

Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 4

Die Varianz einer Summe von ZV'en und
die Kovarianz von zwei ZV'en



(Buch S. 60)

Beim zweifachen p -Münzwurf Z_1, Z_2
ergab sich aus der Unabhängigkeit der Z_i :

$$\text{Var}[Z_1 + Z_2] = \text{Var}[Z_1] + \text{Var}[Z_2].$$

Wie “streuen” Summen von
nicht unabhängigen Zufallsgrößen?

Wie steht’s mit der

Varianz einer Summe von Zufallsvariablen?

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$$

$$\text{Var}[X + Y] = \mathbb{E}[\underbrace{((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2}_{\text{}}]$$

$$= \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] + \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] + \underbrace{2\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}_{\text{}}$$

Mit der Definition der **Kovarianz**

$$\text{Cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

bekommen wir

$$\boxed{\text{Var}[X + Y] = \text{Var } X + \text{Var } Y + 2\text{Cov}[X, Y].}$$

Die Kovarianz

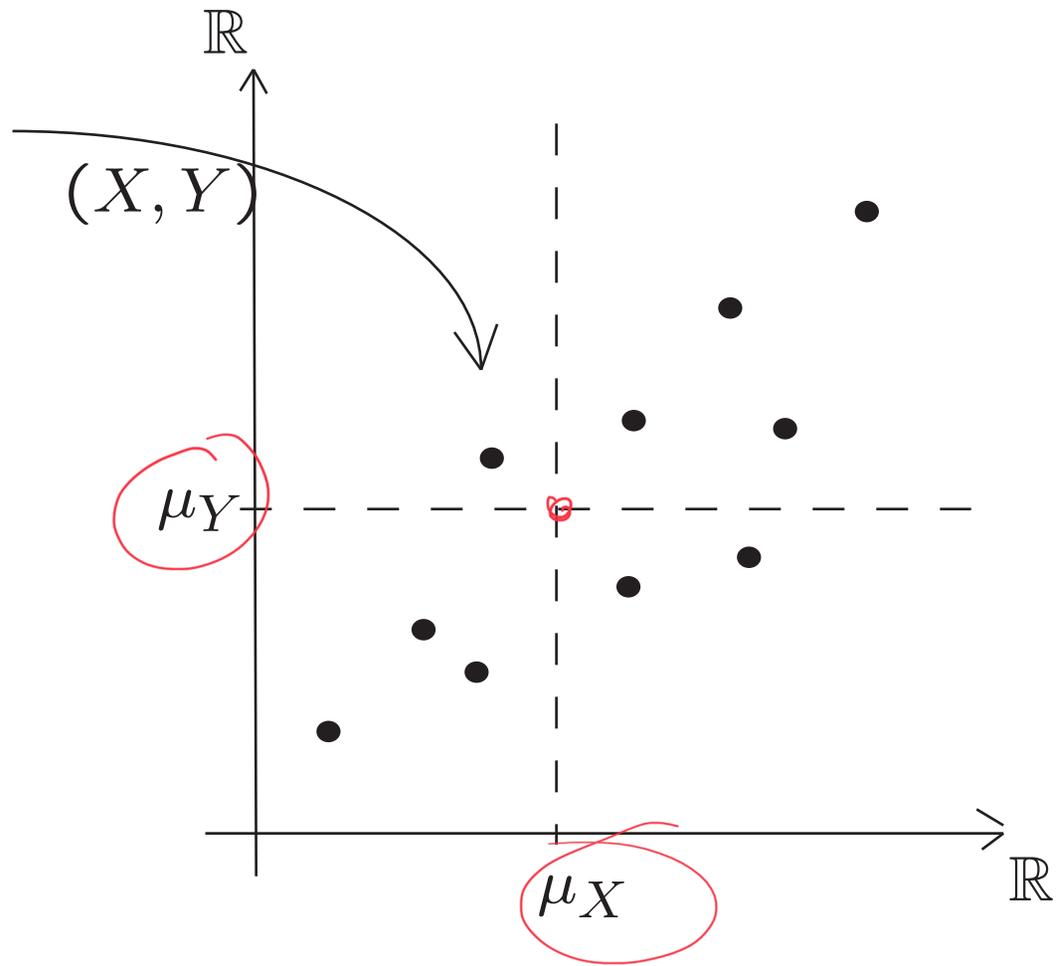
$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$


ist positiv,

wenn X und Y die Tendenz haben,
gemeinsam über bzw. gemeinsam unter
ihrem Erwartungswert auszufallen.

(Größere Abweichungen fallen dabei mehr ins Gewicht.)





Ist $\text{Cov}[X, Y]$

$= 0$, dann nennt man X, Y unkorreliert
 > 0 , ... positiv korreliert
 < 0 , ... negativ korreliert.

Zwei Spezialfälle:

$$Y = X :$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[(X - \mu_X)(X - \mu_X)] = \text{Var}[X]$$

$$Y = -X :$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[(X - \mu_X)(-X + \mu_X)] = -\text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}X + \text{Var}Y + 2\text{Cov}[X, Y].$$

Ganz analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \text{Var}[Z_1 + \cdots + Z_n] \\ &= \text{Var} Z_1 + \cdots + \text{Var} Z_n + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}[Z_i, Z_j] \end{aligned}$$

Wir halten fest:

Sind X_1, \dots, X_n reellwertige Zufallsvariable
mit endlicher Varianz und

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

(man sagt dafür auch: die X_i sind *paarweise unkorreliert*)

dann gilt:

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var } X_1 + \dots + \text{Var } X_n$$


Eine Umformung von $\text{Cov}[X, Y]$:

$$\mathbb{E}[\mu_X Y] = \mu_X \cdot \mu_Y$$

Eine Umformung von $\text{Cov}[X, Y]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] &= \mathbb{E}[XY - \mu_X Y - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

wegen der Linearität des Erwartungswertes.

So bekommen wir die (manchmal) hilfreiche Formel

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

Speziell für zwei Ereignisse E_1, E_2 :

$$\text{Cov}[I_{E_1}, I_{E_2}] = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2).$$

$$= \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2}] - \mathbf{E}[I_{E_1}]\mathbf{E}[I_{E_2}]$$

Vgl. die Definition

der positiven/negativen Korreliertheit von Ereignissen
in V5b6.

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

Aus der Multiplikationsformel für den Erwartungswert
sehen wir

Unabhängige Zufallsvariable X und Y sind unkorreliert.

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

Aus der Multiplikationsformel für den Erwartungswert
sehen wir

Unabhängige Zufallsvariable X und Y sind unkorreliert.

Speziell ist für unabhängige Zufallsvariable
mit endlichen Varianzen

die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen.