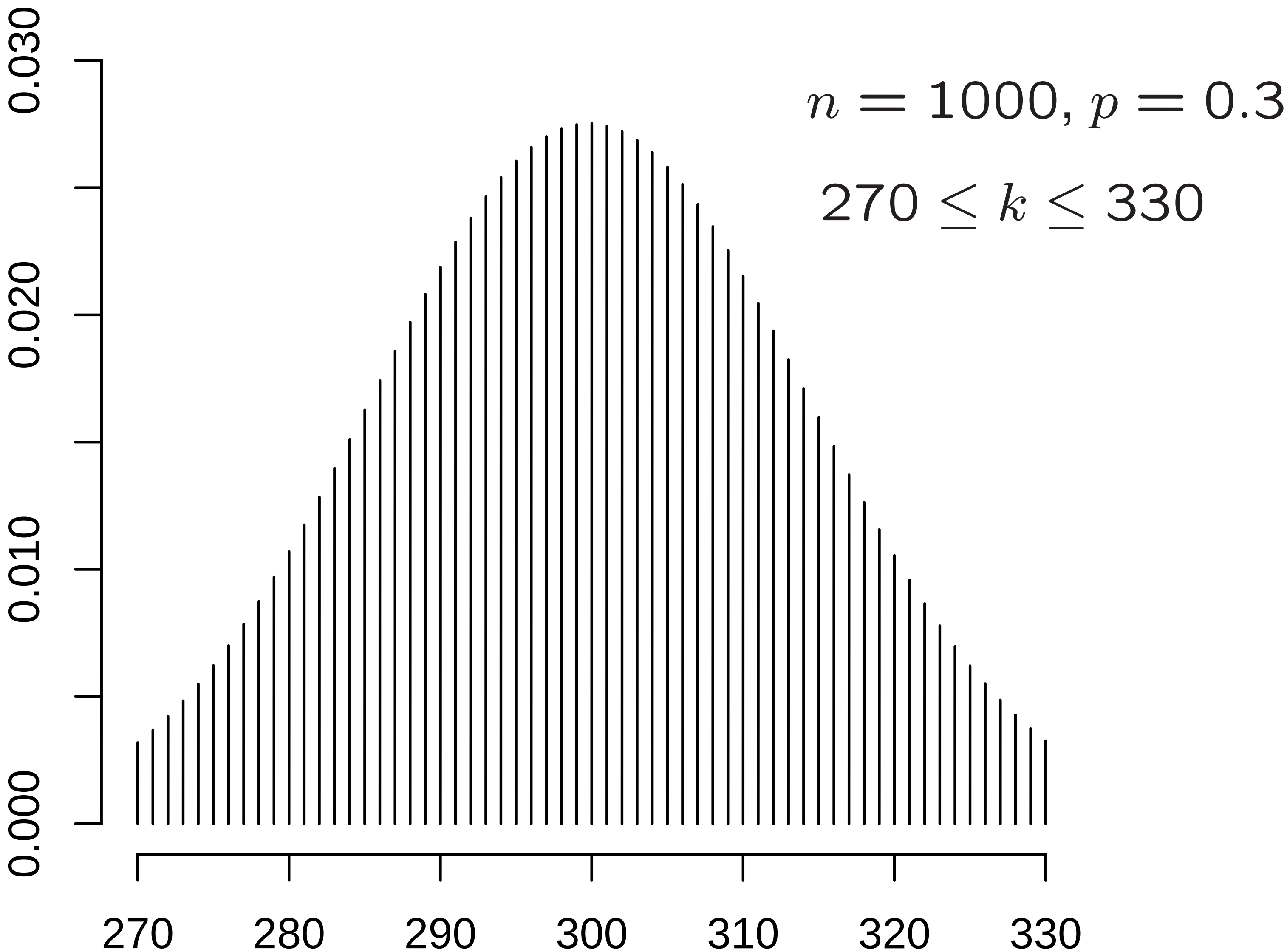


0.030
0.020
0.010
0.000
$n = 1000, p = 0.3$
$270 \le k \le 330$
270
280
290
300
310
320
330
$2 \cdot \sigma \approx 30 = 2 \cdot \sqrt{npq}$


$n = 4000, p = 0.3$
0.000
0.004
0.008
0.012
0
1000
2000
3000
4000



$\approx 60 = \sqrt{npq}$



0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330
$n = 1000, p = 0.3$
$270 \le k \le 330$

Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq

sehen “glockenförmig” aus,

wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \underbrace{\frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right)} \quad .$$

Approximation der Binomialgewichte

mit "Stirling & Taylor" (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \Big(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\Big)^2 \Big)$$

$$\mu := np, \quad \sigma := \sqrt{npq}$$

Approximation der Binomialgewichte

mit "Stirling & Taylor" (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big)$$

$$\mu := np, \quad \sigma := \sqrt{npq}$$

Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k-\mu}{\sigma} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{k-\mu}{\sigma} \right)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \quad \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \qquad (*)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Wenn man n vervierfacht, verdoppelt sich σ.

