Vorlesung 6a
Varianz und Kovarianz

Teil 2

Summen unabhängiger Zufallsvariabler:

Varianz der Binomialverteilung,

$\sqrt{n}$-Gesetz, Chebyshev-Ungleichung und

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

(Buch S. 50, S. 26, S74)

Die Rechnung auf der letzten Folie von Teil 1 weist direkt den Weg zum

Satz: $X_1, \dots, X_n$ seien paarweise unabhängige reellwertge Zufallsvariable mit endlichen Erwartungswerten. Dann gilt:

$$\mathbf{Var}[X_1 + \cdots X_n] = \mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n].$$

Die Rechnung auf der letzten Folie von Teil 1 weist direkt den Weg zum

Satz: $X_1, \ldots, X_n$ seien paarweise unabhängige reellwertge Zufallsvariable mit endlichen Erwartungswerten. Dann gilt:

$$\mathbf{Var}[X_1 + \cdots X_n] = \mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n].$$

Beweis: Mit $\mu_i := \mathbf{E}[X_i]$ ist nach Definition der Varianz

$$\mathbf{Var}[X_1 + \cdots X_n] = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right)^2\right]$$

Wegen der Linearität des EW ist dies

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right].$$

Die Summanden mit $i \neq j$ sind $= 0$ wegen der Produktformel (V5b2), die “Diagonalterme” ($i = j$) summieren zu $\mathbf{Var}[X_1] + \cdots \mathbf{Var}[X_n]$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Satz

zusammen mit Bsp. 2 in Teil 1 ergibt sich

Die Varianz der Bin(n, p)-Verteilung ist npq.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz für die Standardabweichung

folgt aus der Additivität der Varianz unabhängiger ZV'er:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig

und identisch verteilt mit Varianz σ^2.

Dann gilt für die Varianz

des Mittelwerts $M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$:

$$\mathbf{Var}[M_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Das $\sqrt{n}$-Gesetz für die Standardabweichung

folgt aus der Additivität der Varianz unabhängiger ZV'er:

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig

und identisch verteilt mit Varianz σ^2.

Dann gilt für die Varianz

des Mittelwerts $M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$:

$$\mathbf{Var}[M_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Man hat somit das berühmte $\sqrt{n}$-Gesetz:

$$\sigma_{M_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma.$$

Die Ungleichung von Chebyshev

liefert eine Quantifizierung der anschaulichen Botschaft

“Je weniger eine reellwertige Zufallsvariable streut,

mit um so größerer Wahrscheinlichkeit

fällt sie nahe zu ihrem Erwartungswert aus.”

Die Ungleichung von Chebyshev:

Y sei eine reellwertige Zufallsvariable

mit endlichem Erwartungswert μ.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|Y-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{Var}[Y]$$

Die Ungleichung von Chebyshev:

Y sei eine reellwertige Zufallsvariable

mit endlichem Erwartungswert μ.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{Var}[Y]$$

Beweis:

Mit $X := (Y - \mu)^2$ ist die Behauptung äquivalent zu

$$\mathbf{P}(X \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}[X].$$

Das aber folgt aus der Ungleichung von Markov. $\square$

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen

ist eine unmittelbare Folgerung aus dem $\sqrt{n}$-Gesetz

zusammen mit der Ungleichung von Chebyshev:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig

und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und

endlicher Varianz. Dann gilt für die Mittelwerte

$M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$:

$$\mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{Var}[M_n] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$