Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 4

Umrechnung von $\text{Var}[X]$,
Varianz der Poissonverteilung

(Buch S. 24, 29)

Manchmal verwenden wir die "hilfreiche Formel":

$$\text{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - \underbrace{2\mu \mathbf{E}[X]}_{= 2\mu^2} + \mu^2 \\ &= \mathbf{E}[X^2] - \mu^2\end{aligned}$$

Manchmal verwenden wir die “hilfreiche Formel”:

$$\text{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X - \mu)^2] &= \mathbf{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 2\mu\mathbf{E}[X] + \mu^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

(wegen Linearität des Erwartungswertes)

Zur Erinnerung:

Die Poissonverteilung mit Parameter λ
entsteht als Grenzwert von Binomialverteilungen mit

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda.$$

Weil dann npq gegen λ konvergiert,
steht zu vermuten:

Zur Erinnerung:

Die Poissonverteilung mit Parameter λ
entsteht als Grenzwert von Binomialverteilungen mit

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda.$$

Weil dann npq gegen λ konvergiert,
steht zu vermuten:

Die Varianz einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X ist λ .

Beweis durch Rechnung:

Beweis durch Rechnung:

$$\mathbf{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$= g(k)$

$$\frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

$$j := k-2$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$

Beweis durch Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X(X - 1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k - 1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k - 2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2.\end{aligned}$$

Also:

$$\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X(X - 1)] + \mathbf{E}[X] = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \lambda.$$