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \quad \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \qquad (*)$$

mit $\mu := np, \ \sigma := \sqrt{npq}$ und

$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}$.

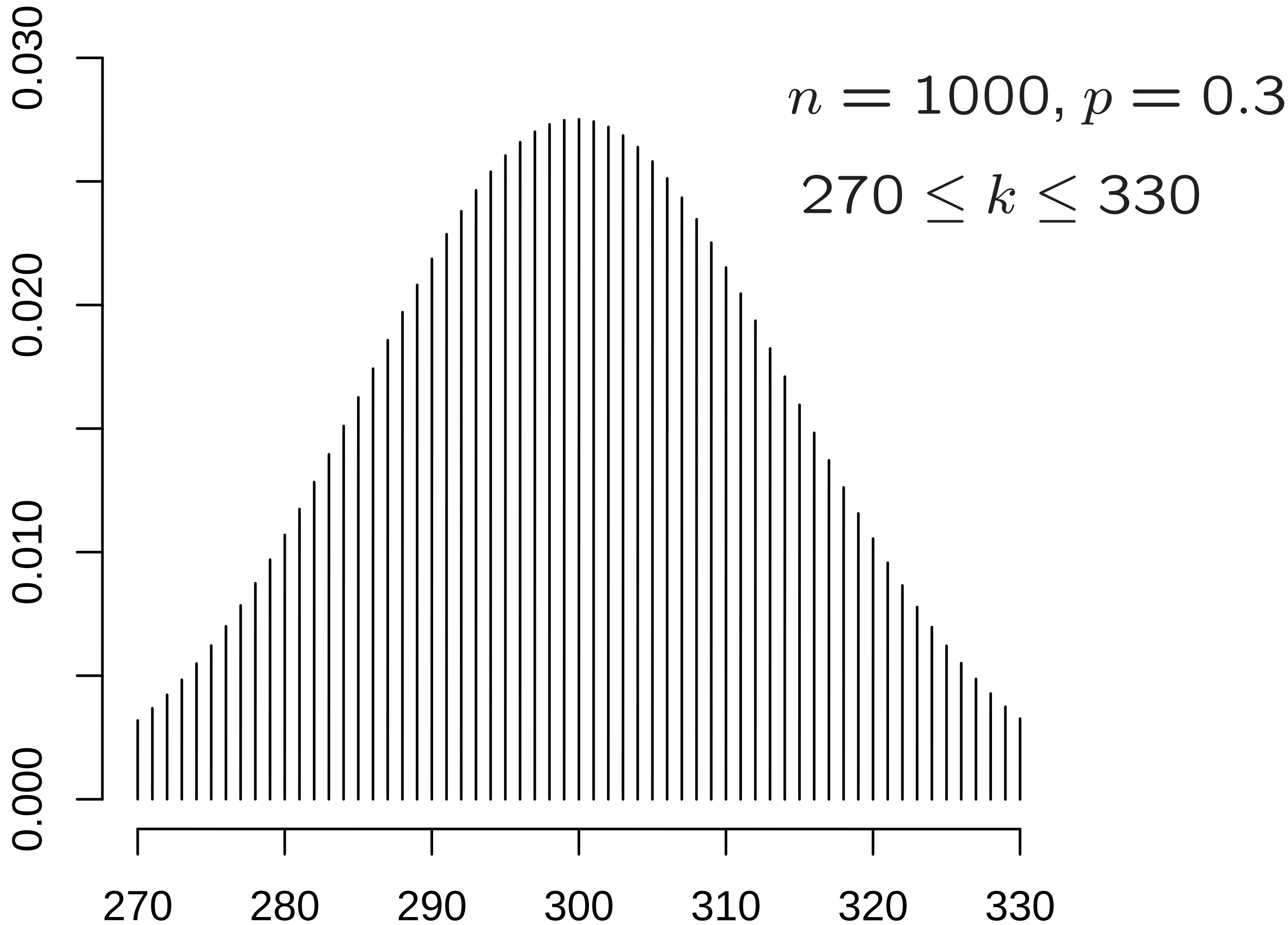
Wenn man n vervierfacht, verdoppelt sich σ.

Approximativ gilt dann in der Darstellung $(*)$:

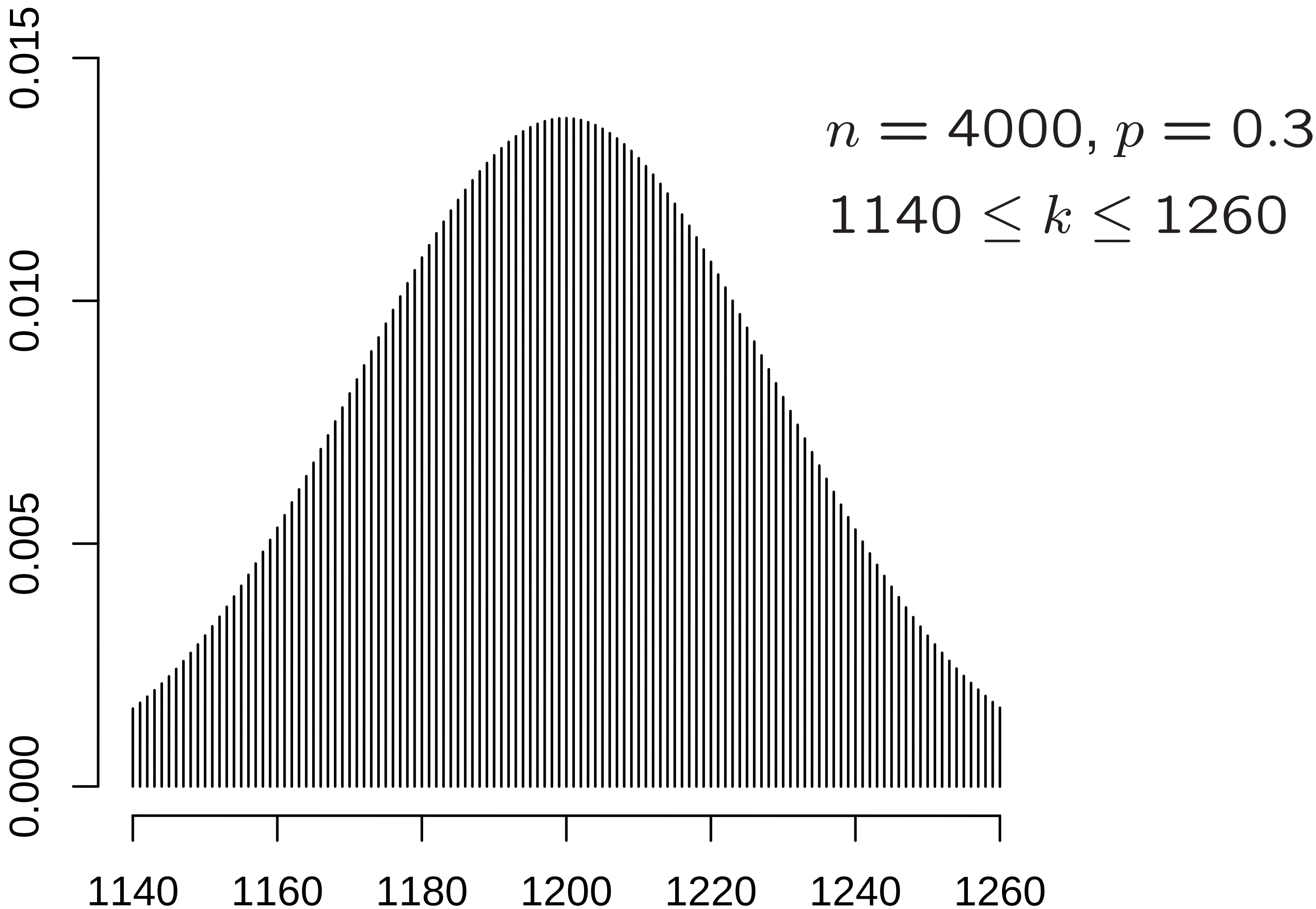
Im Bereich von einer Standardabweichung um das Zentrum μ

bringt man doppelt so viele k unter.

Das Gewicht jedes einzelnen k halbiert sich.



$n = 1000, p = 0.3$
$270 \leq k \leq 330$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330



$n = 4000, p = 0.3$
$1140 \leq k \leq 1260$
0.000
0.005
0.010
0.015
1140
1160
1180
1200
1220
1240
1260

Die Ähnlichkeit ist unverkennbar:

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)